

# DIRIHLĒ PRINCIPS

*Teorija un piemēri, gatavojoties Atklātajai matemātikas olimpiādei 2024./2025. m. g.*

Apskatīsim pavisam vienkāršu uzdevumu.

*Pēterim ir 3 truši un 2 būri. Vieni truši atrodas būros. Vai noteikti kādā no šiem būriem ir vismaz divi truši?*

Uz šo jautājumu jūs visticamāk uzreiz atbildēsiet: "Nu, protams!" Ja šāda būra nebūtu, tad Pēterim katrā būrī būtu ne vairāk kā viens trusis. Tātad abos būros kopā būtu ne vairāk kā divi truši, bet Pēterim ir 3 truši. Līdz ar to noteikti ir tāds būris, kurā atrodas vismaz divi truši.

Ja Pēterim būtu 4 truši un 3 būri, vai arī tad noteikti būtu tāds būris, kurā atrodas vismaz divi truši? Bet, ja nu Pēterim būtu  $(n + 1)$  trusis un  $n$  būri?

Atbilde, spriežot līdžīgi, atkal būs apstiprinoša.

**1. teorēma (Dirihlē princips).** Ja vairāk nekā  $n$  objekti jāsadala  $n$  grupās, tad noteikti būs tāda grupa, kurā atradīsies vismaz 2 objekti.

*Pierādījums.* Pieņemsim pretējo, ka nevienā grupā nav vairāk kā viens objekts. Tā kā grupu pavisam ir  $n$ , tad kopā nav izvietoti vairāk kā  $n$  objekti, bet grupās ir jāsadala vairāk nekā  $n$  objekti. Tātad pieņēmums ir aplams un noteikti ir grupa, kurā ir vairāk nekā viens, tas ir, vismaz 2 objekti, kas arī bija jāpierāda.

Bieži vien Dirihlē principu formulē šādā veidā:

Ja vairāk nekā  $n$  truši jāizvieto  $n$  būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vairāk nekā viens (tātad vismaz 2) truši.

Lietojot Dirihlē principu uzdevumu risināšanā, galvenais ir izdomāt, kas katrā uzdevumā būs "būri" un kas – "truši". Uzdevumu risinājumā var gan atsaukties uz Dirihlē principu, gan arī atrisinājumu veidot, piemēram, līdžīgi kā pierādot 1. teorēmu. Abi šādi risinājumi ir pareizi (skat., piem., nākamo uzdevumu).

## Uzdevumu piemēri

- Pulciņā ir 13 skolēni. Pierādīt, ka no tiem var atrast tādus divus, kas dzimuši vienā un tajā pašā mēnesī!
  - atrisinājums.** Ja katrā mēnesī būtu dzimis ne vairāk kā viens skolēns, tad visos mēnešos kopā būtu dzimuši ne vairāk kā 12 skolēnu, bet pulciņā ir 13 skolēni. Tātad noteikti ir tāds mēnesis, kurā dzimuši vismaz divi no šī pulciņa skolēniem.
  - atrisinājums.** Šajā uzdevumā 13 skolēni ir jāsadala 12 grupās (mēnešos). Pēc Dirihlē principa noteikti būs mēnesis, kurā ir dzimuši vismaz divi skolēni, kas arī bija jāpierāda.
- Doti naturāli skaitļi no 1 līdz 8. Pierādīt, ka, izvēloties jebkurus piecus no tiem, varēs atrast tādus divus, kuru summa ir 9.
  - atrisinājums.** Jebkurš no pieciem izvēlētajiem skaitļiem ietilpst vienā no šādām grupām (grupas veidotas no skaitļiem, kuru summa ir 9): „1 un 8”; „2 un 7”; „3 un 6”; „4 un 5”. Ja katrā grupā būtu ne vairāk kā viens skaitlis, tad visās grupās kopā būtu ne vairāk kā četri skaitļi, bet ir jāizvēlas pieci skaitļi, tātad noteikti ir tāda grupa, kurā ir divi skaitļi, un šo skaitļu summa ir 9.
  - atrisinājums.** Jebkurš no pieciem izvēlētajiem skaitļiem ietilpst vienā no šādiem četriem "būriem": „1 un 8”; „2 un 7”; „3 un 6”; „4 un 5”. Tāpēc pēc Dirihlē principa vismaz vienā būrī nonāks vismaz 2 "truši" jeb 2 skaitļi, kuru summa ir deviņi.
- Izliekta 100-stūra virsotnes kaut kādā secībā sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 100, katra virsotne ar citu skaitli. Katrai malai aprēķina tās galu numuru starpību (no lielākā skaitļa atņem mazāko). Pierādīt, ka vismaz divām malām šīs starpības ir vienādas!

