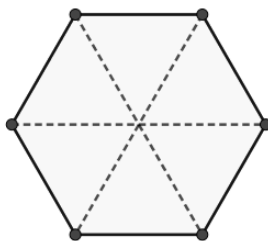


Latvijas 75. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi un atrisinājumi 5.-8. klasei

5. klase

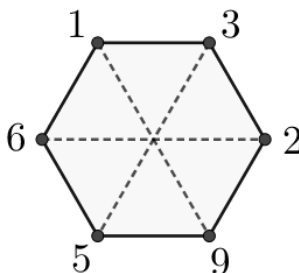
- 5.1. Sešstūra virsotnēs ieraksti 6 dažādus naturālus skaitļus tā, lai vienlaicīgi izpildās nosacījumi:
- jebkuriem diviem blakus virsotnēs ierakstītiem skaitļiem lielākais kopīgais dalītājs būtu 1;
 - katra ar raustītu līniju uzzīmētā nogriežņa galapunktos (skat. 1. att.) ierakstīto skaitļu reizinājums dalītos ar 3;
 - visu sešu ierakstīto skaitļu summa būtu vismazākā iespējamā!

Pietiek tikai ar piemēru, kā ierakstīt skaitļus. Nav jāpamato, ka iegūtā summa ir vismazākā iespējamā.



1. att.

Atrisinājums. Skat., piemēram, 2. att., kur ierakstīto skaitļu summa ir 26.



2. att.

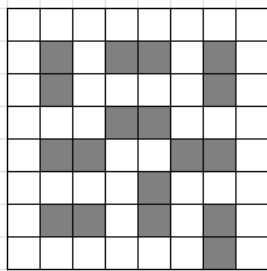
- 5.2. Vai naturāla skaitļa ciparu reizinājums var būt **a)** 2520; **b)** 5460?

Atrisinājums. a) Jā, var būt, piemēram, skaitļa 8975 ciparu reizinājums ir $8 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 = 72 \cdot 35 = 2520$.

b) Nē, nevar būt. Ja skaitlis ir kāda skaitļa ciparu reizinājums, tad visi tā pirmreizinātāji ir mazāki nekā 10 (tātad tie var būt tikai 2, 3, 5 vai 7). Bet skaitlim 5460 viens no pirmreizinātājiem ir 13 ($5460 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$), tātad tas nav neviena skaitļa ciparu reizinājums.

- 5.3. Dots kvadrāts ar izmēriem 8×8 rūtiņas. Iekrāso 9 taisnstūrus ar izmēriem 1×2 rūtiņas tā, lai no dotā kvadrāta nevarētu izgriezt nevienu kvadrātu ar izmēriem 2×2 rūtiņas, kam visas rūtiņas ir neiekrāsotas!

Atrisinājums. Skat., piemēram, 3. att.



3. att.

- 5.4.** Alise un Kate spēlē spēli. Pirmajā gājienā Kate nosauc skaitli nulle, pēc tam viņas pamīšus izdara gājienu. Katra meitene savā gājienā izvēlas vienu naturālu skaitli no 1 līdz 10, pieskaita to pēdējam nosauktajam skaitlim un nosauc rezultātu. (Piemēram, ja Alise savā gājienā ir nosaukusi skaitli 18, tad Kate var nosaukt jebkuru naturālu skaitli no 19 līdz 28). Uzvar tā meitene, kas nosauc skaitli 56. Pamato, ka Alise vienmēr var uzvarēt, neatkarīgi no Kates nosauktajiem skaitļiem!

Atrisinājums. Savā pirmajā gājienā Alisei jānosauc skaitlis 1. Pēc tam pēc katra Kates gājiena Alise izvēlas pieskaitīt tādu skaitli, kas kopā ar Kates iepriekšējā gājienā izvēlēto skaitli summā dod 11 (šādu gājienu Alise vienmēr var veikt, jo var izvēlēties skaitļus no 1 līdz 10). Līdz ar to pēc katra Alises gājiena skaitlis palielināsies par 11. Alises nosauktie skaitļi būs 1; 12; 23; 34; 45; 56.

- 5.5.** Dotas sešas bumbiņas, uz kurām ir uzraksti 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, 5 g, 6 g, kas atbilst bumbiņas masai gramos. Zināms, ka pieci no šiem uzrakstiem ir pareizi, bet viens ir nepareizs – attiecīgās bumbiņas masa ir mazāka nekā norādīts uzrakstā. Kā ar divām svēršanām uz sviru svariem var noskaidrot, kurš uzraksts ir nepareizs? *Piezīme.* Sviru svāri ir svāri, kuriem svārai abos galos piestiprina vienādus svaru kausus. Ja abos kausos ievieto priekšmetus ar vienādu masu, tad svaru kausi ir līdzsvarā. Ja vienā kausā ieliktais priekšmets ir smagāks, tad atbilstošais kauss nosveras uz leju.



Atrisinājums. Pirmajā svēršanā vienā kausā liekam 1 g un 2 g bumbiņas, bet otrā liekam 3 g bumbiņu. Iespējami trīs gadījumi.

1. Ja $1\text{ g} + 2\text{ g} > 3\text{ g}$, tad nepareizais uzraksts ir 3 g.
2. Ja $1\text{ g} + 2\text{ g} < 3\text{ g}$, tad nepareizais uzraksts ir 1 g vai 2 g. Otrajā svēršanā vienā kausā liekam 1 g un 5 g, bet otrā kausā liekam 2 g un 4 g:
 - ja $1\text{ g} + 5\text{ g} < 2\text{ g} + 4\text{ g}$, tad nepareizais uzraksts ir 1 g;
 - ja $1\text{ g} + 5\text{ g} > 2\text{ g} + 4\text{ g}$, tad nepareizais uzraksts ir 2 g.
3. Ja $1\text{ g} + 2\text{ g} = 3\text{ g}$, tad nepareizais uzraksts ir 4 g, 5 g vai 6 g. Otrajā svēršanā vienā kausā liekam 1 g un 5 g, bet otrā kausā liekam 2 g un 4 g:
 - ja $1\text{ g} + 5\text{ g} < 2\text{ g} + 4\text{ g}$, tad nepareizais uzraksts ir 5 g;
 - ja $1\text{ g} + 5\text{ g} > 2\text{ g} + 4\text{ g}$, tad nepareizais uzraksts ir 4 g;
 - ja $1\text{ g} + 5\text{ g} = 2\text{ g} + 4\text{ g}$, tad nepareizais uzraksts ir 6 g.

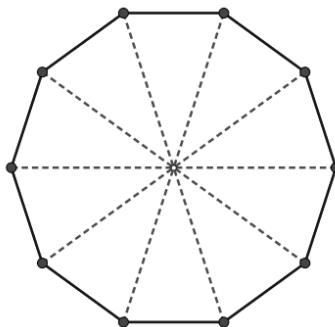
Piezīme. Ir arī citi varianti, kā noskaidrot prasīto.

6. klase

6.1. Desmitstūra virsotnēs ieraksti 10 dažādus naturālus skaitļus tā, lai vienlaicīgi izpildās nosacījumi:

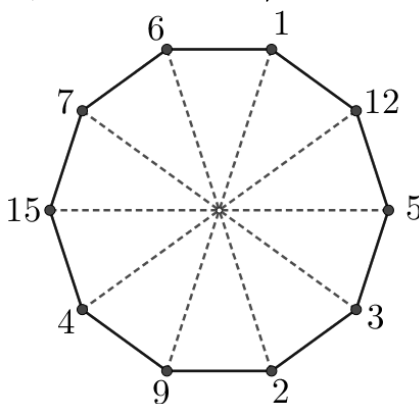
- jebkuriem diviem blakus virsotnēs ierakstītiem skaitļiem lielākais kopīgais dalītājs būtu 1;
- katra ar raustītu līniju uzzīmētā nogriežņa galapunktos (skat. 4. att.) ierakstīto skaitļu reizinājums dalītos ar 3;
- visu desmit ierakstīto skaitļu summa būtu vismazākā iespējamā!

