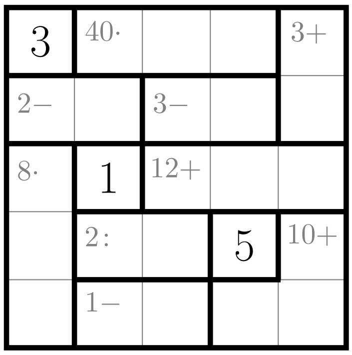
Atklātā matemātikas olimpiāde

Uzdevumi un atrisinājumi

5. klase

5.1. Režģa (skatīt 1. att.) katrā rūtiņā ieraksti vienu ciparu no 1 līdz 5. Katrā rindā un katrā kolonnā jābūt ierakstītiem visiem skaitļiem no 1 līdz 5. Katrā ar tumšu līniju atdalītajā figūrā, kas satur divas vai trīs rūtiņas, ir dots skaitlis un darbību zīme. Ar šīs figūras rūtiņās ierakstītajiem skaitļiem, veicot doto darbību, jāiegūst dotais skaitlis. Pietiek parādīt vienu piemēru, kā to izdarīt. Trijās ar tumšu līniju apvilktajās rūtiņās skaitļi jau ir ierakstīti.

Piemēram, augšējā kreisā stūra figūrā "2−" nozīmē, ka abu ierakstīto skaitļu starpība (no lielākā atņemot mazāko) ir 2.



1. att.

Atrisinājums. Skaitļus režģī iespējams sarakstīt, kā tas redzams 2. att.

3	5	2	4	1
5	3	4	1	2
2	1	5	3	4
4	2	1	5	3
1	4	3	2	5

2. att.

5.2. Kastē ir 7 zaļas, 3 sarkanas, 11 melnas un 9 baltas bumbiņas. Kāds ir mazākais skaits bumbiņu, kas Aleksandram jāizvelk no kastes, lai garantētu, ka viņam: **a)** ir vismaz divas vienādas krāsas bumbiņas; **b)** ir vismaz divas melnas bumbiņas; **c)** ir vismaz viena bumbiņa no katras krāsas?

Atrisinājums. a) Tā kā ir četras dažādas krāsas, tad minimālais bumbiņu skaits, kas jāizvelk Aleksandram ir $4 + 1 = 5$. Ar četrām nepietiks, jo tad varētu gadīties izvilkt katru savā krāsā.

b) Var gadīties, ka divas melnās bumbiņas tiek izvilktas pašas pēdējās. Tas ir, vispirms izvelk pilnīgi visas citu krāsu bumbiņas un tad 2 melnas. Tātad, nepieciešams izņemt $7 + 3 + 9 + 2 = 21$ bumbiņas.

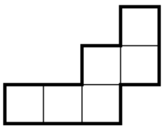
c) Visvairāk ir zaļu, melnu un baltu bumbiņu. Var gadīties, ka tās tiek izvilktas, un pilnam krāsu komplektam pietrūkst sarkana bumbiņa, kuru izvelk pēdējo. Tāpēc nepieciešams izvilkt $7+11+9+1 = 28$ bumbiņas.

5.3. Uzraksti 10 izteiksmes, katrai izmantojot četrus skaitļus 3, 5, 7 un 9 katru tieši vienu reizi un trīs aritmētisko darbību zīmes (saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu vai dalīšanu), tā, lai šo izteiksmju vērtības būtu skaitļi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Darbību grupēšanai drīkst izmantot iekavas, skaitļu secību drīkst mainīt. Dalīšanai jāizpildās precīzi bez noapaļošanas. Katram skaitlim pietiek atrast vienu derīgu izteiksmi. Derīgas izteiksmes piemērs: $7 \cdot (9 - 5) - 3 = 25$.

Atrisinājums. Prasītos ciparus varam iegūt sekojoši:

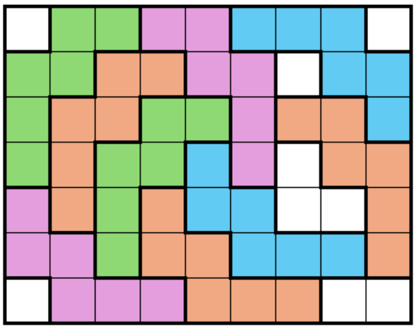
$$
\begin{aligned}
(9+3)-(5+7)&=0, & 5\cdot((7+3)-9)&=5,\\
(9-7):(5-3)&=1, & (9:3)\cdot(7-5)&=6,\\
(9+7):(5+3)&=2, & 7\cdot(9-(3+5))&=7,\\
(9-3):(7-5)&=3, & (7+9)-(3+5)&=8,\\
(9+5)-(7+3)&=4, & 9\cdot(3-(7-5))&=9.
\end{aligned}
$$

5.4. Dots 7×9 rūtiņu taisnstūris. Vai tajā var ievietot deviņas 3. att. redzamās figūras? Figūras drīkst pagriezt un apmest otrādi, bet tās nevar pārklāties viena ar otru vai iziet ārpus taisnstūra.



3. att.

Atrisinājums. Jā var. Piemēram tā, kā redzams 4. att.



4. att.

5.5. Andris aizmirsa mājās pulksteni. Autobusa pieturā viņš pamanīja stāvam 4 cilvēkus. Katram no tiem Andris pajautāja: “Sakiet, cik ir pulkstenis?”. Atbildes bija šādas:

A: “Bez 6 minūtēm trīs.”
B: “Bez 3 minūtēm trīs.”
C: “3 minūtes pāri trijiem.”
D: “2 minūtes pāri trijiem.”

Izrādījās, ka nevienam no šiem cilvēkiem pulkstenis nerāda pareizu laiku. Pie tam, viena pulksteņa rādītais laiks atšķiras no patiesā laika par 2 minūtēm, otrā - par 3 minūtēm, trešā - par 4 minūtēm, ceturtā - par 5 minūtēm (nav zināms, kurš pulkstenis kavējas, kurš steidzas). Cik patiesībā bija pulkstenis? Atbildi pamato!

Atrisinājums. Pierakstīsim katra cilvēka atbildi. A – 2:54; B – 2:57; C – 3:03; D – 3:02. Neviens no šiem laikiem pēc dotā nevar būt pareizs.

Pareizais laiks nevar būt 2:54 un 3:03 (tad attiecīgi C kļūdītos par 9 minūtēm un A kļūdītos par 9 minūtēm). Tas nevar būt arī nedz mazāks, nedz lielāks, citādi A vai B kļūdītos vairāk par 9 minūtēm. Tātad tas ir starp 2:55 un 3:01.

Neviens nekļūdās par 1 minūti, tādēļ neder 2:55, 2:56, 2:58, 3:01. Atliek tikai 3:00 vai 2:59. 3:00 neder, jo tad gan B, gan C kļūdās par 3 min. Tātad pulkstenis bija 2:59.

6. klase

6.1. Režģa (skatīt 5. att.) katrā rūtiņā ieraksti vienu ciparu no 1 līdz 6. Katrā rindā un katrā kolonnā jābūt ierakstītiem visiem skaitļiem no 1 līdz 6. Katrā ar tumšu līniju atdalītajā figūrā, kas satur divas vai trīs rūtiņas, ir dots skaitlis un darbību zīme. Ar šīs figūras rūtiņās ierakstītajiem skaitļiem, veicot doto darbību, jāiegūst dotais skaitlis. Pietiek parādīt vienu piemēru, kā to izdarīt. Vienā ar tumšu līniju apvilktajā rūtiņā skaitlis jau ir ierakstīts.

Piemēram, augšējā kreisā stūra figūrā "4−" nozīmē, ka abu ierakstīto skaitļu starpība (no lielākā atņemot mazāko) ir 4.

2:	4−	1−	11+		2:
			2:		
3+	3	60·	11+		
			2−	2:	1−
20·	2:	8+			
				5+	

5. att.

Atrisinājums. Skaitļus režģī iespējams sarakstīt, kā tas redzams 6. att.

3	1	4	6	5	2
6	5	3	2	4	1
2	3	5	4	1	6
1	6	2	5	3	4
4	2	1	3	6	5
5	4	6	1	2	3

6. att.

6.2. Kastē ir 14 violetas, 18 brūnas, 4 oranžas un 19 dzeltenas bumbiņas. Anna no kastes izvilka 9 bumbiņas.

a) Vai var apgalvot, ka tieši piecas no izvilktajām bumbiņām ir dzeltenas?

b) Vai Anna noteikti izvilka vismaz trīs vienādas krāsas bumbiņas?

c) Kāds mazākais skaits bumbiņu Annai vēl ir jāizvelk no kastes, lai varētu apgalvot, ka kopumā Annai vismaz sešas no bumbiņām ir vienā krāsā?

Atrisinājums. a) Nē. Piemēram, varētu gadīties, ka Anna kopā ir izvilkusi 9 violetas bumbiņas.
b) Jā. Kopā ir deviņas bumbiņas un ir tikai četrās dažādās krāsās. Ja Anna būtu izvilkusi ne vairāk kā 2 bumbiņas no katras krāsas, tad kopā būtu ne vairāk kā $2 \cdot 4 = 8$ bumbiņas. Bet tas ir pretrunā ar doto, ka ir izvilktas 9 bumbiņas. Tātad noteikti Anna ir izvilkusi vismaz 3 vienas krāsas bumbiņas.
c) Ievērosim, ka nav iespējams izvilkt sešas oranžas krāsas bumbiņas, jo kastē ir tikai četras šādas bumbiņas. Var gadīties, ka šīs Anniņa jau ir izvilkusi pirmās. Tātad, ja ir izvilktas visas četras oranžās bumbiņas, tad kastē paliek tikai trīs krāsu bumbiņas. Pēc Dirihlē principa secinām, ka kopumā būtu nepieciešams izvilkt $5 \cdot 3 + 1 = 16$ bumbiņas no trīs dažādām krāsām, lai iegūtu 6 vienādas krāsas bumbiņas. Tātad Annai nepieciešamas kopā vismaz $4 + 16 = 20$ bumbiņas, lai garantētu to, ka sešas no tām ir vienā krāsā. Secinām, ka Annai jāizvelk vēl $20 - 9 = 11$ bumbiņas.

