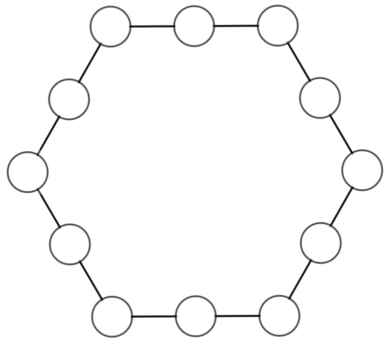
Atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase



1. att.

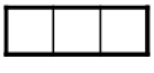
5.1. Ieraksti 1. att. aplīšos skaitļus no 1 līdz 12, katrā aplītī citu skaitli, tā, lai uz katras sešstūra malas esošo trīs skaitļu summa būtu viena un tā pati. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

5.2. Ieraksti burtu un zvaigznīšu vietā ciparus tā, lai būtu pareizs reizināšanas piemērs. Vienādu burtu vietā jābūt vienādiem cipariem, bet dažādu burtu vietā jābūt dažādiem. Zvaigznīšu vietā var būt patvaļīgi cipari, var būt arī kādi no tiem, kas ierakstīti burtu vietās. Neviens no cipariem (ne burtu, ne zvaigznīšu vietās) nedrīkst būt 0. Burti "a" un "ā" apzīmē dažādus ciparus. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

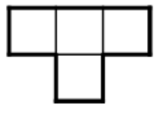
$$\begin{array}{cccc} & \times & \mathrm{m} & \mathrm{a} \\ & & \mathrm{t} & \mathrm{e} \\ \hline & * & * & * \\ * & \mathrm{m} & \bar{\mathrm{a}} & \\ \hline \mathrm{t} & \mathrm{i} & \mathrm{k} & \mathrm{a} \end{array}$$

5.3. Kāda ir mazākā iespējamā ciparu summa sešciparu skaitlim, kas dalās ar 24?

5.4. Parādi, kā 5×7 rūtiņu taisnstūri var sagriezt vienā 1×3 rūtiņu taisnstūrī (2. att.) un astoņās "T" veida figūrās (3. att.), abu veidu figūras var būt arī pagrieztas.



2. att.



3. att.

5.5. Sākumā 3×3 rūtiņu tabulā katrā rūtiņā ir ierakstīta nulle. Vienā gājienā Raitis izvēlas jebkuru 2×2 rūtiņu kvadrātu un visiem četriem tajā esošajiem skaitļiem pieskaita 1. Pēc vairākiem šādiem gājieniem viņš rūpīgi aplūkoja iegūtos 9 skaitļus. Vai var gadīties, ka tieši 8 no tiem ir pirmskaitļi? Vai var gadīties, ka visi 9 ir pirmskaitļi?

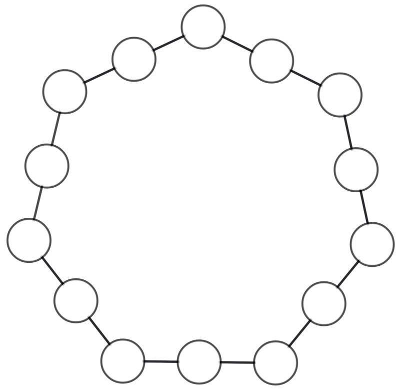
LATVIJAS UNIVERSITĀTE

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
Eksakto zinātņu un tehnoloģiju fakultāte
A. Liepas Neklātienes matemātikas skola

Atklātā matemātikas olimpiāde

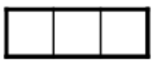
6. klase

6.1. Ieraksti 1. att. aplīšos skaitļus no 1 līdz 14, katrā aplītī citu skaitli, tā, lai uz katras septiņstūra malas esošo trīs skaitļu summa būtu viena un tā pati. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

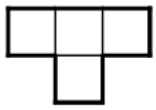


1. att.

6.2. Parādi, kā 9×11 rūtiņu taisnstūri var sagriezt vienā 1×3 rūtiņu taisnstūrī (2. att.) un 24 ”T” veida figūrās (3. att.). Abu veidu figūras var būt arī pagrieztas.



2. att.



3. att.

6.3. Ieraksti burtu vietā ciparus tā, lai būtu pareizs saskaitīšanas piemērs, vienādu burtu vietā būtu vienādi cipari, bet dažādu burtu vietā būtu dažādi cipari. Burti ”a” un ”ā” apzīmē dažādus ciparus. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt. Atceries, ka skaitlis nevar sākties ar nulli!