**Atrisinājums.** Ir iespējamās tikai 99 dažādas starpības: 1; 2; ...; 99; tie ir „būri”. Ir 100 malas, kam aprēķinātas starpības; tie ir „truši”. Pēc Dirihlē principa vismaz vienā būrī būs vismaz 2 truši jeb vismaz divām malām šīs starpības ir vienādas.

4. Sniegbaltīte uzdāvināja katram no 7 rūķīšiem pa 5 konfektēm: „Vāverīti”, „Margrietiņu” un „Lācīti”, pie tam katrs rūķītis saņēma vismaz vienu katra veida konfekti. Pierādīt, ka ir divi tādi rūķīši, kam viņa uzdāvināja vienādus konfekšu komplektus!

**Atrisinājums.** Ievērojām, ka skaitli 5 var izteikt kā trīs naturālu skaitļu summu tikai divos veidos:  $3 + 1 + 1$  un  $2 + 2 + 1$  (ja nav būtiska saskaitāmo secība). Taču, ņemot vērā arī to, kura no konfektēm pirmajā gadījumā dāvināta 3 eksemplāros un kura no konfektēm otrajā gadījumā – vienā eksemplārā, iegūstam 6 dažādas iespējas:

“Vāverīte”	3	1	1	1	2	2
“Margrietiņa”	1	3	1	2	1	2
“Lācītis”	1	1	3	2	2	1

Tā kā ir 7 rūķīši un 6 dažādas iespējas, kā uzdāvināt konfektes, tad pēc Dirihlē principa noteikti ir tādi divi rūķīši, kam Sniegbaltīte uzdāvināja vienādus konfekšu komplektus.

5. Taisne nokrāsota 10 dažādās krāsās. Pierādīt, ka uz tās var atrast divus punktus, kas nokrāsoti vienā krāsā un starp kuriem attālums centimetros ir vesels skaitlis!

**Atrisinājums.** Izvēlamies uz taisnes 11 punktus tā, lai attālums starp katriem diviem no tiem būtu vesels skaitlis. Tā kā ir izvēlēti 11 punkti un ir 10 dažādas krāsas, tad pēc Dirihlē principa vismaz divi no šiem punktiem ir vienā krāsā.

6. Pierādīt, ka starp jebkuriem sešiem naturāliem skaitļiem, kas nedalās ar 10, var atrast divus tādus, kuru summa vai starpība dalās ar 10.

**Atrisinājums.** Apskatām divus iespējamus gadījumus.

1) Ja starp apskatāmajiem skaitļiem ir divi tādi, kam pēdējie cipari vienādi, tad to starpība dalās ar 10.

2) Ja nav tādu divu skaitļu, kam pēdējie cipari ir vienādi, tad sadalām skaitļus 5 grupās atbilstoši to pēdējiem cipariem: “1 un 9”; “2 un 8”; “3 un 7”; “4 un 6”; “5”. Tā kā ir 6 skaitļi un piecas grupas, tad divi skaitļi noteikti nonāk vienā grupā, to summa dalās ar 10.

7. Pierādīt, ka no jebkuriem astoņiem naturāliem skaitļiem var izvēlēties tādus divus, kuru starpība dalās ar 7.

**Atrisinājums.** Naturāls skaitlis, dalot ar 7, var dot septiņus dažādus atlikumus: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Dotos astoņus skaitļus uzskatīsim par „trušiem”, savukārt vienā „būrī” ievietosim tos skaitļus, kas dod vienādus atlikumus, dalot ar 7, tātad ir 7 „būri”. Pēc Dirihlē principa vismaz vienā „būrī” nonāks vismaz divi „truši” jeb vismaz divi skaitļi dod vienādus atlikumus, dalot ar 7. Šo skaitļu starpība dalās ar 7 (skat. nākamo teorēmu).

**Teorēma par starpības dalīšanos.** Dots, ka  $a$ ,  $b$  un  $n$  – veseli skaitļi, turklāt  $n > 0$ . Starpība  $(a - b)$  dalās ar  $n$  tad un tikai tad, ja  $a$  un  $b$  dod vienādus atlikumus, dalot ar  $n$ .

Apskatīsim vēl vienu uzdevumu par Pēteri un viņa trušiem.

*Pēterim ir 5 truši un 2 būri. Visi truši atrodas būros. Vai noteikti kādā no šiem būriem ir vismaz 3 truši?*

Risināsim šo uzdevumu līdzīgi, kā iepriekšējo uzdevumu par trušiem. Ja šāda būra nebūtu, tad Pēterim katrā būrī būtu ne vairāk kā 2 truši. Tātad abos būros kopā būtu ne vairāk kā 4 truši, bet Pēterim ir 5 truši. Līdz ar to noteikti ir tāds būris, kurā atrodas vismaz 3 truši.