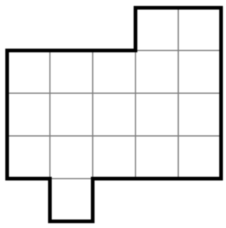
6.3. Katrs no 10 rūķīšiem vienmēr saka patiesību vai vienmēr melo. Zināms, ka katram no rūķīšiem ir viena mīļākā saldējuma garša – vaniļas, šokolādes vai zemeņu.

Sniegbaltīte lūdza pacelt roku tiem rūķiem, kam mīļākais ir vaniļas saldējums, un astoņi rūķīši pacēla savu roku. Tad viņa prasīja par šokolādes saldējumu un puse pacēla savu roku. Kad jautāja par zemeņu saldējumu, tikai viens rūķītis pacēla savu roku. Cik no šiem rūķiem vienmēr saka patiesību?

Atrisinājums. Kopā rūķīši pacēla rokas $8+5+1=14$ reizes. Ja visi teiktu patiesību, tad katrs paceltu roku vienu reizi un būtu 10 paceltas rokas kopumā.

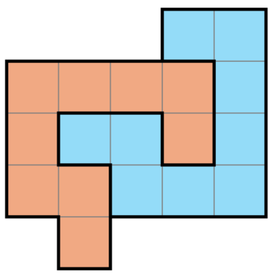
Melis cels roku divas reizes – mīļākajai saldējuma garšai necels, bet pārējām divām pacels. Katru patieso rūķi aizstājot ar meli, pacelto roku skaits palielinās par viens. Tā kā tika paceltas par $14-10=4$ rokām vairāk nekā tad, ja visi teiktu patiesību, tad ir 4 meļi un $10-4=6$ rūķi vienmēr saka patiesību.

6.4. Parādi, kā griežot pa rūtiņu līnijām, 7. att. doto figūru var sagriezt divās vienādās daļās. Daļas ir vienādas, ja tās pagriežot vai apmetot otrādi var uzlikt vienu uz otras tā, ka tās sakrīt.



7. att.

Atrisinājums. Skatīt 8. att.



8. att.

6.5. Caurspīdīgā kastē ir ieliktas konfektes un četriem bērniem jāizsaka savs minējums par konfekšu skaitu tajā. Katrs piedāvā savu minējumu: 116, 124, 120 un 128. Izrādās, neviens nav uzminējis pareizi.

Noskaidrojiet, cik konfekšu var būt kastē, ja zināms, ka no patiesā konfekšu skaita viens no skolēniem kļūdījās par viens, viens — par trīs, viens — par pieci un viens — par deviņi.

Atrisinājums. Pamatosim, ka konfekšu kastē var būt vai nu 119, vai arī 125 konfektes. Konfekšu skaits nevar būt 115 (jo tad kāds būtu kļūdījies par $128-115=13$) un nevar būt 129 (jo tad kāds būtu kļūdījies par $129-116=13$). Tā kā lielākam un mazākam skaitam kļūda būtu vēl lielāka un neviens no minējumiem nav pareizs, varam secināt, ka konfekšu skaits ir starp 117 un 127.

Uzrakstīsim secīgi derīgos variantus un arī skolēnu minējumus (tie būs pasvītroti):

$$\underline{116}; 117; 118; 119; \underline{120}; 121; 122; 123; \underline{124}; 125; 126; 127; \underline{128}.$$

Neviens nav kļūdījies par divi, tādēļ varam izsvītrot skaitļus, kas atrodas attālumā divi no kāda no minējuma:

$$\underline{116}; 117; \cancel{118}; 119; \underline{120}; 121; \cancel{122}; 123; \underline{124}; 125; \cancel{126}; 127; \underline{128}.$$

Neviens nav kļūdījies par septiņi, tāpēc varam izsvītrot 121 un 123:

$$\underline{116}; 117; \cancel{118}; 119; \underline{120}; \cancel{121}; \cancel{122}; \cancel{123}; \underline{124}; 125; \cancel{126}; 127; \underline{128}.$$

Ievērosim, ka 117 un 127 nevar būt pareizā atbilde, jo abos gadījumos kāds būs kļūdījies par 11. Atliek tikai 119 un 125. Viegli pārliecināties, ka abos gadījumos izpildās uzdevuma nosacījumi, tādēļ kastē var būt 119 vai 125 konfektes.

7. klase

7.1. Marta, Sandris un Linda vēlas sagatavot pulciņa telpu Ziemassvētku ballītei. Zināms, ka Marta viena pati to spētu izdarīt vienā stundā, Sandris to spētu pusotrā stundā, bet Linda to spētu izdarīt trīs stundās. Marta ieradās pulciņa telpā 16:00, Sandris 10 minūtēs vēlāk, bet Linda vēl 15 minūtes pēc Sandra (katrs pēc ierašanās uzreiz ķērās pie pulciņa telpas gatavošanas). Cikos pulciņa telpa bija gatava?

Atrisinājums. Pamatosim, ka kopā tika pavadītas $37\frac{1}{2}$ minūtes, lai sagatavotu telpu jeb telpa bija gatava 16:37:30. Tā kā Marta spēj sagatavot telpu stundā, tad katru minūti viņa sagatavo $\frac{1}{60}$ no telpas. Pēc 10 minūtēm viņa būs sagatavojusi $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ no telpas. Tātad vēl jāsakārto $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ no telpas. No šī brīža palīdz arī Sandris. Tā kā Sandris viens pats spētu sagatavot telpu 90 minūtēs, tad katru minūti viņš sagatavo $\frac{1}{90}$ no telpas. Kopā ar Martu viņi katru minūti sagatavo $\frac{1}{60} + \frac{1}{90} = \frac{3}{180} + \frac{2}{180} = \frac{5}{180} = \frac{1}{36}$ no telpas. Tātad pēc 15 minūtēm būs sagatavota vēl $15 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{12}$ no telpas. Tātad atliek sagatavot $\frac{5}{6} - \frac{5}{12} = \frac{10}{12} - \frac{5}{12} = \frac{5}{12}$ no telpas. No šī brīža Sandra ir ieradusies palīdzēt. Viņa spēj katru minūti sagatavot $\frac{1}{180}$ no telpas, tāpēc kopumā ar Sandri un Martu viņi spēj sagatavo $\frac{1}{36} + \frac{1}{180} = \frac{5}{180} + \frac{1}{180} = \frac{6}{180} = \frac{1}{30}$ no telpas katru minūti. Tagad aprēķināsim, cik minūtes nepieciešamas, lai sagatavotu $\frac{5}{12}$ no telpas, ja katru minūti tiek sagatavota $\frac{1}{30}$ no telpas:

$$\frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{30}} = \frac{5}{12} \cdot \frac{30}{1} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}.$$

Tātad sākotnēji Marta viena pati gatavoja telpu 10 minūtes, tad kopā ar Sandri vēl 15 minūtes, bet visi trijatā vēl $12\frac{1}{2}$ minūtes. Kopumā bija nepieciešamas $10 + 15 + 12\frac{1}{2} = 37\frac{1}{2}$ minūtes jeb telpa bija gatava 16:37:30.

7.2. Jurģis Miķeļdienas tirgū ar izlozes palīdzību izdalīja 11 balvas. Katra balva satur 6 rudens labumus: ābolus, bumbierus un bietes. Pie tam zināms, ka katra balva satur vismaz vienu ābolu, bumbieri un bieti. Pamatot, ka noteikti tika izdalītas divas tādas balvas, kurām bija vienāds saturs

Atrisinājums. Nepieciešams uzzināt, cik dažādus komplektus Jurģis varēja izveidot. Tā kā katra balva satur vismaz pa vienam no katra rudens labuma, tad varam apskatīt, cik dažādos veidos skaitli 6 var izteikt kā trīs naturālu skaitļu summu ar trīs saskaitāmajiem: $4+1+1$, $3+2+1$ un $2+2+2$. Ņemot vērā, kura dārzeņa vai augļa daudzums ir katrs no saskaitāmajiem, iegūsim 10 dažādus balvu komplektus:

Āboli	4	1	1	3	3	2	1	2	1	2
Bumbieri	1	4	1	2	1	3	3	1	2	2
Bietes	1	1	4	1	2	1	2	3	3	2

Tā kā tika izdalītas 11 balvas un ir 10 dažādi balvu komplekti, tad pēc Dirihlē principa noteikti būs izdalīti divi tādi komplekti, kam ir vienāds saturs.

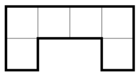
7.3. Skaitļu virknes pirmais loceklis ir 12. Katru nākamo iegūst iepriekšējo vai nu reizinot ar 2 vai 3, vai arī izdalot ar 2 vai 3 (ja tas dalās bez atlikuma). Vai šīs skaitļu virknes 61. loceklis var būt skaitlis 54?