Pietiek tikai ar piemēru, kā ierakstīt skaitļus. Nav jāpamato, ka iegūtā summa ir mazākā iespējamā.



4. att.

Atrisinājums. Skat., piemēram, 5. att., kur ierakstīto skaitļu summa ir 64.



5. att.

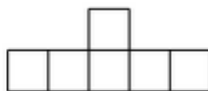
6.2. Vai skaitli 299 var izteikt kā vairāku (vismaz divu) naturālu skaitļu summu tā, lai arī šo skaitļu reizinājums būtu 299?

Atrisinājums. Skaitlis 299 ir izsakāms kā $299 = 13 \cdot 23$, bet reizinātāju summa ir $13 + 23 = 36 < 299$. Tātad reizinājumam $13 \cdot 23$ vēl jāpiereizina vajadzīgais skaits vieninieku (reizinājums no tā nemainās). Ievērojām, ka $299 - 36 = 263$, tātad skaitli 299 atbilstoši uzdevuma prasībām varam izteikt šādi:

$$299 = 13 \cdot 23 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{263 \text{ vieninieki}} \text{ un } 299 = 13 + 23 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{263 \text{ vieninieki}}.$$

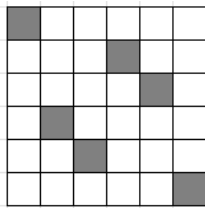
Piezīme. Šis ir vienīgais atrisinājums, neņemot vērā reizinātāju secību.

- 6.3. Dots kvadrāts ar izmēriem 6×6 rūtiņas. Iekrāso 6 rūtiņas tā, lai no dotā kvadrāta nevarētu izgriezt nevienu 6. att. doto figūru, kam visas rūtiņas ir neiekrāsotas!



6. att.

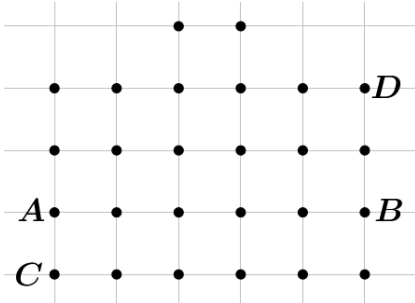
Atrisinājums. Skat., piemēram, 7. att.



7. att.

- 6.4. Kādā pilsētā ir kvadrātveida ielu plānojums, attālums starp diviem blakus krustojumiem ir 1 km. Dažos ielu krustojumos atrodas pieminekļi, kas apzīmēti ar melnu punktu (skat. 8. att.). Ziņkārīgs tūrists kādā dienā (ejot pa ielām) apmeklēja visus šīs pilsētas pieminekļus. Vai var gadīties, ka viņa maršruta garums bija tieši 25 km, ja tas **a)** sākās pie pieminekļa *A* un beidzās pie pieminekļa *B*; **b)** sākās pie pieminekļa *C* un beidzās pie pieminekļa *D*?

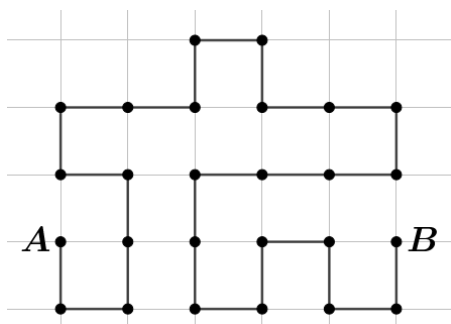
Piezīme. Pa vienu ielas posmu starp diviem blakus krustojumiem drīkst iet arī vairāk nekā vienu reizi.



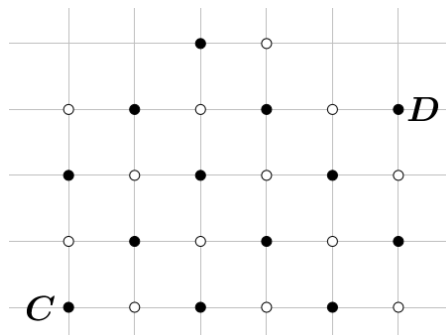
8. att.

Atrisinājums. **a)** Var, piemēram, skat. 9. att.

b) Nē, nevar. Nokrāsojam punktus (pieminekļus) melnā un baltā krāsā, kā parādīts 10. att. Ievērojam, ka ik pēc 1 km punkta krāsa mainās uz pretējo. Tā kā attālums starp diviem vienas krāsas posmiem ir pāra skaitlis, tad kopējam maršruta garumam no pilsētas *C* līdz pilsētai *D* jābūt pāra skaitlim. Tātad maršruta garums nevar būt 25 km.



9. att.



10. att.

6.5. Doti seši atsvari, uz kuriem ir uzraksti 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, 5 g, 6 g, kas atbilst atsvara masai gramos. Zināms, ka pieci no šiem uzrakstiem ir pareizi, bet viens ir nepareizs – attiecīgā atsvara masa ir lielāka nekā norādīts uzrakstā. Kā ar divām svēršanām uz sviru svariem var noskaidrot, kurš uzraksts ir nepareizs?

Piezīme. Sviru svāri ir svāri, kuriem svārai abos galos piestiprina vienādus svaru kausus. Ja abos kausos ievieto priekšmetus ar vienādu masu, tad svaru kausi ir līdzsvarā. Ja vienā kausā ieliktais priekšmets ir smagāks, tad atbilstošais kauss nosveras uz leju.

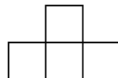


Atrisinājums. Pirmajā svēršanā vienā kausā liekam 1 g un 2 g atsvarus, bet otrā liekam 3 g atsvaru. Iespējami trīs gadījumi.

1. Ja $1\text{ g} + 2\text{ g} < 3\text{ g}$, tad nepareizais uzraksts ir 3 g.
2. Ja $1\text{ g} + 2\text{ g} > 3\text{ g}$, tad nepareizais uzraksts ir 1 g vai 2 g. Otrajā svēršanā vienā kausā liekam 1 g un 5 g, bet otrā kausā liekam 2 g un 4 g:
 - ja $1\text{ g} + 5\text{ g} < 2\text{ g} + 4\text{ g}$, tad nepareizais uzraksts ir 2 g;
 - ja $1\text{ g} + 5\text{ g} > 2\text{ g} + 4\text{ g}$, tad nepareizais uzraksts ir 1 g.
3. Ja $1\text{ g} + 2\text{ g} = 3\text{ g}$, tad nepareizais uzraksts ir 4 g, 5 g vai 6 g. Otrajā svēršanā vienā kausā liekam 1 g un 5 g, bet otrā kausā liekam 2 g un 4 g:
 - ja $1\text{ g} + 5\text{ g} < 2\text{ g} + 4\text{ g}$, tad nepareizais uzraksts ir 4 g;
 - ja $1\text{ g} + 5\text{ g} > 2\text{ g} + 4\text{ g}$, tad nepareizais uzraksts ir 5 g;
 - ja $1\text{ g} + 5\text{ g} = 2\text{ g} + 4\text{ g}$, tad nepareizais uzraksts ir 6 g.

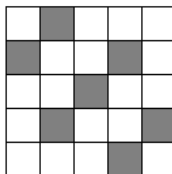
7. klase

- 7.1. Dots kvadrāts ar izmēriem 5×5 rūtiņas. Vai var iekrāsot **a) 8** rūtiņas, **b) 7** rūtiņas tā, lai no dotā kvadrāta nevarētu izgriezt nevienu 11. att. redzamo figūru, kurai visas rūtiņas ir neiekrāsotas?