*Un, ja Pēterim būtu 10 truši un 3 būri? Vai mēs varētu apgalvot, ka noteikti ir tāds būris, kurā ir vismaz 4 truši?*

Atbilde atkal ir apstiprinoša. Ja katrā būrī būtu ne vairāk kā 3 truši, tad visos būros kopā būtu izvietoti ne vairāk kā 9 truši, bet Pēterim ir 10 truši. Tātad noteikti ir tāds būris, kurā atrodas vismaz 4 truši.

Šajos piemēros varēja lietot tālāk doto Dirihlē principa vispārinājumu.

**2. teorēma (Dirihlē princips).** Ja vairāk nekā  $m \cdot n$  objekti jāsadala  $n$  grupās, tad noteikti būs grupa, kurā atradīsies vismaz  $(m + 1)$  objekts.

**Pierādījums.** Pieņemsim pretējo, ka nevienā grupā nav vairāk kā  $m$  objekti. Tā kā grupu pavisam ir  $n$ , tad kopā nav izvietoti vairāk kā  $m \cdot n$  objekti, bet grupās ir jāsadala vairāk nekā  $m \cdot n$  objekti. Tātad pieņēmums ir aplams un noteikti ir grupa, kurā ir vairāk nekā  $m$ , tas ir, vismaz  $(m + 1)$  objekts.

## Uzdevumu piemēri

8. Mākslinieku darbnīcā izgatavotas 36 skulptūras, kuru masa ir 490 kg, 495 kg, 500 kg, ..., 665 kg. Vai visas šīs skulptūras var aizvest ar 7 automašīnām, ja katrai no tām kravnesība ir 3 tonnas, ar katru automašīnu drīkst veikt tikai vienu reisu un automašīnas nedrīkst pārslogot?

**1. atrisinājums.** Pamatosim, ka prasītais nav iespējams. Ja katrā no septiņām automašīnām iekrautu ne vairāk kā 5 skulptūras, tad kopā pa visām mašīnām būtu izvietotas ne vairāk kā 35 skulptūras, bet jāizvieto ir 36 skulptūras. Tātad noteikti ir tāda mašīna, kurā būs jāiekrauj vismaz sešas skulptūras. Taču pat sešu vieglāko skulptūru kopējā masa ir  $490 + 495 + 500 + 505 + 510 + 515 = 3015$  kilogrami, tātad ir lielāka par masu, kādu pieļaujams iekraut vienā automašīnā. Tas nozīmē, ka uzdevuma prasības nav izpildāmas.

**2. atrisinājums.** Pamatosim, ka prasītais nav iespējams. Šajā uzdevumā „truši” ir skulptūras, „būri” – automašīnas. Ievērosim, ka  $36 = 7 \cdot 5 + 1$  skulptūras jāsadala pa 7 automašīnām. Tātad pēc Dirihlē principa vismaz vienā automašīnā jāiekrauj vismaz 6 skulptūras. Taču pat sešu vieglāko skulptūru kopējā masa ir  $490 + 495 + 500 + 505 + 510 + 515 = 3015$  kilogrami, tātad ir lielāka par masu, kādu pieļaujams iekraut vienā automašīnā. Tas nozīmē, ka uzdevuma prasības nav izpildāmas.

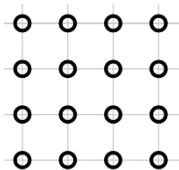
9. Profesora Cipariņa olimpiādē bija 3 uzdevumi. Tajā piedalījās 100 skolēni. Pierādīt, ka atradīsies vismaz 13 skolēni, kas izrēķināja vienus un tos pašus uzdevumus (vai arī neizrēķināja nevienu uzdevumu)! Katrs skolēns katru uzdevumu vai nu izrēķināja, vai neizrēķināja, daļēji risinājumi netika iesniegti.

**Atrisinājums.** No trīs uzdevumiem var izveidot 8 dažādus atrisināto uzdevumu „komplektus” (t.sk., neviens atrisināts uzdevums), tabulā ar “+” atzīmēti tie uzdevumi, kuri ir izrēķināti.

Komplekta nr.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
1. uzdevums		+			+		+	+
2. uzdevums			+		+	+		+
3. uzdevums				+		+	+	+

Ja katru „komplektu” būtu atrisinājuši ne vairāk kā 12 skolēni, tad skolēnu kopējais skaits būtu ne vairāk kā  $12 \cdot 8 = 96 < 100$ . Tātad ir vismaz 13 skolēni, kas atrisinājuši vienus un tos pašus uzdevumus.