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \mathrm{p} & \mathrm{a} & \mathrm{s} & \mathrm{a} & \mathrm{k} & \mathrm{a} \\
+ & & \mathrm{a} & \mathrm{s} & \mathrm{a} & \mathrm{k} & \mathrm{a} \\
+ & & & \mathrm{s} & \mathrm{a} & \mathrm{k} & \mathrm{a} \\
+ & & & & \mathrm{a} & \mathrm{k} & \mathrm{a} \\
+ & & & & & \mathrm{k} & \mathrm{a} \\
+ & & & & & & \mathrm{a} \\
\hline
\mathrm{g} & \mathrm{r} & \bar{\mathrm{a}} & \mathrm{m} & \mathrm{a} & \mathrm{t} & \mathrm{a}
\end{array}
$$

6.4. Profesors Cipariņš uz tāfeles uzrakstīja divus septiņciparu skaitļus. Katru ciparu šajos skaitļos viņš aizstāja ar kādu burtu, vienādus ciparus ar vienādiem burtiem, dažādus ciparus ar dažādiem burtiem. Zināms, ka viens no uzrakstītajiem skaitļiem PLATONS dalās ar 45. Pierādi, ka otrs uzrakstītais skaitlis SOKRATS nedalās ar 54.

6.5. Zināms, ka 2786. gadā no Marsa centrālā pasta tika nosūtīts tieši par 10% telegrammu vairāk nekā 2785. gadā. Arī nākamajos trijos gados (no 2787. līdz 2789. gadam) katru gadu no tā tika nosūtīts tieši par 10% vairāk telegrammu nekā iepriekšējā gadā. Cik telegrammu tika nosūtīts no Marsa centrālā pasta 2789. gadā, ja zināms, ka 2785. gadā no tā tika nosūtīts ne vairāk kā 15000 telegrammu?

Atklātā matemātikas olimpiāde

7. klase

7.1. Kādas ielas vienā pusē rindā stāv piecas mājas. Katrā mājā dzīvo vismaz divi cilvēki. Zināms arī, ka nav tādu divu māju, kurās dzīvotu vienāds skaits cilvēku.
Par cilvēka kaimiņiem sauksim tos cilvēkus, kuri dzīvo vai nu ar viņu vienā mājā, vai arī blakus mājās. Vai iespējams, ka katram cilvēkam ir vai nu tieši 20, vai arī tieši 30 kaimiņi?

7.2. Parādi, kā var 3×3 rūtiņu kvadrātu sagriezt 3 dažādos gabalos (griežot pa rūtiņu līnijām) tā, lai katri divi no iegūtajiem gabaliem (nekur tos nepārvietojot) kopā veidotu simetrisku figūru. Katram gabalam jāpieskaras pie vismaz vienas kvadrāta malas (t.i. gabals nevar sastāvēt tikai no centrālās rūtiņas).
Figūra ir simetriska, ja to var pārlocīt uz pusēm tā, ka abas puses sakrīt. Figūras (gabali) ir dažādas, ja, pārbīdot vai "apmetot otrādi", tās nevar uzlikt vienu uz otras.

7.3. Kāda ir mazākā iespējamā ciparu summa sešciparu skaitlim, kas dalās ar 99?

7.4. Sākumā vienā rindā uz galda ir novietotas 12 glāzes ar limonādi. Indriķis un Oto pēc kārtas izdara gājienus, Indriķis sāk. Vienā gājienā var vai nu izdzert jebkuru vienu glāzi, vai arī izdzert divas blakusstāvošas glāzes. Pēc izdzeršanas tukšās glāzes (glāze) tiek noliktas atpakaļ vietā. Uzvar tas spēlētājs, pēc kura gājiena visas glāzes ir tukšas. Kurš no spēlētājiem, Indriķis vai Oto, vienmēr var uzvarēt, pareizi spēlējot?

7.5. Zināms, ka 3546. gadā no Saturna kosmiskās stacijas startēja tieši par 5% starpplanētu lidojumu vairāk nekā 3545. gadā. Arī nākamajos četros gados (no 3547. līdz 3550. gadam) starpplanētu lidojumu skaits no tās ar katru gadu pieauga. Precīzs šī pieauguma lielums procentos (attiecībā pret iepriekšējo gadu) par aplūkojamo piecu gadu periodu (no 3546. līdz 3550. gadam) redzams 1. tabulā. Cik starpplanētu lidojumu no Saturna kosmiskās stacijas startēja 3550. gadā, ja zināms, ka 3545. gadā to bija ne vairāk kā miljons?