Atrisinājums. Pamatosim, ka prasītais nav iespējams. Aplūkojam, cik daudz pirmreizinātāju ir sākotnējam skaitlim. Sadalot 12 pirmreizinātājos, iegūstam $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, un tam ir trīs pirmreizinātāji. Jāiegūst skaitlis $54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, kuram ir četri pirmreizinātāji.
Katram nākamajam skaitlim skaitļu virknē, skaitļa pirmreizinātāju skaits pieaug par viens (ja reizina ar 2 vai 3) vai samazinās par viens (ja dala ar 2 vai 3). Tātad, pirmreizinātāju skaita paritāte mainās un veidojas periodiska virkne

$$n, p, n, p, n, p, \ldots.$$

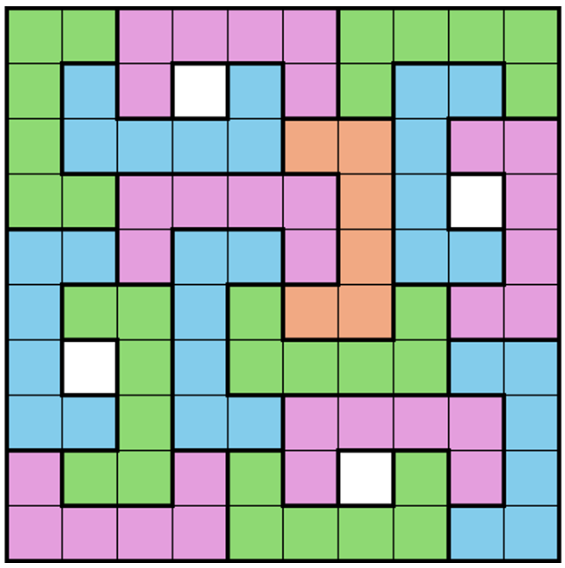
Sākam ar nepāra skaitu pirmreizinātāju (skaitlim 12 ir trīs pirmreizinātāji) un mums interesē virknes 61. loceklis. Ievērojam, ka katrs virknes loceklis pāra pozīcijā būs pāra skaitlis, bet nepāra pozīcijā būs nepāra skaitlis. Tātad skaitļu virknes 61. loceklim būs nepāra skaits pirmreizinātāju. Bet prasīts iegūt 54, kam ir pāra skaits pirmreizinātāju (četri). Secinām, ka prasītais nav iespējams.

7.4. Dots kvadrāts ar izmēriem 10×10 rūtiņas. Kāds ir lielākais skaits 9. att. redzamo figūru, kuras var izgriezt no šī kvadrāta, ja griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu līnijām? Figūras drīkst būt pagrieztas.



9. att.

Atrisinājums. Kvadrātā ir $10 \cdot 10 = 100$ rūtiņas, bet katrai figūrai ir 6 rūtiņas. Tā kā $100 : 6 = 16$, atlikumā 4, tad vairāk par 16 figūrām ielikt noteikti nevar. Piemēru, kā izkārtot 16 figūras rūtiņas var skatīt 10. att. Secinām, ka 16 ir vislielākais figūru skaits.



10. att.

7.5. Anita, Maija, Ināra un Sandra uzstājās koncertā. Katru dziesmu dziedāja 3 meitenes. Cik dziesmu meitenes nodziedāja pavisam, ja Anita dziedāja 7 dziesmas (vairāk nekā jebkura cita meitene), bet Sandra dziedāja 4 dziesmas (mazāk nekā jebkura cita meitene)?
Atrisinājums. Pamatosim, ka kopējais nodziedāto dziesmu skaits ir 7. Apzīmēsim Maijas un Ināras nodziedāto dziesmu skaitu attiecīgi ar M un I. Tad nodziedāto dziesmu summa ir $7 + 4 + M + I = 11 + M + I$. Katru dziesmu dzied 3 meitenes, tādēļ katras meitenes dziedāto dziesmu summai jādalās ar trīs. Turklāt, I un M vērtības var būt 5 vai 6 (vismazākais dziedāto dziesmu skaits ir 4, bet vislielākais – 7). Vienīgais derīgais variants, lai $11 + M + I$ dalītos ar 3 ir gadījumā, kad $M = I = 5$. Tādā gadījumā nodziedāto dziesmu skaits ir $\frac{11+5+5}{3} = \frac{21}{3} = 7$.

Lai pierādītu, ka šāds koncerts ir iespējams, nepieciešams uzrādīt vismaz vienu derīgu piemēru.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
A	x	x	x	x	x	x	x
M	x	x	x	x	x		
I			x	x	x	x	x
S	x	x				x	x

8. klase

8.1. Doti trīs dažādi reāli skaitļi. Zināms, ka aritmētiskais vidējais no divu mazāko skaitļu aritmētiskā vidējā un divu lielāko skaitļu aritmētiskā vidējā ir vienāds ar visu trīs skaitļu aritmētisko vidējo. Pie tam aritmētiskais vidējais no lielākā skaitļa un mazākā skaitļa ir 2024. Nosakiet šo trīs skaitļu summu!
Atrisinājums. Pamatosim, ka atbilde ir 6072. Apzīmēsim dotos skaitļus ar a, b un c. Pie tam tā kā ir mazākais un lielākais skaitlis, tad varam pieņemt, ka $a < b < c$. Pēc dotā mums zināms, ka

$$\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}}{2}=\frac{a+b+c}{3}.$$

Vienkāršojot šo izteiksmi, iegūstam

$$\begin{aligned}\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}}{2}&=\frac{a+b+c}{3},\\ 3\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}\right)&=2(a+b+c),\\ \frac{3}{2}(a+b+b+c)&=2(a+b+c),\\ 3(a+2b+c)&=4(a+b+c),\\ 3a+6b+3c&=4a+4b+4c,\\ 2b&=a+c,\\ b&=\frac{a+c}{2}.\end{aligned}$$

Tātad secinām, ka b ir vienāds ar mazākā un lielākā skaitļa aritmētisko vidējo, jo $a < b < c$. Bet mums zināms, ka aritmētiskais vidējais no lielākā un mazākā skaitļa ir vienāds ar 2024, tāpēc kā atbildi iegūstam

$$a+b+c=a+c+b=2\cdot\left(\frac{a+c}{2}\right)+b=2\cdot\left(\frac{a+c}{2}\right)+\frac{a+c}{2}=2\cdot 2024+2024=3\cdot 2024=6072.$$

8.2. Pa apli patvaļīgā secībā sarakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 10. Pamatot, ka noteikti var atrast tādus trīs secīgus skaitļus, kuru summa būs vismaz 17
Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, tas ir, pieņemsim, ka katru 3 secīgu skaitļu summa būs mazāka nekā 17. Ievērosim, ka kopā var izveidot 10 šādas summas, jo katrs skaitlis ap apli būs pirmais saskaitāmais kādā summā tieši vienu reizi. Tātad visu summu kopsumma nepārsniegs 160 (lielākā iespējamā summa ir 16). No otras puses visu summu kopsumma iekļauj katru skaitli trīs reizes, tāpēc summu kopsummai jābūt tieši $3\cdot(1+2+3+\cdots+9+10)=3\cdot 55=165$. Iegūstam pretrunu, jo pēc mūsu pieņēmuma summu kopsumma nepārsniedz 160. Tātad vismaz vienai summai jābūt lielākai nekā 16.

8.3. Trīs burvji rituālā spēj pārveidot skaitļus, bet katrs no burvjiem prot tikai vienu burvestību:

- pirmais burvis spēj atņemt no jebkura skaitļa 1;
- otrais burvis spēj izdalīt jebkuru skaitli ar 2;
- trešais burvis spēj reizināt jebkuru skaitli ar 3.

Lai pārveidotu skaitli, burvji var pielietot savas burvestības jebkurā secībā, pat izlaižot citus burvjus. Bet katrs burvis savu burvestību katrā rituālā drīkst izmantot tikai 5 reizes, un starprezultātam jābūt veselam skaitlim, kas nepārsniedz 9. Vai burvji rituālā no skaitļiem $3, 8, 9, 2, 4$ var iegūt **a)** $3, 3, 3, 3, 3$; **b)** $5, 5, 5, 5, 5$?