11. att.

Atrisinājums. Abos gadījumos prasītais ir izdarāms, piemēram, skat. 12. att., kur iekrāsotas 7 rūtiņas.



12. att.

- 7.2. Kādu četrp dažu natūrālu skaitļu reizinājums ir 414?

Atrodi visus iespējamus variantus un pamato, ka citu nav!

Atrisinājums. Skaitli 414 kā četrp dažu skaitļu reizinājumu var iegūt trīs veidos:

$$414 = 1 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 23 = 1 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 23 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 69.$$

Sadalīsim doto skaitli 414 pirmreizinātājos: $414 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 23$. Apskatām divus iespējamus gadījumus.

Ja neviens no reizinātājiem nav 1, tad šis ir arī vienīgais veids, kā sadalīt 414 četrp reizinātājos. Bet tas neatbilst uzdevuma nosacījumiem, jo divi no reizinātājiem ir vienādi.

Ja viens no reizinātājiem ir 1, tad ir 3 atrisinājumi. Tā kā divi reizinātāji ir 3, tad viens no tiem ir jāpiereizina kādam no pārējiem skaitļiem. Tā kā, reizinot 3 ar 1, iegūsim to pašu sadalījumu pirmreizinātājos, tad šis gadījums neder. Atliek vēl 3 iespējas:

- 3 reizina ar 2, iegūst $414 = 1 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 23$;
- 3 reizina ar 3, iegūst $414 = 1 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 23$;
- 3 reizina ar 23, iegūst $414 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 69$.

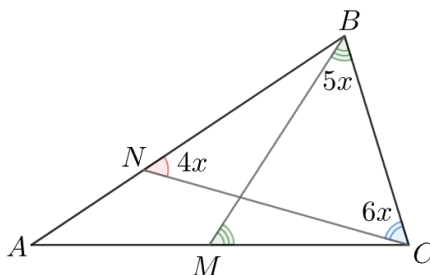
Esam apskatījuši visas iespējas, tātad nav citu veidu, kā skaitli 414 sadalīt četrp dažādos natūrālos reizinātājos.

- 7.3. Uz trijstūra ABC malas AC atzīmēts punkts M , bet uz malas AB atzīmēts punkts N tā, ka $\angle BNC = 4x$, $\angle BCN = 6x$ un $\angle BMC = \angle CBM = 5x$. Pierādīt, ka trijstūra ABC divi leņķi ir vienādi!

Atrisinājums. Izmantojot trijstūra iekšējo leņķu summu divos trijstūros (skat. 13. att.), iegūstam:

- $\angle NBC = 180^\circ - \angle BNC - \angle NCB = 180^\circ - 4x - 6x = 180^\circ - 10x$ ($\triangle NBC$);
- $\angle MCB = 180^\circ - \angle MBC - \angle BMC = 180^\circ - 5x - 5x = 180^\circ - 10x$ ($\triangle MBC$).

Tātad $\angle ABC = \angle NBC = 180^\circ - 10x = \angle MCB = \angle ACB$ un divi trijstūra ABC leņķi ir vienādi.



13. att.

- 7.4.** Pirmklasnieki un otrklasnieki, kopā 30 bērni, sastājas aplī un sadevās rokās. Izrādījās, ka 20 bērni aiz rokas turēja vismaz vienu pirmklasnieku, bet 24 bērni aiz rokas turēja vismaz vienu otrklasnieku. Cik varēja būt otrklasnieku?

Atrisinājums. Ja 20 bērni turēja aiz rokas vismaz vienu pirmklasnieku, tad atlikušie $30 - 20 = 10$ katrs turēja pie rokas divus otrklasniekus.

Tā kā kopā bija 24 bērni, kas turēja pie rokas vismaz vienu otrklasnieku, un 10 no tiem turēja divus otrklasniekus, tad atlikušie $24 - 10 = 14$ katrs turēja tieši vienu otrklasnieku.

Saskaitīsim, cik roku kopā ir otrklasniekiem. Kopā ir 10 bērni, kas katrs tur divas otrklasnieku rokas, un 14 bērni, kas katrs tur vienu otrklasnieka roku, kopā tātad ir $10 \cdot 2 + 14 = 34$ otrklasnieku rokas.

Tātad kopā ir $34 : 2 = 17$ otrklasnieki.

Piemēram, bērni varēja stāvēt aplī šādi:

$O_1 O_2 O_3 O_4 O_5 O_6 O_7 O_8 O_9 O_{10} P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 P_8 O_{11} O_{12} P_9 P_{10} O_{13} O_{14} P_{11} P_{12} O_{15} O_{16} P_{13} O_{17},$

$O_1 - O_9$ un P_{13} katrs tur divus otrklasniekus (attiecīgi pārējie 20 tur vismaz vienu pirmklasnieku), un P_2 līdz P_7 katrs tur divus pirmklasniekus (attiecīgi pārējie 24 tur katrs vismaz vienu otrklasnieku).

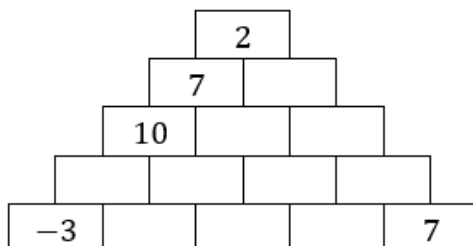
- 7.5.** Trīs naturālus skaitļus A , B un C saista sakarības: $A < B < C$ un $C - B = B - A$. Skaitļu A , B un C pierakstā kopā ir izmantoti tieši astoņi cipari, kas visi ir savā starpā atšķirīgi. Vai ir iespējams, ka skaitlis A ir
a) divciparu skaitlis; **b)** viencipara skaitlis?

Atrisinājums. a) Jā, ir iespējams, piemēram, $A = 21$, $B = 354$, $C = 687$ ($687 - 354 = 333 = 354 - 21$).

b) Jā, ir iespējams, piemēram, $A = 3$, $B = 546$, $C = 1089$ ($1089 - 546 = 543 = 546 - 3$).

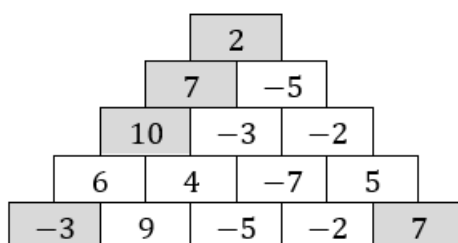
8. klase

- 8.1. Ieraksti 14. att. redzamās figūras katrā tukšajā taisnstūrī veselu skaitli tā, lai katrā taisnstūrī, izņemot apakšējo rindu, ierakstītais skaitlis ir divu skaitļu, kas atrodas divos taisnstūros tieši zem tā, summa!



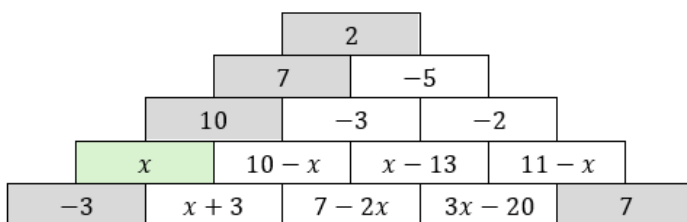
14. att.

Atrisinājums. Skat. 15. att.



15. att.

Piezīme. Apzīmējot taisnstūrī ierakstīto skaitli ar x un izsakot pārējos nezināmos skaitļus, iegūst 16. att. doto skaitļu izkārtojumu. Iegūstam vienādojumu $11 - x = 3x - 20 + 7$, kura atrisinājums $x = 6$.