Gads	Pieaugums pret iepriekšējo gadu
3546	5%
3547	5%
3548	10%
3549	10%
3550	5%

1. tabula

Atklātā matemātikas olimpiāde

8. klase

8.1. Parādi, kā skaitli 2025 var izteikt ar 9 vieniniekiem, pēc vajadzības lietojot aritmētisko darbību zīmes, kāpināšanu un iekavas. Drīkst starp vieniniekiem nelikt arī nekādu zīmi (tādā veidā iegūstot skaitļus 11, 111 utt.). Ja neizdodas ar 9 vieniniekiem, tad parādi ar pēc iespējas mazāku vieninieku skaitu, ar kādu izdodas.

8.2. Uz vienādsānu trijstūra ABC sānu malām AB un BC izvēlēti attiecīgi punkti M un K tā, ka nogriežņi AK un MC ir perpendikulāri un $AM = AK = AC$. Aprēķini trijstūra ABC leņķus.

8.3. Bezgalīgā naturālu skaitļu virknē katru locekli, sākot no otrā, iegūst, pieskaitot iepriekšējam loceklim tā lielāko ciparu. Piemēram, ja virknes pirmais loceklis ir 13, tad virkne ir $13, 16, 22, 24, 28, 36, \ldots$. Vai eksistē tāda virknes pirmā locekļa vērtība, ka visi virknes locekļi ir **a)** pāra skaitļi; **b)** nepāra skaitļi?

8.4. Ilmārs grib uznest augšā uz dzīvokli 150 kg ķirbju. Zināms, ka katrs ķirbis sver ne vairāk kā 10 kg. Vienā reizē viņš var uznest patvaļīgu daudzumu ķirbju, kas kopā sver ne vairāk kā 30 kg. Kāds ir mazākais reižu skaits, ar kuru Ilmārs noteikti var uznest visus ķirbjus (neatkarīgi no to svara)? Griezt gabalos ķirbjus nedrīkst!

8.5. LAPSA un SPALS ir divi piecciparu skaitļi, kuros cipari aizstāti ar burtiem, vienādi cipari ar vienādiem burtiem, bet dažādi cipari — ar dažādiem. Zināms, ka abi šie skaitļi dalās ar 9. Pierādi, ka tieši viens no tiem dalās ar 15. Kurš tas ir?

Atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase

9.1. Atrodiet divus dažādus naturālu skaitļu trijniekus (a, b, c), kuriem $a < b < c$ un

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{2025}.$$

9.2. Uz trijstūra ABC malas AC izvēlēts tāds punkts D, ka trijstūra ABD mediāna AM ir paralēla trijstūra DBC mediānai DN. Aprēķināt attiecību $\frac{AD}{DC}$.

9.3. Vai eksistē pirmskaitlis p, kuram $p \times p$ rūtiņu kvadrātu, griežot pa rūtiņu līnijām, var sagriezt tādos mazākos kvadrātos, ka katram no tiem mala ir vismaz 2 rūtiņas gara?

9.4. Bezgalīgā veselu skaitļu virknē $1, 2, 3, 6, 1, \ldots$ katrs loceklis, sākot ar ceturto, ir iepriekšējo 3 locekļu summas kvadrāta pēdējais cipars. Aprēķiniet šīs virknes 2025. locekli.

9.5. Ilmārs grib uznest augšā uz dzīvokli 255 kg ķirbju. Zināms, ka katrs ķirbis sver ne vairāk kā 10 kg. Vienā reizē viņš var uznest patvaļīgu daudzumu ķirbju, kas kopā sver ne vairāk kā 30 kg. Kāds ir mazākais reižu skaits, ar kuru Ilmārs noteikti var uznest visus ķirbjus (neatkarīgi no to svara)? Ķirbjus griezt gabalos nedrīkst!

Atklātā matemātikas olimpiāde
10. klase

10.1. Doti divi dažādi naturāli skaitļi a un b. Pierādīt, ka

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 + \frac{1}{ab}.$$

10.2. Doti kvadrāti $ABCD$ un $BCEF$ (BC tiem ir kopīga mala), punkts M ir malas EF viduspunkts. Kādā garumu attiecībā taisne AC sadala nogriezni MD?