Atrisinājums. **a)** Jā, burvji var iegūt šos skaitļus, ja (jebkurā secībā) pielieto sekojošās burvestības:

$$3$$
$$8 \xmapsto{:2} 4 \xmapsto{-1} 3$$
$$9 \xmapsto{-1} 8 \xmapsto{:2} 4 \xmapsto{-1} 3$$
$$2 \xmapsto{\cdot 3} 6 \xmapsto{:2} 3$$
$$4 \xmapsto{-1} 3$$

Ievērojam, ka neviena burvestība netika izmantota vairāk par 5 reizēm un katrs starprezultāts nebija lielāks par 9.

b) Pamatosim, ka prasīto burvji nevar paveikt. Lai iegūtu skaitli 5, pirms burvestības skaitlis var būt vai nu 6 (pirmais burvis atņem 1), vai 10 (otrais burvis izdala ar 2). Bet tā kā 10 ir lielāks nekā 9, tad vienīgā iespēja ir, ka rituālā pirms iegūst gala skaitli, pirmais burvis pielieto savu burvestību uz visiem skaitļiem, tas ir, rituālam jābeidzas sekojoši:

$$\cdots 6 \xmapsto{-1} 5$$
$$\cdots 6 \xmapsto{-1} 5$$
$$\cdots 6 \xmapsto{-1} 5$$
$$\cdots 6 \xmapsto{-1} 5$$
$$\cdots 6 \xmapsto{-1} 5$$

Ievērosim, ka pirmais burvis ir iztērējis visas savas burvestības šajā solī, jo bija nepieciešams pielietot viņa burvestību 5 reizes. Tātad vienīgais veids, kā iegūt skaitli 6, ir trešajam burvim pareizinot skaitli 2 ar 3, jo otrajam burvim būtu jādarbojas ar skaitli, kas būtu lielāks par 9, tas ir, 12. Iegūstam sekojošās rituāla beigas:

$$\cdots 2 \xmapsto{\cdot 3} 6 \xmapsto{-1} 5$$
$$\cdots 2 \xmapsto{\cdot 3} 6 \xmapsto{-1} 5$$
$$\cdots 2 \xmapsto{\cdot 3} 6 \xmapsto{-1} 5$$
$$\cdots 2 \xmapsto{\cdot 3} 6 \xmapsto{-1} 5$$
$$\cdots 2 \xmapsto{\cdot 3} 6 \xmapsto{-1} 5$$

Līdzīgi secinām, ka trešais burvis būs iztērējis visas savas burvestības. Šobrīd vienīgās burvestības, kas ir palikušas pāri, ir otrā burvja burvestības. Tas nozīmē, ka, piemēram, skaitlis 9 būtu jādala ar 2 līdz iegūstam 2, bet 9 ir nepāra skaitlis, tāpēc dalījums būs nevesels skaitlis, un, turpinot to dalīt, rezultāts arī būs nevesels. Tātad nevaram no 9 iegūt 2, lai rituālā sasniegtu prasīto skaitļu kombināciju.

8.4. Uz riņķa līnijas ar centru O ir atlikti punkti A, B un C tā, lai punkts O atrastos trijstūrī ABC. Pie tam zināms, ka $\sphericalangle AOC = \alpha$, bet $\sphericalangle OAB = \beta$. Izteikt leņķi $\sphericalangle BCO$ ar α un β!

Atrisinājums. Ievērosim, ka trijstūris AOC ir vienādsānu, jo $AO = CO$ kā riņķa līnijas rādiusi. Ņemot vērā, ka vienādsānu trijstūrim pamata leņķi ir vienādi un ka trijstūrī leņķu summa ir $180°$, iegūstam, ka

$$\sphericalangle CAO = \sphericalangle OCA = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

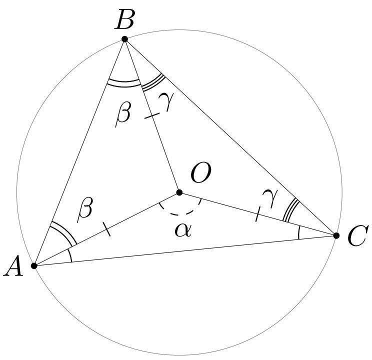
Līdzīgi varam spriest arī par vienādsānu trijstūri ABO ($AO{=}BO$ kā riņķa līnijas rādiusi) un iegūt, ka $\sphericalangle ABO = \beta$. Apzīmēsim $\sphericalangle BCO$ ar γ. Tā kā trijstūris BOC ir vienādsānu (BO un CO ir vienādi kā riņķa līnijas rādiusi), tad $\sphericalangle BCO = \sphericalangle OBC = \gamma$. Ņemot vērā, ka trijstūra ABC iekšējā leņķu summa ir $180°$, iegūstam (skatīt 11. att.), ka

$$90° - \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\alpha}{2} + \beta + \beta + \gamma + \gamma = 180°$$

jeb

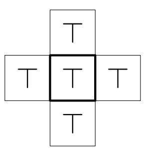
$$2\gamma = 180° - 180° + \alpha - 2\beta \implies \gamma = \frac{a}{2} - \beta.$$

Secinām, ka $\sphericalangle OBC = \frac{\alpha}{2} - \beta$.

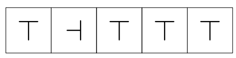


11. att.

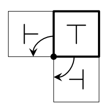
8.5. Dotas piecas smagas kastes un tās izkārtotas, kā tas redzams 12. att. Šīs kastes var pārvietot tikai pagriežot par 90 grādiem ap kādu no kastes stūriem. Kastes nav iespējams pārvietot citām kastēm virsū. Pēc vairākiem šādiem pārvietojumiem šīs kastes tika izkārtotas, kā tas redzams 13. att. Kuras no šīm kastēm varēja sākotnēji atrasties 12. att. izkārtojuma centrā? Piemēru, kā kasti var pārvietot ap vienu stūri divos dažādos veidos skatīt 14. att.



12. att.



13. att.



14. att.

Atrisinājums. Pamatosim, ka sākotnējā izkārtojumā centrā varēja atrasties tikai ceturtā kaste. Iztēlosimies, ka kastes pilnībā atrodas uz šaha galdiņa izkārtojuma flīzēm, kuru izmēri sakrīt ar katras kastes izmēriem. Tādā gadījumā varam uzskatīt, ka sākotnējā izkārtojumā centrālā kaste atrodas uz baltas flīzes, bet apkārtējās uz melnām flīzēm. Katru reizi, kad pārbīdām kasti, tā atradīsies uz pretējas krāsas flīzes. Varam ievērot, ka rezultējošajā izkārtojumā četras no kastēm tika pārbīdītas pāri skaits reižu, jo to simboli atrodas tādā pašā orientācijā kā sākumā. Tas nozīmē, ka šīs kastes atrodas uz tādām pašām

krāsu flīzēm kā sākotnējā izkārtojumā. Tā kā 3., 4. un 5. kaste atrodas viena otrai blakus, tad vismaz viena no tām atrodas uz baltas flīzes. Varētu gadīties, ka gan 3., gan 5. kastes atrodas uz baltas flīzes, bet tas nav iespējams, jo sākotnēji tikai viena kaste atradās uz baltas flīzes, bet 3., 4. un 5. kaste atrodas uz flīzes, kuras krāsa sakrīt ar sākotnējā izkārtojuma flīzes krāsu. Tātad 4. kaste atrodas uz baltas flīzes un tās flīzes krāsa nav mainījusies. Secinām, ka šī ir tieši tā kaste, kas sākotnēji atradās centrā.
Lai iegūtu prasīto sakārtojumu no sākotnējā, tad vispirms kasti, kas atrodas virspusē, pārvietojam pa kreisi līdz tā atrodas vienā rindā ar vidējām kastēm, un visbeidzot apakšējo kasti arī pārbīdām pa kreisi līdz tā atrodas vienā rindā ar visām kastēm. Šādi centra kaste atrodas 4. pēc kārtas, kā tas prasīts.

9. klase

9.1. Doti reāli skaitļi a un b, kuriem
$$\frac{a}{a^2-5}=\frac{b}{5-b^2}=\frac{ab}{a^2b^2-5}.$$
Kāda var būt izteiksmes a^4+b^4 vērtība, ja papildus zināms, ka $a+b\neq 0$?
Atrisinājums. Vienādojot saucējus pirmajai vienādībai, iegūstam
$$\begin{aligned}a(5-b^2)&=b(a^2-5),\\5a-ab^2&=a^2b-5b,\\5a+5b&=a^2b+ab^2,\\5(a+b)&=ab(a+b),\\5&=ab,\end{aligned}$$
balstoties uz to, ka $a+b\neq 0$. Tātad iegūstam, ka
$$\frac{a}{a^2-5}=\frac{b}{5-b^2}=\frac{ab}{a^2b^2-5}=\frac{5}{25-5}=\frac{1}{4}.$$
No šī tad secinām, ka $4a=a^2-5$ jeb $a^2-4a-5=0$. Pēc Vjeta teorēmas šim ir divi atrisinājumi $a_1=-1$ un $a_2=5$. Tā kā $ab=5$, tad attiecīgi saistītās b vērtības ir $b_1=-5$ un $b_2=1$. Šīs arī ir tās saknes, ko iegūst no dotās sakarības, tas ir, $4b=5-b^2$. Abos gadījumos iegūstam, ka $a^4+b^4=5^4+1^4=625+1=626$.

9.2. Katrs no 28 klases skolēniem kontroldarbā saņēma atzīmi, kas ir vesels skaitlis robežās no 0 līdz 10 ballēm. Pamatot, ka vai nu vismaz 4 skolēniem ir vienāda atzīme, vai arī vismaz 4 skolēni ieguva atzīmi, kas ir augstāka nekā 7.
1. atrisinājums. Izveidosim 9 dažādas grupas. Pirmās astoņas grupas atbilst katrai atzīmei no 0 līdz 7, bet devītā grupa atzīmēm 8, 9 un 10. Skolēnus piekārtosim grupai, kas atbilst katra saņemtajai kontroldarba atzīmei. Tā kā mums ir doti 28 skolēni un 9 dažādas grupas, tad pēc Dirihlē principa būs viena grupa, kura saturēs vismaz 4 skolēnus. Ja tā ir viena no pirmajām astoņām grupām, tad tas atbilst tam, ka 4 skolēniem ir vienāda atzīme. Ja devītā grupa satur vismaz 4 skolēnus, tad tas atbilst tam, ka vismaz 4 skolēni ieguva atzīmi, kas ir augstāka nekā 7.
2. atrisinājums. Sagrupēsim skolēnus divās grupās. Pirmajā grupā ietilpst tie skolēni, kas saņēma kādu atzīmi no kopas $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, un otrajā tie, kas saņēma kādu atzīmi no kopas $\{8,9,10\}$. Pieņemsim, ka nav vismaz 4 skolēni, kas ieguva atzīmi, kas ir augstāka nekā 7. Tas nozīmē, ka otrajā grupā ir ne vairāk kā 3 skolēni. Tātad pirmajā grupā ir vismaz 25 skolēni. Tā kā pirmajā grupā ir 8 iespējamas vērtības, kurām piekārtoti vismaz 25 skolēni, tad pēc Dirihlē principa varam secināt, ka vismaz 4 skolēniem būs vienāda atzīme. Pretējā gadījumā, ja ir vismaz 4 skolēni, kas ieguva atzīmi, kas ir augstāka nekā 7, tad arī izpildās uzdevuma nosacījumi. Secinām, ka vienmēr atradīsies vai nu vismaz 4 skolēni ar vienādu atzīmi, vai arī 4 skolēni, kas ieguva atzīmi, kas ir augstāka nekā 7.