16. att.

- 8.2. Cik starp pirmajiem 2025 naturālajiem skaitļiem ir tādu skaitļu x , ka skaitlis $x(x + 1)$ dalās ar 74?

Atrisinājums. Ievērojam, ka $74 = 37 \cdot 2$. Tā kā 37 ir pirmskaitlis, tad vienam no skaitļiem x vai $x + 1$ jādalās ar 37. No diviem pēc kārtas esošiem naturālajiem skaitļiem viens noteikti dalās ar 2, tāpēc dotais reizinājums vienmēr dalās ar 2.

No 1 līdz 2026 (2026 ir lielākā iespējamā $x + 1$ vērtība) ir 54 skaitļi, kas dalās ar 37 (lielākais no tiem ir $1998 = 54 \cdot 37$). Līdz ar to:

- 54 veidos var izvēlēties tādu x , kas dalās ar 37 (tas ir, $1 \cdot 37; 2 \cdot 37; 3 \cdot 37; \dots; 54 \cdot 37$);
- 54 veidos var izvēlēties tādu x , ka $x + 1$ dalās ar 37 (tas ir, $1 \cdot 37 - 1; 2 \cdot 37 - 1; \dots; 54 \cdot 37 - 1$).

Tātad pavisam starp pirmajiem 2025 naturālajiem skaitļiem ir $54 + 54 = 108$ tādi skaitļi x , ka $x(x + 1)$ dalās ar 74.

8.3. Šaurleņķu trijstūrī ABC visi augstumi krustojas punktā M . Aprēķināt $\angle ACB$, ja $AB = CM$!

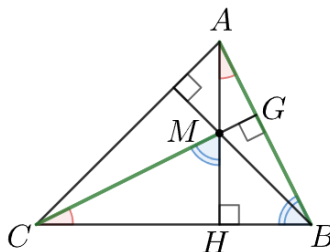
Atrisinājums. Ar H un G apzīmēsim augstumu, kas vilkti attiecīgi no virsotnēm A un C , galapunktus (skat. 17. att.). Apzīmējot $\angle ABC = \alpha$ un izmantojot trijstūra iekšējo leņķu summu, iegūstam:

- $\angle HAB = 180^\circ - \angle AHB - \angle ABH = 90^\circ - \alpha$ ($\triangle ABH$);
- $\angle GCB = 180^\circ - \angle CGB - \angle GBC = 90^\circ - \alpha$ ($\triangle CGB$).

Tātad $\triangle ABH = \triangle CMH$ pēc pazīmes lml :

- $\angle HAB = 90^\circ - \alpha = \angle MCH$;
- $AB = CM$ pēc dotā;
- $\angle CMH = 180^\circ - \angle MHC - \angle MCH = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha = \angle ABH$ ($\triangle CMH$).

Tā kā $AH = CH$ kā vienādo trijstūru atbilstošās malas, tad $\triangle CAH$ pret vienādiem leņķiem atrodas vienādas malas un $\angle ACH = \angle CAH = (180^\circ - \angle AHC) : 2 = 90^\circ : 2 = 45^\circ$. Tātad $\angle ACB = 45^\circ$.



17. att.

8.4. Alise un Kate spēlē spēli. Pirmajā gājienā Kate nosauc skaitli nulle, pēc tam viņas pamīšus izdara gājienus. Katra meitene savā gājienā izvēlas vienu naturālu skaitli no 1 līdz 10, pieskaita to pēdējam nosauktajam skaitlim un nosauc rezultātu. (Piemēram, ja Alise savā gājienā ir nosaukusi skaitli 18, tad Kate var nosaukt jebkuru naturālu skaitli no 19 līdz 28). Uzvar tā meitene, kas nosauc skaitli 100. Kura meitene vienmēr var uzvarēt, neatkarīgi no otras spēlētājas gājieniem?

Atrisinājums. Vienmēr var uzvarēt Alise. Savā pirmajā gājienā Alisei jānosauc skaitlis 1. Pēc tam pēc katra Kates gājiena Alise izvēlas pieskaitīt tādu skaitli, kas kopā ar Kates iepriekšējā gājienā izvēlēto skaitli summā dod 11 (šādu gājienu Alise vienmēr var veikt, jo var izvēlēties skaitļus no 1 līdz 10). Līdz ar to pēc katra Alises gājiena skaitlis palielināsies par 11. Alises nosauktie skaitļi būs 1; 12; 23; 34; 45; 56; 67; 78; 89; 100.

8.5. Trīs naturālus skaitļus A , B un C saista sakarības: $A < B < C$ un $C - B = B - A$. Skaitļu A , B un C pierakstā kopā ir izmantoti tieši desmit cipari, kas visi ir savā starpā atšķirīgi. Vai ir iespējams, ka skaitlis A ir **a)** divciparu skaitlis; **b)** viencipara skaitlis?

Atrisinājums. a) Jā, ir iespējams, piemēram, $A = 27$, $B = 1548$, $C = 3069$ ($3069 - 1548 = 1521 = 1548 - 27$).

b) Jā, ir iespējams, piemēram, $A = 3$, $B = 8526$, $C = 17049$ ($17049 - 8526 = 8523 = 8526 - 3$).

Eiropas Sociālā fonda Plus projekts Nr. 4.2.2.3/1/24/I/001 “Pedagogu profesionālā atbalsta sistēmas izveide”

Latvijas 75. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi un atrisinājumi 9.-12. klase

9. klase

9.1. Aprēķināt izteiksmes $\frac{20252024^2}{20252023^2 + 20252025^2 - 2}$ vērtību!

Atrisinājums. Apzīmējam $20252024 = a$, tad iegūstam, ka

$$\frac{20252024^2}{20252023^2 + 20252025^2 - 2} = \frac{a^2}{(a-1)^2 + (a+1)^2 - 2} = \frac{a^2}{a^2 - 2a + 1 + a^2 + 2a + 1 - 2} = \frac{a^2}{2}.$$

9.2. Atrast vismazāko naturālo skaitli N , kam reizinājums $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot N$ dalās ar **a)** 434; **b)** 2025.

Atrisinājums. a) Vismazākais skaitlis $N = 31$. Sadalot pirmreizinātājos, iegūstam, ka $434 = 2 \cdot 7 \cdot 31$. Lai reizinājums $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot N$ dalītos ar 434, tad reizinājumam $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot N$ ir noteikti jāsaturs reizinātājs 31. Tā kā 31 ir pirmskaitlis, tad pirmo reizi tas parādīsies kā reizinātājs 31, reizinātāji 2 un 7 atbilstošajā reizinājumā noteikti būs. Līdz ar to mazākā iespējamā vērtība ir $N = 31$.

b) Vismazākais skaitlis $N = 10$. Ievērojam, ka $2025 = 3^4 \cdot 5^2$. Lai reizinājums $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot N$ dalītos ar 2025, tad reizinājumam $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot N$ ir jāsaturs vismaz četri reizinātāji 3 un vismaz divi reizinātāji 5. Līdz ar to:

- lai reizinājums saturētu vismaz divus reizinātājus 5, tad N vērtībai jābūt vismaz 10 (atbilstošie reizinātāji ir 5 un 10);
- lai reizinājums saturētu vismaz četrus reizinātājus 3, tad N vērtībai jābūt vismaz 9 (atbilstošie reizinātāji ir 3; 6; $9 = 3^2$).

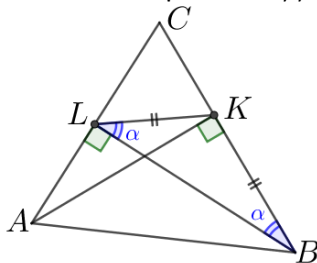
Tātad mazākā N vērtība ir 10.