10. Rūtiņu virsotnēs atzīmēti 16 balti punkti (skat. 1. att.). Vai tieši septiņus punktus var nokrāsot melnus tā, lai nekādi trīs vienā krāsā nokrāsoti punkti neatrastos uz vienas taisnes?



1. att.

**Atrisinājums.** Nē, to nevar izdarīt. Ja melnā krāsā nokrāsoti tieši septiņi punkti, tad paliek deviņi balti punkti. Tā kā visi punkti izvietoti četrās rindās, tad pēc Dirihlē principa kādā no šīm rindām būs vismaz trīs balti punkti, bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.

11. Maisiņā bija 10 sarkanas, 10 dzeltenas un 10 zaļas lentes. Tautas deju kolektīva astoņas meitenes katra izvēlējās vienu lenti no šī maisiņa.

a) Vai var apgalvot, ka tieši četras meitenes izvēlējās vienādas krāsas lentes?

b) Vai noteikti ir vismaz trīs meitenes, kas izvēlējās vienādas krāsas lentes?

c) Kāds mazākais skaits lenšu būtu jāizņem no maisiņa, lai varētu apgalvot, ka vismaz četras no tām ir vienā krāsā?

### Atrisinājums

- a) Nē, piemēram, varētu gadīties, ka 1 meitene izvēlējas sarkanu lenti, 1 meitene – dzeltenu lenti un 6 meitenes – zaļu lenti.
- b) Jā, noteikti. Ja katras krāsas lenti būtu izvēlējušās ne vairāk kā 2 meitenes, tad kopā būtu ne vairāk kā  $2 \cdot 3 = 6$  meitenes, bet tā ir pretruna ar doto, ka lentes izvēlējas 8 meitenes. Tātad noteikti ir vismaz 3 meitenes, kas izvēlējas vienas krāsas lenti. (Izmantots Dirihlē princips.)
- c) Pamosim, ka mazākais skaits lenšu, kas jāizņem no maisiņa, ir 10, un ka mazāk izņemt nevar. Ar deviņām (vai mazāk) lentēm nepietiktu, jo tad varētu gadīties, ka no katras krāsas ir pa 3 lentēm (vai mazāk). Tātad, ja no maisiņa izņemtu 10 lentes, tad pēc Dirihlē principa noteikti vismaz četras no tām būtu vienā krāsā.

Tālāk dotais materiāls paredzēts galvenokārt 9.-12. klašu skolēniem.

12. Skolas ēdnīcas pusdienu piedāvājumā ir divas dažādas zupas, divi dažādi pamatēdieni un divi dažādi deserti. Pusdienās aizgāja 200 skolēni, no katra ēdienu veida (zupa, pamatēdiens, deserts) katrs skolēns izvēlējas ne vairāk kā vienu ēdienu, pie tam nebija tāda skolēna, kurš neēda vispār neko. Kāds ir lielākais skaits skolēnu, kas noteikti pasūtīja vienu un to pašu?

**Atrisinājums.** Pamosim, ka lielākais skolēnu skaits, kas noteikti pasūtīja vienu un to pašu, ir 8. Ievērojam, ka katra veida ēdienu var vai nu neiekļaut komplektā, vai izvēlēties vienu no diviem tā veidiem, tātad katram ēdiena veidam ir 3 dažādas iespējas. Tā kā katrs skolēns izvēlējas vismaz vienu no piedāvātajiem ēdieniem (neder variants, ka no katra ēdiena veida neizvēlas neko), tad ir iespējams izveidot  $3 \cdot 3 \cdot 3 - 1 = 26$  dažādus pusdienu komplektus. **Ja katru no šiem komplektiem būtu izvēlējušies ne vairāk kā 7 skolēni, tad pusdienās būtu aizgājuši ne vairāk kā  $7 \cdot 26 = 182$  skolēni, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad noteikti ir 8 skolēni, kas pasūtīja vienu un to pašu.** Nevar apgalvot, ka vairāk kā 8 skolēni pasūtīja vienu un to pašu, jo ir iespējams, ka pirmos 18 no 26 dažādajiem pusdienu komplektiem izvēlējas pa 8 skolēniem un atlikušos 8 pusdienu komplektus – pa 7 skolēniem (tas ir,  $18 \cdot 8 + 8 \cdot 7 = 200$ ).

*Piezīme.* Treknrakstā izceltā teksta vietā var būt, piemēram, arī šāds spriedums: tā kā skolēnu skaits ir  $200 = 7 \cdot 26 + 18$ , tad pēc Dirihlē principa noteikti ir 8 skolēni, kas pasūtīja vienu un to pašu.

13. Pierādīt, ka starp jebkuriem 78 trīsciparu skaitļiem var atrast četrus tādus skaitļus, kuru ciparu summas ir vienādas!