9.3. Uz tāfeles uzrakstīti trīs skaitļi: $11, 12, 13$. Vienā gājienā Agnese var izvēlēties vienu no skaitļiem, to nodzēst un tā vietā uzrakstīt skaitli, ko iegūst no divkāršotas abu pārējo skaitļu summas atņemot izvēlēto skaitli. Vai, atkārtojot šādus gājienus, Agnese var panākt to, ka uz tāfeles ir uzrakstīti skaitļi $20, 24, 25$??

Atrisinājums. Pamatosim, ka Agnese nevar panākt to, ka uz tāfeles ir uzrakstīti skaitļi $20, 24, 25$. Katrā gājienā izvēlēto skaitli apzīmēsim ar c, bet pārējos divus ar a un b. Izvēlētais skaitlis c katrā gājienā tiek aizstāts ar $2(a+b)-c$. Sākotnēji uz tāfeles ir viens pāra un divi nepāra skaitļi. Šķirosim gadījumus, kad c ir attiecīgi pāra vai nepāra skaitlis. Pāra un nepāra skaitļu apzīmējumiem attiecīgi izmantosim P un N.

Ja $c = P$, tad $2(a+b)-c = P-P = P$. Pāra skaitlis tiek aizvietots ar pāra skaitli.

Ja $c = N$, tad $2(a+b)-c = P-N = N$. Nepāra skaitlis tiek aizvietots ar nepāra skaitli.

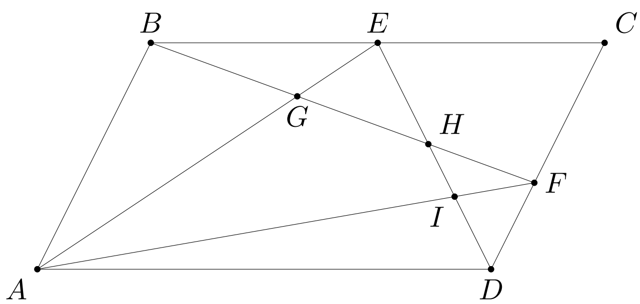
Tātad vienmēr uz tāfeles skaitļu paritāte saglabāsies, tas ir, uz tāfeles vienmēr būs uzrakstīts 1 pāra skaitlis un 2 nepāra skaitļi. Bet prasīts iegūt 20, 24 un 25, kas ir 2 pāra skaitļi un 1 nepāra skaitlis. Iegūstam pretrunu, tāpēc prasītais nav iespējams.

9.4. Uz paralelograma $ABCD$ malām BC un CD atzīmēti attiecīgi punkti E un F. Nogriežņu AE un BF krustpunkts ir G, nogriežņu AF un ED krustpunkts ir I, bet BF un ED krustpunkts ir H. Pamatot, ka $S_{AGHI} = S_{BEG} + S_{CEHF} + S_{DFI}$.

Atrisinājums. Ievērosim, ka $S_{AED} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, jo trijstūra AED mala AD sakrīt ar paralelograma malu un arī to attiecīgie augstumi sakrīt. Līdzīgi spriežot, varam secināt, ka $S_{FBC} + S_{DAF} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, jo abu šo trijstūru pamatu summa, tas ir, $DF + FC$ sakrīt ar paralelograma malu DC un augstumi trijstūrī pret šīm malām sakrīt ar paralelograma augstumu. Tātad iegūstam, ka $S_{AED} = S_{FBC} + S_{DAF}$, bet $S_{AED} = S_{AGHI} + S_{GEH} + S_{AID}$, $S_{FBC} = S_{BEG} + S_{GEH} + S_{CEHF}$ un $S_{DAF} = S_{AID} + S_{DFI}$ (skatīt 15. att.). Apvienojot šīs izteiksmes, iegūstam, ka

$$S_{AGHI} + S_{GEH} + S_{AID} = S_{BEG} + S_{GEH} + S_{CEHF} + S_{AID} + S_{DFI},$$
$$S_{AGHI} = S_{BEG} + S_{CEHF} + S_{DFI},$$

kas arī ir prasītā vienādība.



15. att.

9.5. Ingai ir tālrunis ar šādu pogu izkārtojumu:

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

Viņas draudzenes Zanes deviņciparu tālruņa numuram ir šādas īpašības:

- visi Zanes tālruņa numura cipari ir atšķirīgi;
- pirmie četri cipari ir sakārtoti augošā secībā un to attiecīgo pogu centri veido kvadrātu;
- pēdējo četru ciparu pogu centri arī veido kvadrātu;
- Zanes tālruņa numurs dalās ar 15.

Cik ir tādu deviņciparu tālruņa numuru, kas varētu būt Zanes tālruņa numurs?

Atrisinājums. Pamatosim, ka atbilde ir 12 dažādi skaitļi. Vispirms uzrakstīsim visas pogas, kuru centri veido kvadrātu:

$$\begin{array}{ll} 1,2,4,5, & 1,3,7,9, \\ 4,5,7,8, & 2,4,6,8, \\ 2,3,5,6, & 0,5,7,9. \\ 5,6,7,8, & \end{array}$$

Taču ievērojam, ka mēs nevaram izmantot nevienu no kvadrātiem, kas atrodas kreisajā kolonnā, jo tad tā cipari atkārtotos ar kādu no cita kvadrāta. Tā kā numuram jādalās ar 15, tad pēdējie četri cipari noteikti būs $0,5,7,9$, jo skaitlim jādalās ar 5. To secību noskaidrosim vēlāk. Tā kā mēs jau esam izmantojuši skaitļus 7 un 9, tad pirmajiem četriem cipariem jābūt $2,4,6,8$ tieši šādā secībā, jo tie ir sakārtoti augoši. Vienīgie atlikušie cipari, kas varētu atrasties tālruņa vidū, ir 1 un 3. Tā kā numuram ir jādalās ar 3 (tas dalās ar 15), tad visu ciparu summai ir jādalās ar 3. Iegūstam, ka $2+4+6+8+x+0+5+7+9=41+x$ jādalās ar 3, kur x ir 1 vai 3. Tātad vienīgā iespēja ir tad, ja $x=1$. Esam ieguvuši, ka Zanes numurs ir izskatā

$$24681****,$$

kur pēdējie 4 cipari ir kāds no skaitļiem $0,5,7,9$. Tā kā numuram ir jādalās ar 5, tad pēdējais cipars var būt 0 vai 5. Tātad pēdējam ciparam ir divas opcijas. Pirmspēdējam ciparam nav šādu ierobežojumu, tāpēc tas var būt jebkurš no atlikušajiem 3 cipariem, tāpēc tam ir trīs opcijas. Simtu pozīcijā arī varam ielikt jebkuru no atlikušajiem cipariem, tāpēc iegūstam divas opcijas. Atlikušo skaitli tad liekam tūkstošu pozīcijā. Kopumā mums ir $2\cdot 3\cdot 2\cdot 1=12$ dažādi veidi, kā iegūt tālruņa numuru, kam izpildās īpašības, kas piemīt Zanes tālruņa numuram.

10. klase

10.1. Atrast visus naturālos skaitļus m un n, kuriem $m^3n+m+n=mn+2mn^2$.

Atrisinājums. Pārrakstīsim izteiksmi kā $m=mn+2mn^2-m^3n-n$. Tā kā vienādojuma labā puse dalās ar n, tad arī kreisā puse dalās ar n, tātad m dalās ar n. Analoģiski, pārveidojot vienādojumu par $m=mn+2mn^2-m^3n-m$, iegūstam, ka n dalās ar m. Tā kā abi šie skaitļi ir naturāli, tad iegūstam, ka $n=m$. Vienkāršojot sākotnējo izteiksmi attiecībā pret vienu mainīgo, iegūstam $n^4+2n=n^2+2n^3$ jeb $n(n^3-2n^2-n+2)=0$. Tā kā n ir naturāls, tad jābūt, ka $n^3-2n^2-n+2=0$ jeb $n(n^2-2n-1)=-2$. Tas nozīmē, ka -2 dalās ar n. Tātad n var būt tikai 1 vai 2, un varam ievērot, ka abas šīs vērtības apmierina vienādojumu. Secinām, ka ir divi atrisinājuma pāri: $m=n=1$ un $m=n=2$.

10.2. Doti 15 trīsciparu skaitļi. Pamatot, ka no šiem skaitļiem var atrast vai nu divus tādus, kuru ciparu summa sakrīt, vai arī divus tādus, kuru ciparu summu summa ir vienāda ar 28.