9.3. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkta augstumi AK un BL . Zināms, ka $BK = KL$. Pierādīt, ka trijstūris ABC ir vienādsānu!

Atrisinājums. Tā kā $BK = KL$, tad $\angle BLK = \angle KBL = \alpha$ (skat. 1. att.) kā leņķi pret vienādām malām trijstūrī LKB . No $\triangle CLB$ iegūstam, ka $\angle BCL = 180^\circ - \angle CBL - \angle CLB = 180^\circ - \alpha - 90^\circ = 90^\circ - \alpha$.

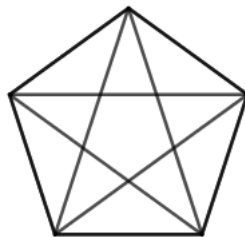
Tā kā $\angle KLC = 90^\circ - \angle BLK = 90^\circ - \alpha = \angle KCL$, tad $\triangle CKL$ ir vienādsānu trijstūris un $KL = KC$. Līdz ar to $KC = KB$ un esam ieguvuši, ka AK ir arī trijstūra ABC mediāna. Tā kā AK ir gan augstums, gan mediāna, tad trijstūris ABC ir vienādsānu.

Piezīme. Uzdevumu var risināt arī, ap četrstūri $ALKB$ apvelkot riņķa līniju.



1. att.

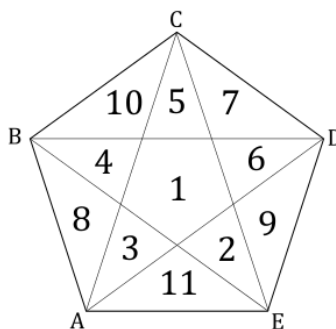
- 9.4. Dots regulārs piecstūris, kurā novilkta visas diagonāles, kas to sadala 11 daļās (skat. 2. att.). Katrā daļā ierakstīt vienu naturālu skaitli no 1 līdz 11 (katrā daļā citu) tā, lai visos trijstūros, kam visas virsotnes ir arī dotā piecstūra virsotnes, ierakstīto skaitļu summa ir viena un tā pati!



2. att.

Atrisinājums. Piemēram, skat. 3. att., kur katrā trijstūrī ierakstīto skaitļu summa ir 22.

Piezīme. Ir tikai viens derīgs skaitļu izkārtojums ar precizitāti līdz pagriešanai un apmešanai otrādi.

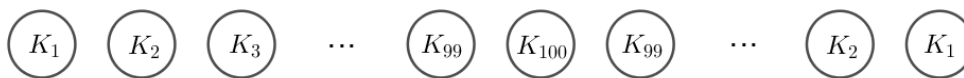


3. att.

- 9.5. Rindā novietotas n bumbiņas. Katra bumbiņa nokrāsotā kādā no 100 krāsām. Bumbiņas saliktas tā, ka katrai krāsai A un katrai krāsai B ir tāda bumbiņa krāsā A , kas atrodas pa kreisi no kādas bumbiņas krāsā B (ne obligāti blakus). Kāda ir mazākā iespējamā n vērtība?

Atrisinājums. Mazākais bumbiņu skaits ir 199. No dotā secinām, ka katrā krāsā ir vismaz viena bumbiņa. Ja būtu divas krāsas K_1 un K_2 , kurās katrā būtu nokrāsota tieši viena bumbiņa, tad, piemēram, būtu bumbiņa krāsā K_1 , kas atrodas pa kreisi no bumbiņas krāsā K_2 , bet tad nebūtu bumbiņas krāsā K_2 , kas atrodas pa kreisi no bumbiņas krāsā K_1 . Tātad maksimums vienā krāsā var būt tikai viena bumbiņa, bet pārējās 99 krāsās jābūt vismaz 2 bumbiņām. Tātad mazākais bumbiņu skaits ir $1 + 2 \cdot 99 = 199$.

Atbilstošu bumbiņu krāsojumu skat. 4. att.



4. att.

10.1. Atrast visus naturālos trīsciparu skaitļus, kuri ir tieši 5 reizes lielāki par savu ciparu reizinājumu!

Atrisinājums. Apzīmējam meklējamo skaitli $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Tad iegūstam, ka $100a + 10b + c = 5abc$. Ievērojam, ka neviens no cipariem nedrīkst būt 0, jo tad arī skaitlim būtu jābūt 0. Tā kā labās puses izteiksme dalās ar 5, tad arī labās puses izteiksmei (meklējamam skaitlim) jādalās ar 5, no kā secinām, ka $c = 0$ (neder) vai $c = 5$. Līdz ar to iegūstam:

$$100a + 10b + 5 = 25ab;$$

$$20a + 2b + 1 = 5ab.$$

Tā kā 20 un 5 dalās ar 5, tad $2b + 1$ arī jādalās ar 5. Ņemot vērā, ka b ir nenulles cipars, apskatām iespējamās $2b + 1$ vērtības:

- ja $2b + 1 = 5$ jeb $b = 2$, tad $20a + 5 = 10a$ jeb $a = -0,5$ (neder);
- ja $2b + 1 = 10$ jeb $b = 4,5$ (neder)
- ja $2b + 1 = 15$ jeb $b = 7$, tad $20a + 15 = 35a$ jeb $a = 1$, un iegūstam skaitli 175;
- citas vērtības neder, jo lielākā b vērtība ir 9, kam $2b + 1$ atbilstošā vērtība ir 19.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka uzdevuma nosacījumiem atbilst tikai skaitlis 175.

10.2. Kāds ir vismazākais naturālais skaitlis, kuram ir tieši 18 dažādi naturāli dalītāji un kas dalās ar 7?

Atrisinājums. Ievērojam, ka $18 = 18 \cdot 1 = 9 \cdot 2 = 6 \cdot 3 = 3 \cdot 3 \cdot 2$. Ja skaitlis n sadalās pirmreizinātājos kā $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$, tad tā dalītāju skaits ir $d(n) = (k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \dots \cdot (k_m + 1)$. No tā izriet, ka skaitli, kuram ir tieši 18 dalītāji, var uzrakstīt vienā no formām:

$$p_1^{17}, \quad p_1^8 \cdot p_2, \quad p_1^5 \cdot p_2^2, \quad p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot p_3.$$

Skaitlim jādalās ar 7, tāpēc kādam no pirmreizinātājiem ir jābūt 7, un tā kā meklējam mazāko skaitli, tad kā citi reizinātāji jāaplūko mazākie pirmskaitļi ar vislielāko pakāpi. Apskatām visus gadījumus:

- $p_1 = 7$, tad iegūstam skaitli $7^{17} > 252$;
- $p_1 = 2$ un $p_2 = 7$, tad iegūstam skaitli $2^8 \cdot 7 = 256 \cdot 7 = 1792$;
- $p_1 = 2$ un $p_2 = 7$, tad iegūstam skaitli $2^5 \cdot 7^2 = 32 \cdot 49 = 1568$;
- $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ un $p_3 = 7$, tad iegūstam skaitli $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 36 \cdot 7 = 252$.

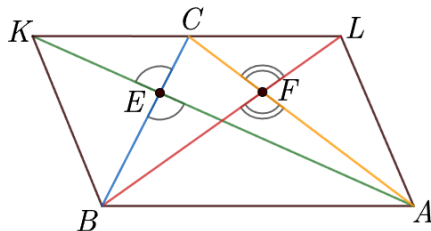
Tātad vismazākais naturālais skaitlis, kuram ir tieši 18 dažādi naturāli dalītāji un kas dalās ar 7, ir 252.