**Atrisinājums.** Pavisam iespējamās 27 dažādas ciparu summas vērtības:

Ciparu summa	Trīsciparu skaitļi
1	100
2	101; 110; 200
...	...
26	899; 989; 998
27	999

Ievērojam, ka

- 1) ciparu summa 1 un 27 katra ir tikai vienam skaitlim (100 un 999),
- 2) ciparu summa 2 un 26 katra ir tikai trīs skaitļiem (101; 110; 200 un 899; 989; 998).

Tātad šajās grupās vairāk skaitļu nevar būt neatkarīgi no tā, kurus 78 trīsciparu skaitļus izvēlamies. Pieņemsim, ka šīs četras grupas ir maksimāli piepildītas – tajās kopā ievietoti 8 skaitļi. Tad atlikušajās 23 grupās jāievieto  $78 - 8 = 70$  skaitļi. **Ja katrā no šīm 23 grupām būtu ievietoti ne vairāk kā 3 skaitļi, tad kopā būtu izvietoti ne vairāk kā  $3 \cdot 23 = 69$  skaitļi – pretruna tam, ka pa grupām jāizvieto 70 skaitļi. Līdz ar to noteikti ir tāda grupa, kurā ir vismaz četri skaitļi – tie arī ir meklētie četri skaitļi, kuru ciparu summas ir vienādas.**

*Piezīme.* Treknrakstā izceltā teksta vietā var būt, piemēram, arī šāds spriedums: tā kā  $70 = 3 \cdot 23 + 1$ , tad pēc Dirihlē principa noteikti ir tāda grupa, kurā ir vismaz četri skaitļi – tie arī ir meklētie četri skaitļi, kuru ciparu summas ir vienādas.

14. Sporta zālē trenējas 32 cilvēki, kuri visi ir vismaz 21 gadu veci. Pierādīt, ka no šiem cilvēkiem var atrast divus tādus, kuriem ir vairāk nekā 30 gadi vai 4 tādus, kuru gadu skaits ir vienāds!

1. **atrisinājums.** Pieņemam pretējo tam, kas jāpierāda, tas ir, nav divu cilvēku, kuriem ir vairāk nekā 30 gadi un nav četru cilvēku, kuriem ir vienāds gadu skaits. Sadalām cilvēkus grupās pēc to gadu skaita:  $\{21\}; \{22\}; \{23\}; \dots; \{29\}; \{30\}; \{\text{vairāk nekā } 30\}$ . Tad pirmajās 10 grupās katrā ir ne vairāk kā 3 cilvēki un pēdējā – ne vairāk kā viens cilvēks. Tātad sporta zālē nav vairāk kā  $3 \cdot 10 + 1 = 31$  cilvēks – pretruna. Tātad pieņēmums ir aplams un esam pierādījuši, ka var atrast divus tādus cilvēkus, kuriem ir vairāk nekā 30 gadi vai 4 tādus, kuru gadu skaits ir vienāds.

2. **atrisinājums.** Sadalām cilvēkus grupās pēc to gadu skaita:

$$\{21\}; \{22\}; \{23\}; \dots; \{29\}; \{30\}; \{\text{vairāk nekā } 30\}.$$

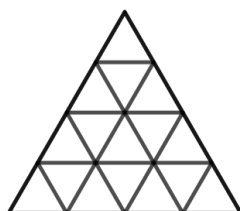
Apskatām divus iespējamus gadījumus.

1) Ja pēdējā grupā ir vismaz divi cilvēki, tad prasītais izpildās.

2) Ja pēdējā grupā ir mazāk nekā divi cilvēki, tad pa atlikušajām 10 grupām jāsadala vismaz 31 cilvēks. Tā kā ir 10 grupas un vismaz  $31 = 3 \cdot 10 + 1$  cilvēks, tad pēc Dirihlē principa kādā no šīm grupām ir vismaz 4 cilvēki, tātad tiem gadu skaits ir vienāds.

## Uzdevumi trenīnam

1. Kāds mazākais skaits cilvēku ir nepieciešams, lai garantētu to, ka **a)** 2 cilvēkiem, **b)** 3 cilvēkiem dzimšanas diena sakrīt?
2. Doti 12 dažādi divciparu skaitļi. Pamatot, ka var izvēlēties divus no tiem, lai to starpība būtu divciparu skaitlis, kura abi cipari ir vienādi!
3. Vairākās kaudzītēs kopā ir 58 sērkociņi; nevienā kaudzītē nav mazāk kā 1 sērkociņš un nav vairāk kā 12 sērkociņi. Pierādīt, ka ir divas kaudzītes, kurās ir vienāds sērkociņu skaits, vai ir divas kaudzītes, kurās kopā ir tieši 13 sērkociņi!
4. Katrā no 16 mazajiem trijstūriem (skat. 3. att.) ir ierakstīts viens skaitlis, pavisam ierakstīti septiņi trijnieki un deviņi piecinieki. Pierādīt, ka var izvēlēties tādu trijstūri, kā parādīts 4. att., kurā ierakstīto skaitļu summa ir vismaz 18.



3. att.



4. att.

---

*Tālāk dotie uzdevumi paredzēti galvenokārt 9.-12. klašu skolēniem.*

5. No pirmajiem 100 naturālajiem skaitļiem izvēlēts 51 skaitlis. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties divus, no kuriem viens dalās ar otru!
6. Pierādīt, ka no septiņiem patvaļīgiem naturāliem skaitļiem var izvēlēties divus tādus skaitļus, kuru kvadrātu starpība dalās ar 11.
7. Pēterītim bija 100 aplīši, uz kuriem uzrakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 100 (uz katra aplīša cits skaitlis). Skolotāja lika izvēlēties 4 aplīšus un izvietot tos tā, lai būtu patiesa vienādība  $O + O = O + O$ . Aplīši bija izbiruši uz grīdas, un līdz šī uzdevuma saņemšanai Pēteris bija paguvis savākt tikai 21 aplīti. Vai ar tiem viņam noteikti pietika, lai izpildītu skolotājas uzdevumu?
8. Pierādīt, ka starp jebkuriem 35 divciparu skaitļiem var atrast trīs tādus skaitļus, kuru ciparu summas ir vienādas!
9. Dots naturāls skaitlis  $n$ , kas nedalās ar 2 un 5. Pamatot, ka pastāv tāds skaitļa  $n$  daudzkārtnis, kas sastāv tikai no vieniniekiem!

## Uzdevumu atrisinājumi

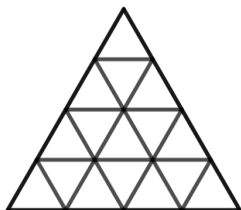
1. Cik cilvēki ir nepieciešami, lai garantētu to, ka **a)** 2 cilvēkiem, **b)** 3 cilvēkiem dzimšanas diena sakrīt?

### Atrisinājums

**a)** Mazākais skaits cilvēku ir 367. Pamatosim, ka ar mazāk cilvēkiem nepietiks. Ja būtu ne vairāk kā 366 cilvēki, tad varētu gadīties, ka katram dzimšanas diena ir citā dienā (ieskaitot 29. februāri), tātad ir nepieciešami vismaz 367 cilvēki, lai, izmantojot Dirihlē principu, garantētu to, ka vismaz 2 cilvēkiem dzimšanas diena sakrīt.

**b)** Līdzīgi, izmantojot Dirihlē principu, varam spriest, ka būtu nepieciešami vismaz  $2 \cdot 366 + 1 = 733$  cilvēki, lai garantētu to, ka vismaz 3 cilvēkiem dzimšanas diena sakrīt.

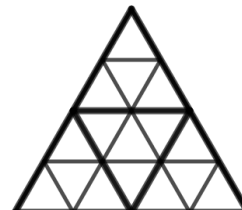
2. Katrā no 16 mazajiem trijstūriem (skat. **5Error! Reference source not found.** att.) ir ierakstīts viens skaitlis, pavisam ierakstīti septiņi trijnieki un deviņi piecinieki. Pierādīt, ka var izvēlēties tādu trijstūri, kā parādīts 6. att., kurā ierakstīto skaitļu summa ir vismaz 18.



5. att.



6. att.



7. att.

**Atrisinājums.** Sadalīsim sākotnējo trijstūri četros trijstūros ar malas garumu 2 (skat 7. att.). Tā kā ir četri šādi trijstūri (kas nepārklājas), un tajos ierakstīti 9 piecinieki, tad pēc Dirihlē principa kādā no šiem trijstūriem būs vismaz trīs piecinieki, tātad tajā ierakstīto skaitļu summa būs vismaz  $5 + 5 + 5 + 3 = 18$ , kas bija jāpierāda.

3. Vairākās kaudzītēs kopā ir 58 sērkociņi; nevienā kaudzītē nav mazāk kā 1 sērkociņš un nav vairāk kā 12 sērkociņi. Pierādīt, ka ir divas kaudzītes, kurās ir vienāds sērkociņu skaits, vai ir divas kaudzītes, kurās kopā ir tieši 13 sērkociņi!