Atrisinājums. Mazākā iespējamā trīsciparu skaitļa ciparu summa ir 1, kas atbilst skaitlim 100, bet lielākā ciparu summa ir 27, kas atbilst 999. Izveidosim 14 dažādas kopas: $\{1;27\},\{2;26\},\ldots,\{13;15\},\{14\}$. Trīsciparu skaitli piekārtosim kopai, ja šī kopa satur skaitli, kas ir vienāds ar trīsciparu skaitļa ciparu summu. Ievērosim to, ka, ja divi trīsciparu skaitļi ir piekārtoti vienai un tai pašai kopai, tad vai nu šo abu skaitļu ciparu summa sakrīt, vai arī to ciparu summu summa būs vienāda ar 28. Tā kā mums ir doti 15 trīsciparu skaitļi, bet ir tikai 14 dažādas kopas, tad pēc Dirihlē principa jābūt vismaz vienai kopai, kurai būs piekārtoti vismaz 2 trīsciparu skaitļi. Šie skaitļi būs tie, kas apmierina uzdevumā prasīto.

10.3. Anniņa uz tāfeles uzrakstīja n dažādus naturālus skaitļus un katram uzrakstīto skaitļu pārim aprēķināja to summu. Apskatot šīs summas, izrādījās, ka katrs cipars no 0 līdz 9 parādās vismaz vienā no summām kā pēdējais cipars. Kāda ir mazākā iespējamā n vērtība?

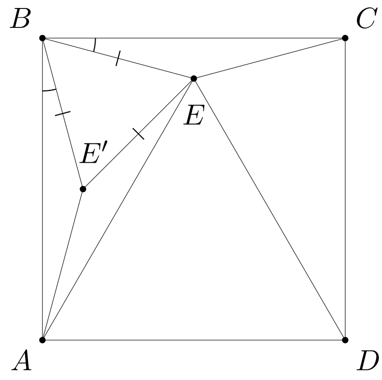
Atrisinājums. Pamatosim, ka mazākais n ir 6. Tā kā visi cipari no 0 līdz 9 parādās vismaz vienā no summām kā pēdējais cipars, tad jābūt vismaz 10 pāriem. Ja uz tāfeles ir uzrakstīti n skaitļi, tad pāru skaits būs $\frac{n(n-1)}{2}$. Šis skaitlis būs vismaz 10, ja $n \geq 5$. Ja uz tāfeles būtu uzrakstīti 5 skaitļi, tad katrs skaitlis piedalītos 4 pāru summās, tāpēc visu pāru summa būtu pāra skaitlis. No otras puses tā kā ir tikai 10 pāri, un katrs cipars no 0 līdz 9 parādās kādā summā kā pēdējais cipars, tad visu pāru summas pēdējais cipars būtu 5, jo 0+1+2+...+9 =45. Tātad iegūstam pretrunu. Ja uz tāfeles uzraksta skaitļus 1, 2, 3, 4, 5 un 6, tad iegūstam prasīto īpašību, ka visi cipari no 0 līdz 9 parādās kādā no pāru summām kā pēdējais cipars.

10.4. Kvadrāta $ABCD$ iekšienē atlikts punkts E tā, ka $\sphericalangle CBE = 15°$ un $AE = ED$. Pamatot, ka trijstūris AED ir vienādmalu.

Atrisinājums. Atzīmēsim punktu E' kvadrāta $ABCD$ iekšienē, lai $\triangle BEC = \triangle AE'B$ (skatīt 16. att.). Tādā gadījumā $\sphericalangle E'BE = 60°$, jo $\sphericalangle CBE = \sphericalangle ABE' = 15°$ un $\sphericalangle B = 90°$. Bet tā kā $\triangle BEC = \triangle AE'B$, tad trijstūris $E'BE$ ir regulārs, jo $BE' = BE$. Tātad iegūstam, ka $E'E = AE$ jeb $\triangle AE'E$ ir vienādsānu. Pie tam

$$\sphericalangle AE'E = 360° - \sphericalangle BE'E - \sphericalangle BE'A = 360° - 60° - 150° = 150° = \sphericalangle BE'A.$$

Tātad $\triangle BE'A = \triangle EE'A$ pēc pazīmes mlm. Iegūstam, ka $AE = BA = AD$ jeb to, ka trijstūris AED ir regulārs.



16. att.

10.5. Jānītis ir apmaldījies mežā ar laukumu S kvadrātkilometri. Par mežu zināms tikai tas, ka tas atrodas plaknē un tajā nav caurumu. Pamatot, ka eksistē tāda stratēģija, kuras maršruts nav garāks kā $2\sqrt{\pi S}$ kilometri, ar kuru Jānītis vienmēr var izkļūt no meža (Jānītis nezina ne meža formu, ne savu sākotnējo atrašanās vietu tajā).

Atrisinājums. Pamatosim, ka, ja Jānītis ies pa riņķa līniju, kuras garums ir $2\sqrt{\pi S}$ kilometri, tad viņš vienmēr izkļūs no meža. Šāds riņķa līnijas garums ir riņķim ar rādiusu $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ kilometri. Pieņemsim pretējo, tas ir, pieņemsim, ka Jānītis ar šo stratēģiju nekad nesasniegs meža robežu. Tādā gadījumā nostaigātā riņķa līnija atbilst riņķim ar laukumu $\pi\left(\sqrt{\frac{S}{\pi}}\right)^2 = S$ kvadrātkilometri. Tā kā mežam nav caurumu, tad tas nozīmē, ka mežs ar laukumu S kvadrātkilometri satur pilnībā riņķi ar laukumu S kvadrātkilometri. Iegūstam pretrunu ar to, ka riņķa līnija nešķērso meža robežu.

11. klase

11.1. Dots trijstūris, kura malu garumi ir a, b un c. Pierādīt, ka ir spēkā nevienādība

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ac}{a^2+c^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3.$$

Atrisinājums. Pierādīsim, ka katrs saskaitāmais nevienādība ir lielāks nekā 1. Tā kā a, b un c ir trijstūra malas garumi, tad pēc trijstūra nevienādības mums zināms, ka $a+b>c$ jeb $a>(c-b)$. Kāpinot abas puses kvadrātā, iegūstam, ka $a^2>(c-b)^2$. Pārkārtojot izteiksmes saskaitāmos, iegūstam, ka

$$\begin{aligned}a^2&>(c-b)^2,\\a^2&>c^2-2bc+b^2,\\a^2+2bc&>b^2+c^2,\\\frac{a^2+2bc}{a^2+b^2}&>1.\end{aligned}$$

Līdzīgas nevienādības iegūstam, ja apskatām trijstūra nevienādības $b+c>a$ un $c+b>a$. Saskaitot šīs trīs nevienādības, iegūsim uzdevumā prasīto.

11.2. Šaha festivālā piedalījās 95 dalībnieki. Zināms, ka festivāla laikā katrs dalībnieks izspēlēja ne vairāk kā 10 partijas, pie tam, katrs zaudēja vismaz vienā partijā. Katrā partijā uzvarētājs saņēma vienu punktu, zaudētājs 0 punktus, bet, ja partija beidzās neizšķirti, tad abi spēlētāji saņēma puspunktu. Vai var droši apgalvot, ka festivāla beigās bija vismaz **a)** 5; **b)** 6 dalībnieki ar vienādu punktu skaitu?

Atrisinājums. Mazākais iespējamais iegūtais punktu skaits ir 0, bet lielākais ir 9, tātad dalībnieka punktu skaits var pieņemt 19 vērtības $\left(0,\frac{1}{2},1,1\frac{1}{2},2,2\frac{1}{2},\ldots,8\frac{1}{2},9\right)$.

a) Jā. Pieņemsim pretējo, ka katrs iespējamais punktu skaits ir ne vairāk kā 4 dalībniekiem, tad kopā festivālā varēja piedalīties ne vairāk kā $4\cdot 19=76$ dalībnieki – pretruna.

b) Jā. Pieņemsim pretējo, ka katrs iespējamais punktu skaits ir ne vairāk kā 5 dalībniekiem. Tā kā dots, ka dalībnieku skaits ir 95, tad vienīgais veids, kā tos sadalīt 19 grupās pēc iegūto punktu skaita, lai katrā grupā būtu ne vairāk kā 5 dalībnieki, ir katrā grupā ielikt tieši 5 dalībniekus. Bet šādā gadījumā dalībnieku kopējā iegūtā punktu summa būtu $5\cdot\left(0+\frac{1}{2}+1+1\frac{1}{2}+\ldots+8\frac{1}{2}+9\right)=427\frac{1}{2}$, kas nav iespējams, jo kopējai punktu summai jābūt veselam skaitlim (tā kā katrā partijā tiek izspēlēts tieši viens punkts).

11.3. Uz tāfeles uzrakstīts četrciparu skaitlis, kuram neviens cipars nav nulle. Zināms, ka, ja nodzēš jebkuru tā ciparu, tad atlikušais trīsciparu skaitlis nedalās ar 3. Pierādīt, ka var nodzēst divus tā ciparus tā, ka atlikušais divciparu skaitlis dalās ar 3.

Atrisinājums. Tā kā skaitlis dalās ar 3 tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 3, tad visus spriedumus varam izteikt nevis par skaitļiem, bet par attiecīgo skaitļu ciparu summu. Apzīmēsim uz tāfeles uzrakstīto skaitli ar $\overline{abcd}$. Aplūkosim, kādi var būt atlikumi, a, b, c un d, dalot ar 3.