10.3. Bezgalīgā naturālu skaitļu virknē $24, 69, 21, 18, \ldots$ katru skaitli, sākot no trešā, var iegūt, saskaitot divu iepriekšējo skaitļu ciparu summas. Aprēķināt šīs virknes 2025. locekli.

10.4. Uz tāfeles uzrakstīti 2025 dažādi naturāli skaitļi. Reizi minūtē Elīna izvēlas jebkurus divus no tiem, apzīmēsim tos ar a un b, tos nodzēš un to vietā uzraksta skaitļus $\mathrm{LKD}(a, b)$ un $\mathrm{MKD}(a, b)$. Pierādīt, ka noteikti (neatkarīgi no tā, kurus skaitļus Elīna izvēlas) pienāks tāds brīdis, kad viņa uzrakstīs uz tāfeles tos pašus skaitļus, ko nodzēsusi (tajā pašā gājienā).
Piezīme: ar $\mathrm{LKD}(x, y)$ un $\mathrm{MKD}(x, y)$ apzīmē attiecīgi skaitļu x un y lielāko kopīgo dalītāju un mazāko kopīgo dalāmo.

10.5. Vai eksistē pirmskaitlis p, kuram $p \times p$ rūtiņu kvadrātu, griežot pa rūtiņu līnijām, var sagriezt tādos mazākos kvadrātos, ka jebkuram no tiem malas garums (rūtiņās) arī ir pirmskaitlis?

Atklātā matemātikas olimpiāde

11. klase

11.1. Pierādīt, ka jebkuram naturālam skaitlim k var atrast tādus naturālus skaitļus a un b, ka $a!$ dalās ar b, $b!$ dalās ar a un $a - b = k$.
Piezīme: naturāla skaitļa n faktoriāls $n!$ ir visu naturālo skaitļu no 1 līdz n ieskaitot reizinājums: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Piemēram, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

11.2. Regulāra 9-stūra virsotnēs un malu viduspunktos ierakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 18 (katrs skaitlis izmantots tieši vienu reizi) tā, ka skaitļu summa uz katras tā malas ir viena un tā pati (uz katras malas atrodas 3 skaitļi, divi virsotnēs un viens tās viduspunktā). Kāda ir mazākā iespējamā šīs summas vērtība?

11.3. Izliekta četrstūra $ABCD$ diagonāles ir perpendikulāras un krustojas punktā O. Zināms, ka $BC = AO$. Punkts F izvēlēts tā, ka $CF = BO$ un $CF \perp CD$. Pierādīt, ka trijstūris ADF ir vienādsānu.

11.4. Cik dažādos veidos skaitli 12 var izteikt kā vieninieku, divnieku un četrinieku summu? Veidi, kas atšķiras ar saskaitāmo secību, ir uzskatāmi par dažādiem. Piemēram, skaitli 4 var izteikt sešos dažādos veidos: $1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 2+2 = 4$.

11.5. Katrs no 7 votivapām zina dažus pantiņus no votivapu himnas. Zināms, ka jebkuri 3 votivapas kopā var to nodziedāt (tie kopā zina visus pantiņus). Vai noteikti var atrast divus votivapas, kas divatā var nodziedāt votivapu himnu, ja tajā ir **a)** 20; **b)** 21 pantiņi?

Atklātā matemātikas olimpiāde

12. klase

12.1. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu

$$x \cdot \left(5^{\sqrt{x^2-1}} + 7^{\sqrt{x+1}}\right) = -2.$$

12.2. Cik ir tādu sešciparu skaitļu, kas nesatur nevienu no cipariem $5, 6, 7, 8, 9, 0$ un kuros nekur blakus neatrodas divi cipari 4?

12.3. Trijstūrī ABC novilkts augstums BD un mediāna BE, zināms, ka punkts D atrodas starp C un E. Zināms arī, ka $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CBD = 23°$. Aprēķināt $\sphericalangle DBE$ lielumu grādos!

12.4. Katrs no 7 šillišallām zina dažus pantiņus no šillišallu himnas. Zināms, ka jebkuri 4 no viņiem kopā var to nodziedāt (tie kopā zina visus pantiņus). Vai noteikti var atrast trīs šillišallas, kas kopā var nodziedāt šillišallu himnu, ja tajā ir **a)** 34; **b)** 35 pantiņi?

12.5. Doti tādi naturāli skaitļi x un y, ka $x + 2y + 1$ ir pirmskaitlis. Pierādīt, ka $x^2 + 2xy - 2y$ nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts.