

Atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

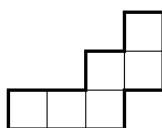
- 5.1.** Režģa (skatīt 1. att.) katrā rūtiņā ieraksti vienu ciparu no 1 līdz 5. Katrā rindā un katrā kolonnā jābūt ierakstītiem visiem skaitļiem no 1 līdz 5. Katrā ar tumšu līniju atdalītajā figūrā, kas satur divas vai trīs rūtiņas, ir dots skaitlis un darbību zīme. Ar šīs figūras rūtiņās ierakstītajiem skaitļiem, veicot doto darbību, jāiegūst dotais skaitlis. Pietiek parādīt vienu piemēru, kā to izdarīt. Trijās ar tumšu līniju apvilktajās rūtiņās skaitļi jau ir ierakstīti.

Piemēram, augšējā kreisā stūra figūrā “2−” nozīmē, ka abu ierakstīto skaitļu starpība (no lielākā atņemot mazāko) ir 2.

3	40·			3+
2−		3−		
8·	1	12+		
	2:		5	10+
	1−			

1. att.

- 5.2.** Kastē ir 7 zaļas, 3 sarkanas, 11 melnas un 9 baltas bumbiņas. Kāds ir mazākais skaits bumbiņu, kas Aleksandram jāizvelk no kastes, lai garantētu, ka viņam: **a)** ir vismaz divas vienādas krāsas bumbiņas; **b)** ir vismaz divas melnas bumbiņas; **c)** ir vismaz viena bumbiņa no katras krāsas?
- 5.3.** Uzraksti 10 izteiksmes, katrai izmantojot četrus skaitļus 3, 5, 7 un 9 katru tieši vienu reizi un trīs aritmētisko darbību zīmes (saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu vai dalīšanu), tā, lai šo izteiksmju vērtības būtu skaitļi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Darbību grupēšanai drīkst izmantot iekavas, skaitļu secību drīkst mainīt. Dalīšanai jāizpildās precīzi bez noapaļošanas. Katram skaitlim pietiek atrast vienu derīgu izteiksmi. Derīgas izteiksmes piemērs: $7 \cdot (9 - 5) - 3 = 25$.
- 5.4.** Dots 7×9 rūtiņu taisnstūris. Vai tajā var ievietot deviņas 2. att. redzamās figūras? Figūras drīkst pagriezt un apmest otrādi, bet tās nevar pārklāties viena ar otru vai iziet ārpus taisnstūra.



2. att.

- 5.5.** Andris aizmirsa mājās pulksteni. Autobusa pieturā viņš pamanīja stāvam 4 cilvēkus. Katram no tiem Andris pajautāja: “Sakiet, cik ir pulkstenis?”. Atbildes bija šādas:

A: “Bez 6 minūtēm trīs.”

C: “3 minūtes pāri trijiem.”

B: “Bez 3 minūtēm trīs.”

D: “2 minūtes pāri trijiem.”

Izrādījās, ka nevienam no šiem cilvēkiem pulkstenis nerāda pareizu laiku. Pie tam, viena pulksteņa rādītais laiks atšķiras no patiesā laika par 2 minūtēm, otrā - par 3 minūtēm, trešā - par 4 minūtēm, ceturtā - par 5 minūtēm (nav zināms, kurš pulkstenis kavējas, kurš steidzas). Cik patiesībā bija pulkstenis? Atbildi pamato!

Atklātā matemātikas olimpiāde

6. klase

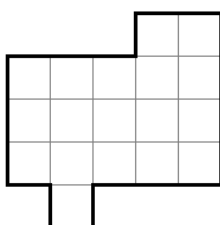
- 6.1.** Režģa (skatīt 1. att.) katrā rūtiņā ieraksti vienu ciparu no 1 līdz 6. Katrā rindā un katrā kolonnā jābūt ierakstītiem visiem skaitļiem no 1 līdz 6. Katrā ar tumšu līniju atdalītajā figūrā, kas satur divas vai trīs rūtiņas, ir dots skaitlis un darbību zīme. Ar šīs figūras rūtiņās ierakstītajiem skaitļiem, veicot doto darbību, jāiegūst dotais skaitlis. Pietiek parādīt vienu piemēru, kā to izdarīt. Vienā ar tumšu līniju apvilktajā rūtiņā skaitlis jau ir ierakstīts.

Piemēram, augšējā kreisā stūra figūrā “4–” nozīmē, ka abu ierakstīto skaitļu starpība (no lielākā atņemot mazāko) ir 4.

2:	4–	1–	11+		2:
			2:		
3+	3	60·	11+		
			2–	2:	1–
20·	2:	8+			
				5+	

1. att.

- 6.2.** Kastē ir 14 violetas, 18 brūnas, 4 oranžas un 19 dzeltenas bumbiņas. Anna no kastes izvilka 9 bumbiņas.
- Vai var apgalvot, ka tieši piecas no izvilktajām bumbiņām ir dzeltenas?
 - Vai Anna noteikti izvilka vismaz trīs vienādas krāsas bumbiņas?
 - Kāds mazākais skaits bumbiņu Annai vēl ir jāizvelk no kastes, lai varētu apgalvot, ka kopumā Annai vismaz sešas no bumbiņām ir vienā krāsā?
- 6.3.** Katrs no 10 rūķiņiem vienmēr saka patiesību vai vienmēr melo. Zināms, ka katram no rūķiņiem ir viena mīļākā saldējuma garša – vaniļas, šokolādes vai zemeņu. Sniegbaltīte lūdza pacelt roku tiem rūķiem, kam mīļākais ir vaniļas saldējums, un astoņi rūķiņi pacēla savu roku. Tad viņa prasīja par šokolādes saldējumu un puse pacēla savu roku. Kad jautāja par zemeņu saldējumu, tikai viens rūķītis pacēla savu roku. Cik no šiem rūķiem vienmēr saka patiesību?
- 6.4.** Parādi, kā griežot pa rūtiņu līnijām, 2. att. doto figūru var sagriezt divās vienādās daļās. Daļas ir vienādas, ja tās pagriežot vai apmetot otrādi var uzlikt vienu uz otras tā, ka tās sakrīt.



2. att.

- 6.5.** Caurspīdīgā kastē ir ieliktas konfektes un četriem bērniem jāizsaka savs minējums par konfekšu skaitu tajā. Katrs piedāvā savu minējumu: 116, 124, 120 un 128. Izrādās, neviens nav uzminējis pareizi. Noskaidrojiet, cik konfekšu var būt kastē, ja zināms, ka no patiesā konfekšu skaita viens no skolēniem kļūdījās par vienu, viens — par trīs, viens — par pieci un viens — par deviņi.



Atklātā matemātikas olimpiāde

7. klase

- 7.1.** Marta, Sandris un Linda vēlas sagatavot pulciņa telpu Ziemassvētku ballītei. Zināms, ka Marta viena pati to spētu izdarīt vienā stundā, Sandris to spētu pusotrā stundā, bet Linda to spētu izdarīt trīs stundās. Marta ieradās pulciņa telpā 16:00, Sandris 10 minūtēs vēlāk, bet Linda vēl 15 minūtes pēc Sandra (katrs pēc ierašanās uzreiz ķērās pie pulciņa telpas gatavošanas). Cikos pulciņa telpa bija gatava?
- 7.2.** Jurgis Miķeļdienas tirgū ar izlozes palīdzību izdalīja 11 balvas. Katra balva satur 6 rudens labumus: ābolus, bumbierus un bietes. Pie tam zināms, ka katra balva satur vismaz vienu ābolu, bumbieri un bieti. Pamatot, ka noteikti tika izdalītas divas tādas balvas, kurām bija vienāds saturs.
- 7.3.** Skaitļu virknes pirmais loceklis ir 12. Katru nākamo iegūst iepriekšējo vai nu reizinot ar 2 vai 3, vai arī izdalot ar 2 vai 3 (ja tas dalās bez atlikuma). Vai šīs skaitļu virknes 61. loceklis var būt skaitlis 54?
- 7.4.** Dots kvadrāts ar izmēriem 10×10 rūtiņas. Kāds ir lielākais skaits 1. att. redzamo figūru, kuras var izgriezt no šī kvadrāta, ja griezumam līnijām jāiet pa rūtiņu līnijām? Figūras drīkst būt pagrieztas.



1. att.

- 7.5.** Anita, Maija, Ināra un Sandra uzstājās koncertā. Katru dziesmu dziedāja 3 meitenes. Cik dziesmu meitenes nodziedāja pavisam, ja Anita dziedāja 7 dziesmas (vairāk nekā jebkura cita meitene), bet Sandra dziedāja 4 dziesmas (mazāk nekā jebkura cita meitene)?



Atklātā matemātikas olimpiāde

8. klase

8.1. Doti trīs dažādi reāli skaitļi. Zināms, ka aritmētiskais vidējais no divu mazāko skaitļu aritmētiskā vidējā un divu lielāko skaitļu aritmētiskā vidējā ir vienāds ar visu trīs skaitļu aritmētisko vidējo. Pie tam aritmētiskais vidējais no lielākā skaitļa un mazākā skaitļa ir 2024. Nosakiet šo trīs skaitļu summu!

8.2. Pa apli patvaļīgā secībā sarakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 10. Pamatot, ka noteikti var atrast tādus trīs secīgus skaitļus, kuru summa būs vismaz 17.

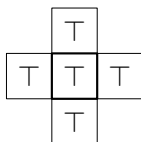
8.3. Trīs burvji rituālā spēj pārveidot skaitļus, bet katrs no burvjiem prot tikai vienu burvestību:

- pirmais burvis spēj atņemt no jebkura skaitļa 1;
- otrais burvis spēj izdalīt jebkuru skaitli ar 2;
- trešais burvis spēj reizināt jebkuru skaitli ar 3.

Lai pārveidotu skaitli, burvji var pielietot savas burvestības jebkurā secībā, pat izlaižot citus burvjus. Bet katrs burvis savu burvestību katrā rituālā drīkst izmantot tikai 5 reizes, un starprezultātam jābūt veselam skaitlim, kas nepārsniedz 9. Vai burvji rituālā no skaitļiem 3, 8, 9, 2, 4 var iegūt a) 3, 3, 3, 3, 3; b) 5, 5, 5, 5, 5?

8.4. Uz riņķa līnijas ar centru O ir atlikti punkti A, B un C tā, lai punkts O atrastos trijstūrī ABC . Pie tam zināms, ka $\angle AOC = \alpha$, bet $\angle OAB = \beta$. Izteikt leņķi $\angle BCO$ ar α un β !

8.5. Dotas piecas smagas kastes un tās izkārtotas, kā tas redzams 1. att. Šīs kastes var pārvietot tikai pagriežot par 90 grādiem ap kādu no kastes stūriem. Kastes nav iespējams pārvietot citām kastēm virsū. Pēc vairākiem šādiem pārvietojumiem šīs kastes tika izkārtotas, kā tas redzams 2. att. Kuras no šīm kastēm varēja sākotnēji atrasties 1. att. izkārtojuma centrā? Piemēru, kā kasti var pārvietot ap vienu stūri divos dažādos veidos skatīt 3. att.



1. att.



2. att.



3. att.



Atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase

9.1. Doti reāli skaitļi a un b , kuriem

$$\frac{a}{a^2 - 5} = \frac{b}{5 - b^2} = \frac{ab}{a^2 b^2 - 5}.$$

Kāda var būt izteiksmes $a^4 + b^4$ vērtība, ja papildus zināms, ka $a + b \neq 0$?

9.2. Katrs no 28 klases skolēniem kontroldarbā saņēma atzīmi, kas ir vesels skaitlis robežās robežās no 0 līdz 10 ballēm. Pamatot, ka vai nu vismaz 4 skolēniem ir vienāda atzīme, vai arī vismaz 4 skolēni ieguva atzīmi, kas ir augstāka nekā 7.

9.3. Uz tāfeles uzrakstīti trīs skaitļi: 11, 12, 13. Vienā gājienā Agnese var izvēlēties vienu no skaitļiem, to no-
dzēst un tā vietā uzrakstīt skaitli, ko iegūst no divkāršotas abu pārējo skaitļu summas atņemot izvēlēto
skaitli. Vai, atkārtojot šādus gājienu, Agnese var panākt to, ka uz tāfeles ir uzrakstīti skaitļi 20, 24, 25?

9.4. Uz paralelograma $ABCD$ malām BC un CD atzīmēti attiecīgi punkti E un F . Nogriežņu AE un BF
krustpunkts ir G , nogriežņu AF un ED krustpunkts ir I , bet BF un ED krustpunkts ir H . Pamatot,
ka $S_{AGHI} = S_{BEG} + S_{CEHF} + S_{DFI}$.

9.5. Ingai ir tālrunis ar šādu pogu izkārtojumu:

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

Viņas draudzenes Zanes deviņciparu tālruņa numuram ir šādas īpašības:

- visi Zanes tālruņa numura cipari ir atšķirīgi;
- pirmie četri cipari ir sakārtoti augošā secībā un to attiecīgo pogu centri veido kvadrātu;
- pēdējo četru ciparu pogu centri arī veido kvadrātu;
- Zanes tālruņa numurs dalās ar 15.

Cik ir tādu deviņciparu tālruņa numuru, kas varētu būt Zanes tālruņa numurs?