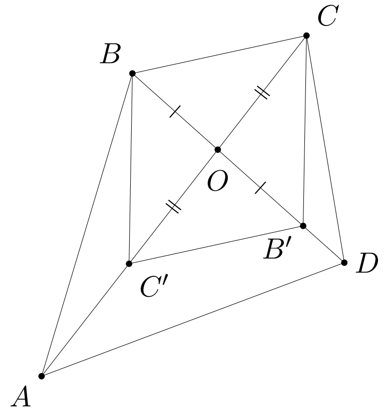
Vispirms ievērosim, ka starp šiem četriem skaitļiem nav iespējams atrast visus trīs atlikumus - 0, 1 un 2. Ja varētu, tad attiecīgie trīs cipari veidotu trīsciparu skaitli, kas dalās ar 3, jo to atlikumu summa būtu $0+1+2=3$, bet zināms, ka neviens no trīsciparu skaitļiem, kas izveidojas nodzēšot kādu no cipariem, nedalās ar 3.

Līdzīgi varam spriest, ka starp šiem četriem skaitļiem nav iespējams atrast trīs, kuriem būtu vienāds atlikums, dalot ar 3. Ja varētu, tad attiecīgie trīs cipari veidotu trīsciparu skaitli, kas dalās ar 3.

Tātad ir divi skaitļu pāri, kur katrā pārī ir skaitļi, kas dod vienādu atlikumu, dalot ar 3 (norādīti atlikumi): a) $0,0,1,1$; b) $0,0,2,2$ vai c) $1,1,2,2$. Variantos a) un b) izvēlamies tos divus skaitļus, kas, dalot ar 3, atlikumā dod 0, bet variantā c) izvēlamies vienu skaitli, kas dod atlikumu 1, bet otru, kas dod atlikumu 2. Tādējādi visos gadījumos esam izveidojuši divciparu skaitli, kas dalās ar 3.

11.4. Izliekta četrstūra diagonāles sadala to četros trijstūros ar vienādiem perimetriem. Pamatot, ka šis četrstūris ir rombs.

Atrisinājums. Vispirms pamatosim, ka šim četrstūrim diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm. Diagonāļu krustpunktu atzīmēsim ar O. Pieņemsim pretējo, tas ir, ka diagonāles nedalās uz pusēm krustpunktā. Tātad, nezaudējot vispārību, pieņemsim, ka $CO \leq AO$ un $BO \leq DO$. Atliksim punktus C' un B' attiecīgi uz nogriežņiem CA un BD, lai $CO = OC'$ un $BO = OD$ (skatīt 17. att.). Šādi esam izveidojuši paralelogramu $BCB'C'$.



17. att.

Pēc dotā mums zināms, ka $P_{BOC} = P_{AOD}$. Bet pēc konstrukcijas arī $P_{BOC} = P_{B'OC'}$. Tātad iegūstam, ka $P_{B'OC'} = P_{AOD}$ jeb

$$B'C' + OC' + OB' = AD + AO + DO = AD + OC' + C'A + OB' + B'D.$$

No šī varam secināt, ka $B'C' = AD + C'A + B'D$. Ja $C'A > 0$ un $B'D > 0$, tad, atkārtoti pielietojot trijstūra nevienādību, iegūstam:

$$AD + C'A + B'D > C'D + B'D > B'C',$$

bet tas ir pretrunā ar iepriekš secināto, ka $B'C' = AD + C'A + B'D$. Tātad secinām, ka $AC' = DB' = 0$ jeb $CO = AO$ un $BO = DO$. Iegūstam, ka dotajam četrstūrim diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm. Tātad četrstūris $ABCD$ ir paralelograms.

Lai pamatotu, ka $ABCD$ ir rombs, atliek parādīt, ka paralelograma $ABCD$ blakusesošās malas ir vienāda garuma, tas ir, ka $AB = BC$. Pēc dotā mums ir zināms, ka $P_{ABO} = P_{BOC}$ jeb $AB + BO + AO = BC + BO + CO$. Tā kā $ABCD$ ir paralelograms, tad $AO = CO$ un varam secināt, ka $AB = BC$ jeb četrstūris $ABCD$ ir rombs.

11.5. Pie apaļa galda sasēdušies vairāki hameleoni. Katrs hameleons var nokrāsoties vai nu sarkans, vai zaļš. Ik pēc minūtes tie hameleoni, kuru abi kaimiņi ir dažādās krāsās, maina savu krāsu. Vai noteikti (neatkarīgi no hameleonu sākotnējā krāsojuma) pienāks tāds brīdis, kad visu hameleonu krāsa sakritīs ar sākotnējo, ja pie galda sēž **a)** 6; **b)** 7 hameleoni?

Atrisinājums. a) Nē, ne vienmēr. Ja pie galda apsēdušies hameleoni, kuru krāsas secīgi ir: sarkans, zaļš, zaļš, sarkans, zaļš, zaļš, tad nākošajā minūtē visi hameleoni būs sarkani. Tātad no šī brīža hameleoni var būt tikai sarkani, un hameleonu krāsojumu kombinācija vairs nevar sakrist ar sākotnējo.

b) Pamatosim, ka šāds brīdis vienmēr iestāsies. Apzīmēsim sarkanās krāsas hameleonus ar vieniniekiem, bet zaļās krāsas hameleonus – ar nullēm. Par krāsojumu kombināciju nosauksim šiem numuriem atbilstošo hameleonu krāsu virkni, piemēram, “$0, 0, 1, 0, 1, 1, 1$” jeb “zaļš, zaļš, sarkans, zaļš, sarkans, sarkans, sarkans”. Ievērosim, ka kopā iespējamas $2^7 = 128$ krāsojumu kombinācijas. Tādā gadījumā katra hameleona krāsu nākošajā solī varam izteikt kā kongruenču vienādojumu. Ja hameleona abi kaimiņi ir vienā krāsā, tad to summa būs 0 pēc moduļa 2. Līdzīgi, ja abi kaimiņi ir pretējās krāsās, tad to summa ir vienāda ar 1 pēc moduļa 2. Tātad attiecīgi hameleona krāsa (skaitlis pēc moduļa 2) nemainās, ja abi kaimiņi ir vienādā krāsā (pieskaita 0), bet mainās uz pretējo, ja abi kaimiņi ir dažādās krāsās (pieskaita 1).

Vispirms pierādīsim, ka no divām dažādām krāsojumu kombinācijām nākamajā minūtē nevar iegūt vienu un to pašu krāsojumu kombināciju. Pieņemsim pretējo, ka ir divi tādi hameleonu krāsojumi $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ un $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7$, no kuriem pēc pārkrāsošanās tiek iegūts viens un tas pats krāsojums $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$. Tad no pārkrāsošanas likumiem varam uzrakstīt vienādojumus:

$$\begin{aligned}
z_1 &\equiv x_7 + x_1 + x_2 \equiv y_7 + y_1 + y_2 \pmod 2,\\
z_2 &\equiv x_1 + x_2 + x_3 \equiv y_1 + y_2 + y_3 \pmod 2,\\
z_3 &\equiv x_2 + x_3 + x_4 \equiv y_2 + y_3 + y_4 \pmod 2,\\
z_4 &\equiv x_3 + x_4 + x_5 \equiv y_3 + y_4 + y_5 \pmod 2,\\
z_5 &\equiv x_4 + x_5 + x_6 \equiv y_4 + y_5 + y_6 \pmod 2,\\
z_6 &\equiv x_5 + x_6 + x_7 \equiv y_5 + y_6 + y_7 \pmod 2,\\
z_7 &\equiv x_6 + x_7 + x_1 \equiv y_6 + y_7 + y_1 \pmod 2.
\end{aligned}$$

Saskaitot visus vienādojumus kopā, mēs iegūstam

$$3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \equiv 3(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7) \pmod 2.$$

Bet tā kā vienādojums tiek apskatīts pēc moduļa 2, tad

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \equiv y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 \pmod 2.$$

No šī kongruenču vienādojuma abām pusēm atņemot $x_2 + x_3 + x_4 \equiv y_2 + y_3 + y_4 \pmod 2$ un arī $x_5 + x_6 + x_7 \equiv y_5 + y_6 + y_7 \pmod 2$, rezultātā iegūstam, ka $x_1 \equiv y_1 \pmod 2$.

Līdzīgi varam arī iegūt, ka atlikušie hameleoni ir nokrāsoti vienādi, tas ir,

$$\begin{aligned}
x_2 &\equiv y_2 \pmod 2, & x_5 &\equiv y_5 \pmod 2,\\
x_3 &\equiv y_3 \pmod 2, & x_6 &\equiv y_6 \pmod 2,\\
x_4 &\equiv y_4 \pmod 2, & x_7 &\equiv y_7 \pmod 2.
\end{aligned}$$

Tātad secinām, ka abi sākotnējie krāsojumi sakrīt jeb esam ieguvuši pretrunu ar to, ka ir divas dažādas krāsojumu kombinācijas, kuras pēc pārkrāsošanās noved pie viena un tā paša krāsojuma.

Apzīmēsim hameleonu krāsojumu kombināciju i-tajā minūtē ar k_i un aplūkosim virkni $k_1, k_2, k_3, \ldots$. Mūsu mērķis ir pierādīt, ka eksistē tāds $m > 1$, ka $k_1 = k_m$. Tā kā krāsojumu kombināciju skaits ir galīgs (128), tad šajā virknē kāds loceklis noteikti atkārtosies. Aplūkosim pirmo locekli šajā virknē, kas atkārtojas, apzīmēsim to ar k_m, bet to, ar kuru tas sakrīt, apzīmēsim ar k_i, tas ir, mums ir zināms, ka $k_i = k_m$, kur $i < m$.