10.3. Uz trijstūra ABC malām AC un BC ir atlikti attiecīgi punkti F un E tā, ka $2CF = FA$ un $2CE = EB$. Ārpus trijstūra ABC uz stariem AE un BF ir atlikti attiecīgi punkti K un L tā, ka $2KE = EA$ un $2LF = FB$. Pierādīt, ka $ABKL$ ir paralelograms!

Atrisinājums. Ievērojam divu trijstūru pāru līdzību pēc pazīmes $m\ell m$ (skat. 5. att.).

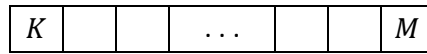
- $\triangle AEB \sim \triangle KEC$ ($\frac{AE}{KE} = \frac{EB}{EC} = 2$, $\sphericalangle AEB = \sphericalangle KEC$), tātad $AB = 2KC$ un $\sphericalangle EAB = \sphericalangle EKC$. Līdz ar to $AB \parallel KC$, jo iekšējie šķērsleņķi ir vienādi.
- $\triangle BFA \sim \triangle LFC$ ($\frac{BF}{LF} = \frac{FA}{FC} = 2$, $\sphericalangle BFA = \sphericalangle LFC$), tātad $AB = 2CL$ un $\sphericalangle FBA = \sphericalangle FLC$. Līdz ar to $AB \parallel CL$, jo iekšējie šķērsleņķi ir vienādi.

Tā kā $AB \parallel KC$ un $AB \parallel CL$, tad $C \in KL$ un $AB \parallel KL$, turklāt $2KC = AB = 2CL = KL$. Esam ieguvuši, ka četrstūra $ABKL$ divas pretējās malas ir vienādas un paralēlas, tātad $ABKL$ ir paralelograms.



5. att.

10.4. Dots taisnstūris ar izmēriem $1 \times n$ rūtiņas, kur $n \geq 3$, uz kura Kims un Māris spēlē spēli. Sāukumā Kima kauliņš K atrodas taisnstūra kreisajā rūtiņā un Māra kauliņš M atrodas taisnstūra labajā rūtiņā (skat. 6. att.). Vienā gājienā spēlētājs var pārvietot savu kauliņu 1 vai 2 rūtiņas otra spēlētāja virzienā, ja atbilstošā rūtiņa (rūtiņas) ir tukša (nedrīkst uzkāpt uz vai veikt “lēcienu” pāri otra spēlētāja kauliņam). Spēli sāk Kims un spēlētāji gājienu veic pamišus. Ja spēlētājs nevar veikt gājienu, tad viņš zaudē. Kādām n vērtībām, pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt Kims, un kādām n vērtībām, pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt Māris?

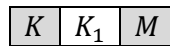


6. att.

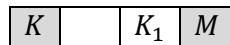
Atrisinājums. Māris vienmēr var uzvarēt, ja $n = 3k + 2$, kur $k \in \mathbb{N}$, bet Kims vienmēr var uzvarēt visām atlikušajām n vērtībām.

Apskatām mazākās n vērtības.

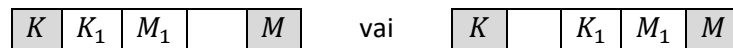
Ja $n = 3$, tad uzvar Kims, jo viņš var veikt vienu gājienu, bet Māris gājienu nevar veikt.



Ja $n = 4$, tad uzvar Kims, jo viņš var veikt vienu gājienu, bet Māris gājienu nevar veikt.



Ja $n = 5$, tad uzvar Māris, jo Kims var veikt pirmo gājienu un Māris veic otro gājienu, pēc kura Kims vairāk nevar veikt gājienu.



Pamatosim, ka Māris vienmēr var uzvarēt, ja $n = 5; 8; 11; 14; \dots$ jeb $n = 3k + 2$, kur $k \in \mathbb{N}$. Ievērojam, ka katrā savā gājienā Māris var panākt, ka taisnstūra garums samazinās par 3 rūtiņām (iegūst gadījumu $n = 3k + 2 - 3 = 3k - 1$ utt.) – ja Kims savā gājienā kauliņu pārvieto par vienu (divām) rūtiņu, tad attiecīgi Māris savā gājienā kauliņu pārvieto par divām (vienu) rūtiņu. Šādi rīkojoties, kādā brīdī būs situācija, kad $n = 5$, un Māris uzvar.

Pamatosim, ka Kims vienmēr var uzvarēt atlikušajām n vērtībām:

- ja $n = 3; 6; 9; \dots$ jeb $n = 3k$, tad savā pirmajā gājienā Kims kauliņu pārvieto par 1 rūtiņu un paliek taisnstūris ar garumu $3k - 1$, un gājiens ir Mārim. Pēc katra Māra gājiena Kims panāk situāciju, ka taisnstūra garums šo divu gājienu samazinās par 3 rūtiņām (Kims rīkojas pēc tādas pašas stratēģijas kā Māris). Šādi rīkojoties, kādā brīdī būs situācija, kad $n = 5$ un Mārim jāveic gājiens (un tā ir zaudējoša pozīcija), un Kims uzvar.
- ja $n = 4; 7; 10; \dots$ jeb $n = 3k + 1$, tad savā pirmajā gājienā Kims kauliņu pārvieto par 2 rūtiņām un paliek taisnstūris ar garumu $3k - 1$, un gājiens ir Mārim, rīkojoties tāpat kā iepriekš, Kims uzvar.

10.5. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 3abc$.

Atrisinājums. Ievērojam, ka vienādojums ir simetrisks attiecībā pret a, b, c vērtībām, tāpēc, nezaudējot vispārīgumu, var pieņemt, ka $a \leq b \leq c$. Abas vienādojuma puses dalot ar $abc > 0$, iegūstam $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) = 3$.

Ja $a \geq 3$, tad

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) < \left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{64}{27} < 3.$$

Tātad, ja $a \geq 3$, tad vienādojumam atrisinājuma nav. Aplūkosim atlikušos gadījumus, kad $a = 1$ vai $a = 2$.

Ja $a = 1$, tad iegūstam:

$$\begin{aligned}2(b + 1)(c + 1) &= 3bc; \\2bc + 2b + 2c + 2 &= 3bc; \\bc - 2b - 2c + 4 &= 6; \\(b - 2)(c - 2) &= 6.\end{aligned}$$

Iespējamie atrisinājumi (ņemot vērā, ka $b \leq c$) ir $b = 3, c = 8$ un $b = 4, c = 5$.

Ja $a = 2$, tad iegūstam

$$\begin{aligned}3(b + 1)(c + 1) &= 6bc; \\bc + b + c + 1 &= 2bc; \\bc - b - c + 1 &= 2; \\(b - 1)(c - 1) &= 2.\end{aligned}$$

Iespējamais atrisinājums (ņemot vērā, ka $b \leq c$) ir $b = 2$ un $c = 3$.

Līdz ar to esam aplūkojuši visus iespējamus gadījumus un ieguvuši atrisinājumus $(1; 3; 8)$, $(1; 4; 5)$ un $(2; 2; 3)$.

Sākotnēji pieņemām, ka $a \leq b \leq c$. Tātad der jebkura iepriekšminēto atrisinājumu skaitļu permutācija un pavisam ir 15 atrisinājumi:

$(1; 3; 8)$	$(1; 8; 3)$	$(3; 1; 8)$	$(3; 8; 1)$	$(8; 1; 3)$	$(8; 3; 1)$
$(1; 4; 5)$	$(1; 5; 4)$	$(4; 1; 5)$	$(4; 5; 1)$	$(5; 1; 4)$	$(5; 4; 1)$
$(2; 2; 3)$	$(2; 3; 2)$	$(3; 2; 2)$			

11.1. Atrast divas tādas reālas pozitīvas x vērtības, ka $2x^x = \sqrt{2}$.

Atrisinājums. Der $x = \frac{1}{2}$ un $x = \frac{1}{4}$. Pārbaudām, ka iegūta patiesa vienādība:

- $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2};$
- $2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{4}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

Piezīme. Citu derīgu reālu pozitīvu vērtību nav.

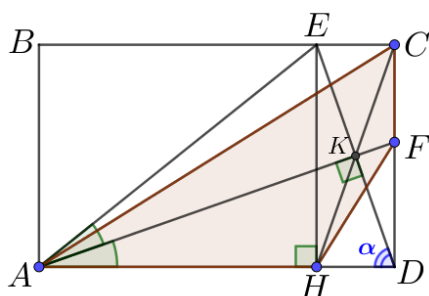
11.2. Zināms, ka naturālam skaitlim A ir tieši 111 dažādi naturāli dalītāji. Pierādīt, ka A nedalās ar 216.

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka A dalās ar 216. Tā kā $216 = 2^3 \cdot 3^3$, tad skaitli A var uzrakstīt formā $A = 2^k \cdot 3^m \cdot p_1^{s_1} \dots p_r^{s_r}$, kur $k \geq 3$ un $m \geq 3$. Skaitlim A ir $(k+1)(m+1)(s_1+1)(s_2+1) \dots (s_r+1)$ dažādi dalītāji; turklāt $k+1 \geq 4$ un $m+1 \geq 4$. Taču skaitli $111 = 37 \cdot 3$ nevar sadalīt reizinājumā, kurā divi reizinātāji ir lielāki vai vienādi ar 4. Tātad pieņēmums ir aplams. Līdz ar to esam pierādījuši, ka skaitlis A nedalās ar 216.

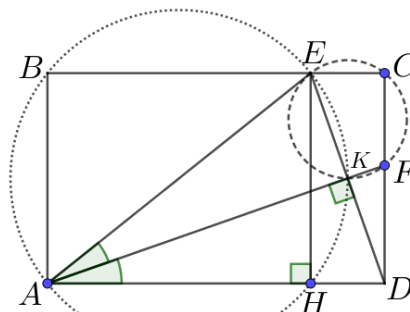
11.3. Dots taisnstūris $ABCD$, kuram $AB < BC$. Uz malas BC ir izvēlēts tāds punkts E , ka $AE = AD$. Leņķa DAE bisektrise krusto malu CD punktā F . Trijstūrī ADE novilkts augstums EH . Pierādīt, ka punkti A, H, F, C atrodas uz vienas riņķa līnijas!

1. atrisinājums. Vienādsānu trijstūrī DAE ir novilkta bisektrise AK , tātad tā ir arī augstums un mediāna, no kā izriet, ka $AK \perp ED$ un K ir taisnstūra $ECDH$ diagonāļu krustpunkts (skat. 7. att.). Pamatosim, ka $\angle AHC = \angle AFC$, tad ap četrstūri $AHFC$ varēs apvilkt riņķa līniju, līdz ar to punkti A, H, F, C atradīsies uz vienas riņķa līnijas.

Apzīmējam $\angle ADK = \alpha$. Tādā gadījumā $\angle KHD = \angle ADK = \alpha$ (jo $ECDH$ ir taisnstūris, tā diagonāļu krustpunktā dalās uz pusēm un $\triangle DKH$ ir vienādsānu) un $\angle AHC = 180^\circ - \angle KHD = 180^\circ - \alpha$. Aplūkojam $\triangle KFD$. Tā kā $\angle KDF = 90^\circ - \alpha$, tad $\angle DFK = \alpha$. Līdz ar to $\angle AFC = 180^\circ - \angle DFK = 180^\circ - \alpha$ un esam ieguvuši, ka $\angle AHC = \angle AFC = 180^\circ - \alpha$.



7. att.



8. att.

2. atrisinājums. Ar K apzīmējam AF un DE krustpunktu. Trijstūris DAE ir vienādsānu trijstūris, tāpēc bisektrise AK ir arī augstums jeb $AK \perp ED$. Tad ap četrstūri $ECFK$ var apvilkt riņķa līniju, jo $\angle ECF + \angle EKF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, un ap četrstūri $AEKH$ var apvilkt riņķa līniju, jo $\angle AHE = \angle AKE = 90^\circ$ (skat. 8. att.). Tādā gadījumā pēc sekanšu īpašības iegūstam, ka $DH \cdot DA = DK \cdot DE$ (attiecībā pret riņķa līniju, kas apvilka ap $AEKH$) un $DK \cdot DE = DF \cdot DC$ (attiecībā pret riņķa līniju, kas apvilka ap $ECFK$). Tas nozīmē, ka $DH \cdot DA = DF \cdot DC$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $HACF$ var apvilkt riņķa līniju (no apgrieztās teorēmas) jeb punkti A, H, F, C atrodas uz vienas riņķa līnijas.

11.4. Dots regulārs piecstūris, kurā novilkas visas diagonāles, kas to sadala 11 daļās (skat. 9. att.).

a) Katrā daļā ierakstīt vienu naturālu skaitli no 1 līdz 11 (katrā daļā citu) tā, lai visos trijstūros, kam visas virsotnes ir arī dotā piecstūra virsotnes, ierakstīto skaitļu summa ir viena un tā pati!

b) Kāds skaitlis var būt ierakstīts daļā, kas apzīmēta ar X?



9. att.

Atrisinājums. a) Piemēram, skat. 10. att.

b) 1. atrisinājums. Pamatosim, ka daļā, kas apzīmēta ar X, var būt ierakstīts tikai skaitlis 1. Vispirms noskaidrosim, kāda ir vienā trijstūrī ierakstīto skaitļu summa. Visu ierakstīto skaitļu summa ir visu skaitļu no 1 līdz 11 summa, tātad 66. Doto piecstūri var sadalīt trīs trijstūros no vienas piecstūra virsotnes novelkot divas diagonāles. Tātad vienā trijstūrī ierakstīto skaitļu summa ir $M = 66 : 3 = 22$.

Apzīmējam $a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ un $b = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$ (skat. 11. att.).

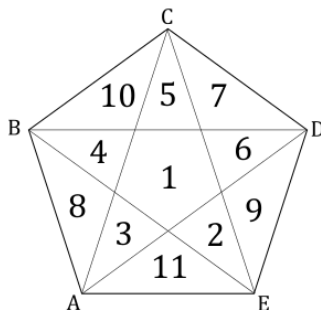
Saskaitot piecos platleņķa trijstūros ierakstīto skaitļu summas, iegūstam:

$$5M = 2a + b = (a + b + X) + a - X = 3M + a - X;$$

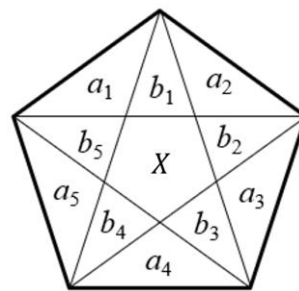
$$2M = a - X \leq 11 + 10 + 9 + 8 + 7 - X = 45 - X;$$

$$44 \leq 45 - X.$$

Tātad der tikai $X = 1$.

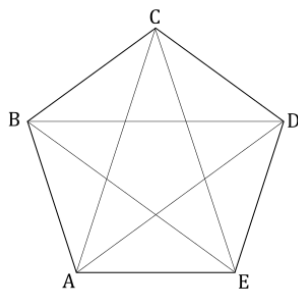


10. att.