**Atrisinājums.** Pieņemam pretējo tam, kas jāpierāda, tas ir, nav divu kaudzīšu, kurās ir vienāds sērkociņu skaits un nav divu kaudzīšu, kurās kopā ir tieši 13 sērkociņi. Tad no katra skaitļu pāra (1; 12), (2; 11), (3; 10), (4; 9), (5; 8), (6; 7) ne vairāk kā viens var būt sērkociņu skaits kādā kaudzītē. Tātad sērkociņu nav vairāk kā  $7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 57$  (no katra skaitļu pāra izvēlējas lielāko skaitli) – pretruna. Tātad pieņēmums ir aplams un esam pierādījuši, ka ir divas kaudzītes, kurās ir vienāds sērkociņu skaits, vai ir divas kaudzītes, kurās kopā ir tieši 13 sērkociņi.

4. Doti 12 dažādi divciparu skaitļi. Pamatot, ka var izvēlēties divus no tiem, lai to starpība būtu divciparu skaitlis, kura abi cipari ir vienādi!

**Atrisinājums.** Apskatīsim vispirms tos divciparu skaitļus, kuriem abi cipari ir vienādi. Tie ir:

$$11; 22; 33; 44; 55; 66; 77; 88; 99.$$

Ievērojam, ka tie ir visi divciparu skaitļi, kas dalās ar 11. Atliek pamatot, ka no dotajiem 12 divciparu skaitļiem var atrast 2 tādus, kuru starpība dalās ar 11. Tā kā ir doti 12 skaitļi, bet skaitlim, dalot ar 11, ir iespējami tikai 11 dažādi atlikumi, tad pēc Dirihlē principa noteikti būs divi tādi skaitļi, kuri dos vienādu atlikumu, dalot ar 11. Tātad vienmēr varēs atrast divus skaitļus no dotajiem 12 skaitļiem, lai to starpība dalītos ar 11. Turklāt šī starpība noteikti būs divciparu skaitlis, jo pēc dotā visi skaitļi ir dažādi un tātad nav iespējams iegūt vienīgo skaitli, kas dalās ar 11, kas ir mazāks par divciparu skaitli, tas ir, skaitli 0.

5. No pirmajiem 100 naturālajiem skaitļiem izvēlēts 51 skaitlis. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties divus, no kuriem viens dalās ar otru!

**Atrisinājums.** Visus naturālos skaitļus no 1 līdz 100 sadalīsim 50 grupās: katru nepāra skaitli ievietosim citā grupā (pavisam ir 50 nepāra skaitļi). Ievērojam, katru pāra skaitli  $p$  var izteikt kā nepāra skaitļa  $n$  un divnieka pakāpes reizinājumu, tas ir,  $p = n \cdot 2^k$ , kur  $k$  ir kāds naturāls skaitlis. Pāra skaitli  $p$  ievietosim vienā grupā ar tam atbilstošo nepāra skaitli  $n$ . Pirmās grupas ir

$$\{1; 2; 4; 8; 16; 32; 64\}, \{3; 6; 12; 24; 48; 96\}, \{5; 10; 20; 40; 80\} \text{ utt.}$$

Izvēloties jebkurus divus skaitļus no vienas grupas, lielākais skaitlis dalās ar mazāko (dalījums ir divnieka pakāpe).

Tā kā tika izvēlēts 51 skaitlis, bet visi skaitļi ir sadalīti 50 grupās, tad pēc Dirihlē principa vismaz divi skaitļi būs no vienas grupas; tie arī ir meklētie divi skaitļi.

6. Pierādīt, ka no septiņiem patvaļīgiem naturāliem skaitļiem var izvēlēties divus tādus skaitļus, kuru kvadrātu starpība dalās ar 11.

**Atrisinājums.** Aprēķinām, kādus atlikumus pēc moduļa 11 dod naturālu skaitļu kvadrāti:

$n \pmod{11}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n^2 \pmod{11}$	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1

Tātad naturāla skaitļa kvadrāts, dalot ar 11, var dot tikai sešus dažādus atlikumus: 0, 1, 3, 4, 5 vai 9. Tā kā doti septiņi skaitļi, tad no Dirihlē principa izriet, ka divu skaitļu kvadrāti, dalot ar 11, dod vienādus atlikumus. Izvēloties šos skaitļus, iegūstam vajadzīgo – to kvadrātu starpība dalās ar 11.

7. Pēterītim bija 100 aplīši, uz kuriem uzrakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 100 (uz katra aplīša cits skaitlis). Skolotāja lika izvēlēties 4 aplīšus un izvietot tos tā, lai būtu patiesa vienādība  $O + O = O + O$ . Aplīši bija izbiruši uz grīdas, un līdz šī uzdevuma saņemšanai Pēteris bija paguvis savākt tikai 21 aplīti. Vai ar tiem viņam noteikti pietika, lai izpildītu skolotājas uzdevumu?