Pieņemsim pretējo, ka $i > 1$, tas ir, to, ka virkne neatkātojas ar sākotnējo krāsojumu kombināciju. Tādā gadījumā krāsojumu kombināciju k_i, var iegūt gan no krāsojumu kombinācijas k_{i-1}, gan no krāsojuma kombinācijas k_{m-1}. Bet tā ir pretruna ar iepriekš pierādīto, ka no divām dažādām krāsojumu kombinācijām nevar iegūt vienu un to pašu rezultāta krāsojuma kombināciju.

12. klase

12.1. Dots trijstūris, kura malu garumi ir a, b un c. Pamatot, ka ir spēkā nevienādība

$$a+b+c>\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Atrisinājums. Tā kā a, b un c un ir trijstūra malas garumi, tad zināms, ka ir spēkā trijstūra nevienādība, tas ir, $a+b>c$. Pie tam abām, pusēm pieskaitot c, iegūstam $a+b+c>2c$. Ja abas nevienādības puses pareizina ar c, tad iegūstam nevienādību $c(a+b+c)>2c^2$. Līdzīgi rīkojoties, varam iegūt arī nevienādības $a(a+b+c)>2a^2$ un $b(a+b+c)>2b^2$, ja attiecīgi sākam ar $b+c>a$ un $a+c>b$. Saskaitot visas trīs nevienādības, iegūsim

$$(a+b+c)(a+b+c)>2(a^2+b^2+c^2)$$

jeb

$$(a+b+c)^2>2(a^2+b^2+c^2).$$

Tā kā abās nevienādības pusēs ir pozitīvas izteiksmes, tad varam vilkt kvadrātsakni, iegūstot

$$|a+b+c|>\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Bet mums zināms, ka a, b un c ir pozitīvi skaitļi, jo tie veido trijstūra malu garumus, tāpēc iegūstam prasīto nevienādību

$$a+b+c>\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

12.2. Šaha festivālā piedalījās 64 dalībnieki. Zināms, ka festivāla laikā katrs dalībnieks izspēlēja tieši 12 partijas, neviens neuzvarēja visās 12 partijās, bet katrs uzvarēja vismaz vienā partijā. Katrā partijā uzvarētājs saņēma vienu punktu, zaudētājs 0 punktus, bet, ja partija beidzās neizšķirti, tad abi spēlētāji saņēma puspunktu. Vai var droši apgalvot, ka festivāla beigās bija vismaz **a)** 3; **b)** 4 dalībnieki ar vienādu punktu skaitu?

Atrisinājums. Mazākais iespējamais iegūtais punktu skaits ir 1, bet lielākais ir $11\frac{1}{2}$, tātad dalībnieka punktu skaits var pieņemt 22 vērtības $\left(1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, ..., 11, 11\frac{1}{2}\right)$.

a) Jā. Pieņemsim pretējo, ka katrs iespējamais punktu skaits ir ne vairāk kā 2 dalībniekiem, tad kopā festivālā varēja piedalīties ne vairāk kā $2\cdot 22=44$ dalībnieki – pretruna.

b) Jā. Pieņemsim pretējo, ka katrs iespējamais punktu skaits ir ne vairāk kā 3 dalībniekiem. Tā kā dots, ka dalībnieku skaits ir 64, tad tiešas pretrunas ar Dirihlē principu nav, mums varētu būt pat $22\cdot 3=66$ dalībnieki. Pretruna šeit ir nedaudz sarežģītāka un balstās uz to, ka, ja katrā grupā ieliek 3 dalībniekus, tad dalībnieku kopējais punktu skaits sanāk "nobīdīts uz augšu" (jo mums iztrūkst grupa, kas ieguvusi $\frac{1}{2}$ punktu).

Aplūkosim dalībnieku kopējo iegūto punktu summu. No vienas puses katrs no 64 dalībniekiem izspēlēja 12 partijas, tātad kopējais izspēlēto partiju skaits ir $\frac{64\cdot 12}{2}=384$. Tā kā katrā partijā kopā tika izspēlēts viens punkts, tad visi dalībnieki kopā ir ieguvuši tieši 384 punktus.

No otras puses zinām, ka katrā iespējamajā punktu grupā bija ne vairāk kā 3 dalībnieki. Ja mēs tos saliekam pa grupām tā, lai to kopējā punktu summa būtu mazākā iespējamā (acīmredzami, ka, lai to izdarītu, katrā no 21 mazākajām grupām jāliek 3 dalībnieki, bet lielākajā $11\frac{1}{2}$ punktu grupā 1 dalībnieks), tad iegūstam, ka mazākā iespējamā dalībnieku kopējā punktu summa ir $3\cdot 1+3\cdot 1\frac{1}{2}+3\cdot 2+3\cdot 2\frac{1}{2}+...+3\cdot 11+1\cdot 11\frac{1}{2}=389\frac{1}{2}$ – pretruna.

12.3. Uz tāfeles uzrakstīti vairāki veseli skaitļi, kuru kubu summa ir 2024. Vai var gadīties, ka šo skaitļu summa ir **a)** 24; **b)** 26?

Atrisinājums. a) Pamatosim, ka šis nav iespējams. Ja mums ir dots, ka $2024=x_1^3+x_2^3+\cdots+x_k^3$, kur x_i ir veseli skaitļi, tad šīs summas atlikums, dalot ar 6, ir vienāds 2. Ievērosim, ka $n^3\equiv n \pmod 6$:

$n \pmod 6$	0	1	2	3	4	5
$n^3 \pmod 6$	0	1	2	3	4	5

Tātad iegūstam, ka

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_k^3 \equiv x_1 + x_2 + \cdots + x_k \equiv 2024 \equiv 2 \pmod 6.$$

Tā kā 24 dalās ar 6, tad secinām, ka prasītais nav iespējams.

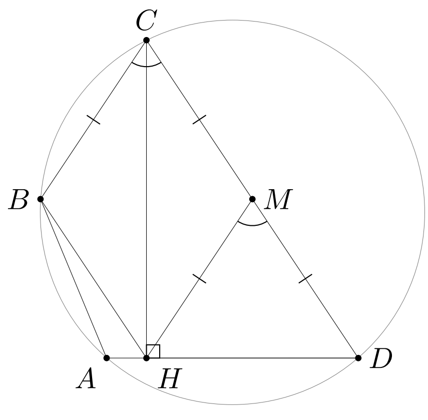
b) Jā, var. Piemēram, $2024 = 10^3 + 10^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3$ un $26 = 10 + 10 + 2 + 2 + 2$.

12.4. Riņķa līnijā ievilkts četrstūris $ABCD$, kuram $\sphericalangle BAD = 2\sphericalangle ADC$ un $CD = 2BC$. Uz malas AD atlikts punkts H tā, lai $\sphericalangle DHC = 90°$. Pamatot, ka $BH \parallel CD$.

Atrisinājums. Uz malas CD atliksim viduspunktu M. Tādā gadījumā HM ir taisnleņķa trijstūra mediāna, kas novilkta pret hipotenūzu CD, tāpēc $HM = DM = CM = BC$. Pie tam, tā kā $\triangle HMD$ ir vienādsānu (skatīt 18. att.) un $ABCD$ ir ievilkts četrstūris, iegūstam

$$\sphericalangle HMD = 180° - 2\sphericalangle ADC = 180° - \sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD.$$

Tātad varam secināt, ka $BC \parallel MH$, jo $\sphericalangle BCD = \sphericalangle HMD$ kā kāpšļu leņķi. Secinām, ka četrstūris $BCMH$ ir paralelograms, jo divas tā pretējās malas (BC un BH) ir paralēlas un vienāda garuma. Tas nozīmē, ka $BH \parallel CD$, kas arī bija jāpierāda.



18. att.

12.5. Jānītis ir apmaldījies izliekta daudzstūra formas mežā ar laukumu S kvadrātkilometri. Pamatot, ka eksistē tāda stratēģija, kuras maršruts nav garāks kā $\sqrt{2\pi S}$ kilometri, ar kuru Jānītis vienmēr var izkļūt no meža (Jānītis nezina ne meža formu, ne savu sākotnējo atrašanās vietu tajā).

Atrisinājums. Pamatosim, ka Jānītis var izkļūt no meža, ejot pa loku, kas atbilst pusei no riņķa līnijas ar rādiusu $\sqrt{\frac{2S}{\pi}}$ kilometri. Šī pusriņķa loka garums ir $\frac{2\pi\sqrt{\frac{2S}{\pi}}}{2} = \sqrt{2\pi S}$ kilometri. Pieņemsim pretējo, ka Jānītis neizkļūst no meža, sekojot šai līnijai. Tātad šī līnija nekad nepieskaras meža robežai. Tā kā mežam ir izliekta daudzstūra forma, tad pusriņķis, kas atbilst noietajam lokam, noteikti iekļaujas mežā pilnībā. Lai šo saskatītu atliek pārliecināties, ka meža robeža nevar iet cauri pusriņķa iekšienei. Bet tā kā pusriņķa līnija iekļaujas mežā, tad kāda no potenciālajām meža virsotnēm pusriņķa iekšpusē būtu ar iekšējo leņķi, kas pārsniedz 180°, jeb meža forma vairs nebūtu izliekts daudzstūris. Tā kā šī pusriņķa laukums ir $\pi\left(\sqrt{2S}\right)^2 = S$ kvadrātkilometri, tad iegūstam, ka mežs satur sevī figūru, kuras laukums ir vienāds ar pašu mežu. Iegūstam pretrunu. Tātad pieņēmums, ka šī līnija nepieskaras meža robežai, ir bijis aplams.