Atklātā matemātikas olimpiāde

10. klase

- 10.1.** Atrast visus naturālos skaitļus m un n , kuriem $m^3n + m + n = mn + 2mn^2$.
- 10.2.** Doti 15 trīsciparu skaitļi. Pamatot, ka no šiem skaitļiem var atrast vai nu divus tādus, kuru ciparu summa sakrīt, vai arī divus tādus, kuru ciparu summu summa ir vienāda ar 28.
- 10.3.** Anna uz tāfeles uzrakstīja n dažādus naturālus skaitļus un katram uzrakstīto skaitļu pārim aprēķināja to summu. Apskatot šīs summas, izrādījās, ka katrs cipars no 0 līdz 9 parādās vismaz vienā no summām kā pēdējais cipars. Kāda ir mazākā iespējamā n vērtība?
- 10.4.** Kvadrāta $ABCD$ iekšienē atlikts punkts E tā, ka $\angle CBE = 15^\circ$ un $AE = ED$. Pamatot, ka trijstūris AED ir vienādmalu.
- 10.5.** Jānītis ir apmaldījies mežā ar laukumu S kvadrātkilometri. Par mežu zināms tikai tas, ka tas atrodas plaknē un tajā nav caurumu. Pamatot, ka eksistē tāda stratēģija, kuras maršruts nav garāks kā $2\sqrt{\pi S}$ kilometri, ar kuru Jānītis vienmēr var izklūt no meža (Jānītis nezina ne meža formu, ne savu sākotnējo atrašanās vietu tajā).



Atklātā matemātikas olimpiāde

11. klase

11.1. Dots trijstūris, kura malu garumi ir a, b un c . Pierādīt, ka ir spēkā nevienādība

$$\frac{a^2 + 2bc}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + 2ac}{a^2 + c^2} + \frac{c^2 + 2ab}{a^2 + b^2} > 3.$$

11.2. Šaha festivālā piedalījās 95 dalībnieki. Zināms, ka festivāla laikā katrs dalībnieks izspēlēja ne vairāk kā 10 partijas, pie tam, katrs zaudēja vismaz vienā partijā. Katrā partijā uzvarētājs saņēma vienu punktu, zaudētājs 0 punktus, bet, ja partija beidzās neizšķirti, tad abi spēlētāji saņēma puspunktu. Vai var droši apgalvot, ka festivāla beigās bija vismaz **a)** 5; **b)** 6 dalībnieki ar vienādu punktu skaitu?

11.3. Uz tāfeles uzrakstīts četrsciparu skaitlis, kuram neviens cipars nav nulle. Zināms, ka, ja nodzēš jebkuru tā ciparu, tad atlikušais trīsciparu skaitlis nedalās ar 3. Pierādīt, ka var nodzēst divus tā ciparus tā, ka atlikušais divciparu skaitlis dalās ar 3.

11.4. Izliekta četrstūra diagonāles sadala to četros trijstūros ar vienādiem perimetriem. Pamatot, ka šis četrstūris ir rombs.

11.5. Pie apaļa galda sēdējušies vairāki hameleoni. Katrs hameleons var nokrāsoties vai nu sarkans, vai zaļš. Ik pēc minūtes tie hameleoni, kuru abi kaimiņi ir dažādās krāsās, maina savu krāsu. Vai noteikti (neatkarīgi no hameleonu sākotnējā krāsojuma) pienāks tāds brīdis, kad visu hameleonu krāsa sakrītīs ar sākotnējo, ja pie galda sēž **a)** 6; **b)** 7 hameleoni?



Atklātā matemātikas olimpiāde

12. klase

12.1. Dots trijstūris, kura malu garumi ir a, b un c . Pamatot, ka ir spēkā nevienādība

$$a + b + c > \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

12.2. Šaha festivālā piedalījās 64 dalībnieki. Zināms, ka festivāla laikā katrs dalībnieks izspēlēja tieši 12 partijas, neviens neuzvarēja visās 12 partijās, bet katrs uzvarēja vismaz vienā partijā. Katrā partijā uzvarētājs saņēma vienu punktu, zaudētājs 0 punktus, bet, ja partija beidzās neizšķirti, tad abi spēlētāji saņēma puspunktu. Vai var droši apgalvot, ka festivāla beigās bija vismaz **a) 3; b) 4** dalībnieki ar vienādu punktu skaitu?

12.3. Uz tāfeles uzrakstīti vairāki veseli skaitļi, kuru kubu summa ir 2024. Vai var gadīties, ka šo skaitļu summa ir **a) 24; b) 26**?

12.4. Riņķa līnijā ievilkts četrstūris $ABCD$, kuram $\angle BAD = 2\angle ADC$ un $CD = 2BC$. Uz malas AD atlikts punkts H tā, lai $\angle DHC = 90^\circ$. Pamatot, ka $BH \parallel CD$.

12.5. Jānītis ir apmaldījies izliekta daudzstūra formas mežā ar laukumu S kvadrātkilometri. Pamatot, ka eksistē tāda stratēģija, kuras maršruts nav garāks kā $\sqrt{2\pi S}$ kilometri, ar kuru Jānītis vienmēr var izkļūt no meža (Jānītis nezina ne meža formu, ne savu sākotnējo atrašanās vietu tajā).