**Atrisinājums.** No Pēterīša salasītajiem aplīšiem var izveidot  $\frac{21 \cdot 20}{2} = 210$  dažādus skaitļu pārus (pārus, kas atšķiras tikai ar aplīšu secību, uzskatām par vienādiem). Šos pārus tālākajā spriedumā uzskatīsim par "trušiem". Apskatām, kādas var būt vienā pāri ietilpstošo skaitļu summas. Mazākā summas vērtība ir  $1 + 2 = 3$ ; lielākā summas vērtība ir  $99 + 100 = 199$ . Tātad pavisam iespējamās 197 dažādas summas vērtības: 3; 4; 5;...; 197; 198; 199. Šīs dažādās vērtības uzskatīsim par "būriem". Tā kā "trušu" ir vairāk nekā "būru", tad pēc Dirihlē principa kādā "būrī" ir vismaz divi "truši". Tas nozīmē, ka Pēterītim ir divi aplīšu pāri, kuros ietilpstošo skaitļu summas ir vienādas; pieņemsim, ka  $A + B = C + D$  (pāri ir  $A, B$  un  $C, D$ ).

Pamatosim, ka neviens skaitlis neietilpst abos pāros. Ja, piemēram, būtu  $A = C$ , tad no  $A + B = C + D$  sekotu arī  $B = D$  un pāri  $A, B$  un  $C, D$  nebūtu dažādi. Tātad visi četri aplīši  $A, B, C, D$  ir dažādi, tāpēc Pēterītis no tiem var izveidot vienādību  $A + B = C + D$ .

8. Pierādīt, ka starp jebkuriem 35 divciparu skaitļiem var atrast trīs tādus skaitļus, kuru ciparu summas ir vienādas!

**Atrisinājums.** Izveidosim tabulu – gar tās horizontālo malu uzrakstīsim visas iespējamās skaitļa pirmā cipara vērtības, bet gar vertikālo malu – otrā cipara vērtības. Tabulas rūtiņās ierakstīsim kolonnas un rindiņas numuru summu (skat. 8. att.). Esam izveidojuši atbilstību starp skaitļiem un to ciparu summām.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	...					
1	2	3	...						
2	3	...							
3	...								
4									
5									
6									...
7								...	16
8							...	16	17
9					...	16	17	18	

8. att.

Tabulā atrodami visi divciparu skaitļi no 10 līdz 99. Pavisam iespējamās 18 dažādas ciparu summas vērtības (varam izveidot 18 dažādas grupas). Ievērojam, ka

- 1) ciparu summa 1 un 18 katra ir tikai vienam skaitlim (10 un 99),
- 2) ciparu summa 2 un 17 katra ir tikai diviem skaitļiem (11; 20 un 89; 98).

Tātad šajās grupās vairāk skaitļu nevar būt neatkarīgi no tā, kādus 35 skaitļus izvēlamies.

Pieņemsim, ka šīs 4 grupas ir maksimāli piepildītas – tajās kopā ievietoti 6 skaitļi. Tad atlikušajās 14 grupās jāievieto 29 skaitļi. Bet pēc Dirihlē principa noteikti ir tāda grupa, kurā ir vismaz trīs skaitļi – tie arī ir meklētie trīs skaitļi, kuru ciparu summas ir vienādas.

9. Dots naturāls skaitlis  $n$ , kas nedalās ar 2 un 5. Pamatot, ka pastāv tāds skaitļa  $n$  daudzkārtņis, kas sastāv tikai no vieniniekiem.

**Atrisinājums.** Apskatīsim  $n$  skaitļus  $1; 11; 111; 1111; \dots; 11 \dots 1$ . Šiem skaitļiem ir  $n$  iespējami atlikumi, dalot ar  $n$ , tas ir,  $0, 1, 2, \dots, n - 1$ . Ja kādam no skaitļiem atlikums ir 0, tad tas ir meklētais daudzkārtņis. Pretējā gadījumā ir iespējami tikai  $n - 1$  atlikumi un pēc Dirihlē principa būs divi tādi skaitļi, kuru starpība dalīsies ar  $n$ . Šī starpība būs izskatā  $1111 \dots 100 \dots 00$ . Tā kā  $n$  nedalās ar 2 un 5, tad  $n$  nedalās ar nevienu 10-nieka pakāpi, tāpēc no skaitļa  $1111 \dots 100 \dots 00$  varam nodzēst nulles un tas vēl joprojām dalīsies ar  $n$ . Rezultātā iegūstam skaitli, kas sastāv tikai no vieniniekiem un kas dalās ar  $n$ , t. i., ir skaitļa  $n$  daudzkārtņis.