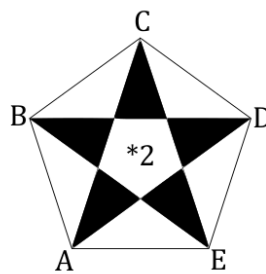


11. att.

b) 2. atrisinājums. Pamatosim, ka daļā, kas apzīmēta ar X, var būt ierakstīts tikai skaitlis 1. Vispirms noskaidrosim, kāda ir vienā trijstūrī ierakstīto skaitļu summa. Visu ierakstīto skaitļu summa ir visu skaitļu no 1 līdz 11 summa, tātad 66. Doto piecstūri var sadalīt trīs trijstūros, piemēram, $\triangle ABC$, $\triangle ACE$ un $\triangle CDE$ (skat. 12. att.). Tātad vienā trijstūrī ierakstīto skaitļu summa ir $66 : 3 = 22$.



12. att.



13. att.

Ja saskaita $\triangle ACE$ un $\triangle BDE$, bet atņem $\triangle ADE$ ierakstītos skaitļus, tad ir saskaitīti visi skaitļi, kas ierakstīti iekrāsotajos apgabalos, un divas reizes pieskaitīts skaitlis, kas ierakstīts centrālajā daļā (skat. 13. att.).

Skaitļu summa, kas ierakstīta atbilstošajās daļās, ir $22 + 22 - 22 = 22$.

Mazākā iespējamā iekrāsotajās daļās ierakstīto skaitļu summa ir $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Tātad centrālajā daļā ierakstītais skaitlis nevar būt lielāks kā $(22 - 15) : 2 = 3,5$ jeb centrā var būt ierakstīts skaitlis 1, 2 vai 3.

Ja centrā ir 2, tad iekrāsotajās daļās skaitļu summa ir 18, kas ir mazāka nekā piecu mazāko skaitļu no atlikušajiem summa $1 + 3 + 4 + 5 + 6 = 19$.

Ja centrā ir 3, tad iekrāsotajās daļās ierakstīto skaitļu summa ir 16, kas ir mazāka nekā piecu mazāko skaitļu no atlikušajiem summa $1 + 2 + 4 + 5 + 6 = 18$.

Tātad esam pierādījuši, ka vidū var būt ierakstīts tikai 1, bet skaitļi no 7 līdz 11 izvietoti daļās gar piecstūra malām.

- 11.5.** Doti tādi reāli skaitļi a , b un c , ka $a^2 + c - bc = b^2 + a - ac = c^2 + b - ab$. Vai noteikti $a = b = c$?

Atrisinājums. No pirmās vienādības iegūstam:

$$a^2 + c - bc = b^2 + a - ac;$$

$$a^2 - b^2 + ac - bc = a - c;$$

$$(a - b)(a + b + c) = a - c.$$

Ja $a = b$, tad no iegūtās vienādības izriet, ka $a = c$, tātad $a = b = c$. Tāpēc pieņemsim, ka $a \neq b$.

Līdzīgi no pārējām divām vienādībām iegūstam:

$$(b - c)(a + b + c) = b - a;$$

$$(a - c)(a + b + c) = b - c.$$

Reizinot iegūtās vienādības, iegūstam

$$(a - b)(b - c)(a - c)(a + b + c)^3 = (a - c)(b - a)(b - c);$$

$$(a - b)(b - c)(a - c)(a + b + c)^3 = -(a - c)(a - b)(b - c).$$

Ņemot vērā, ka nekādi divi no skaitļiem a , b un c nav vienādi, iegūstam, ka

$$(a + b + c)^3 = -1 \Rightarrow a + b + c = -1.$$

Tādā gadījumā

$$(a - b)(a + b + c) = a - c;$$

$$(a - b)(-1) = a - c;$$

$$b + c - 2a = 0;$$

$$b + c + a - 3a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}.$$

Līdzīgi iegūst, ka $b = -\frac{1}{3}$, bet tā ir pretruna ar pieņēmumu, ka $a \neq b$.

Tātad noteikti $a = b = c$.

- 12.1.** Doti tādi naturāli skaitļi a , b un c , ka skaitlis $\frac{a\sqrt{2}+b}{b\sqrt{2}+c}$ ir racionāls. Pierādīt, ka $ab + bc + ac$ dalās ar $a + b + c$.

Atrisinājums. Dotās daļas skaitītāju un saucēju reizinām ar saucēja saistīto izteiksmi

$$\frac{a\sqrt{2}+b}{b\sqrt{2}+c} = \frac{(a\sqrt{2}+b)(b\sqrt{2}-c)}{(b\sqrt{2}+c)(b\sqrt{2}-c)} = \frac{2ab - bc + \sqrt{2}(b^2 - ac)}{2b^2 - c^2}.$$

Tā kā skaitlis ir racionāls, tad skaitītājā jābūt veselam skaitlim (jo saucējā ir vesels skaitlis), tāpēc $b^2 - ac = 0$ jeb $b^2 = ac$.

Tādā gadījumā $ab + bc + ca = ab + bc + b^2 = b(a + b + c)$ un tas dalās ar $a + b + c$.

- 12.2.** Atrast divus tādu veselu skaitļu a , b un c trijniekus $(a; b; c)$, ka $972^a \cdot 32^b \cdot 9^c = 1$.

Atrisinājums. Der, piemēram, $(0; 0; 0)$ un $(10; -4; -25)$. Pārbaudām, ka šie skaitļu trijnieki atbilst nosacījumiem:

$$\circ \quad 972^0 \cdot 32^0 \cdot 9^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1;$$

$$\circ \quad 972^{10} \cdot 32^{-4} \cdot 9^{-25} = (2^2 \cdot 3^5)^{10} \cdot (2^5)^{-4} \cdot (3^2)^{-25} = 2^{20} \cdot 3^{50} \cdot 2^{-20} \cdot 3^{-50} = 2^0 \cdot 3^0 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Piezīme. Ir bezgalīgi daudz veselu skaitļu trijnieku, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem. Vispārīgo atrisinājumu var atrast, sadalot skaitļus $972 = 2^2 \cdot 3^5$; $32 = 2^5$ un $9 = 3^2$ pirmreizējākos un ievietojot tos dotajā vienādībā: $2^{2a+5b} \cdot 3^{5a+2c} = 2^0 \cdot 3^0$.

No tā iegūstam lineāru vienādojumu sistēmu (kāpinātājiem pie vienādām bāzēm jābūt vienādiem):

$$\begin{cases} 2a + 5b = 0 \\ 5a + 2c = 0 \end{cases} \text{ jeb } \begin{cases} 5b = -2a \\ 2c = -5a \end{cases}$$

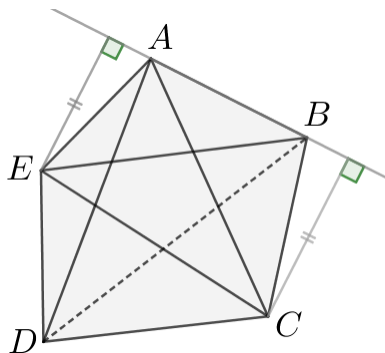
No iegūtās sistēmas pirmā vienādojuma redzams, ka $-2a$ dalās ar 5, tātad a dalās ar 5; no trešā vienādojuma redzams, ka $-5a$ dalās ar 2, tātad a dalās ar 2. Tātad $a = 10k$, kur k ir vesels skaitlis, $b = -4k$ un $c = -25k$.

Tātad der visi skaitļu trijnieki $(10k; -4k; -25k)$, kur k ir jebkurš vesels skaitlis.

- 12.3.** Izliektā piecstūrī četras no diagonālēm ir paralēlas kādai no piecstūra malām. Pierādīt, ka arī piektā diagonāle ir paralēla kādai piecstūra malai!

Atrisinājums. Apzīmējam piecstūri ar $ABCDE$ un pieņemam, ka $AB \parallel CE$, $BC \parallel AD$, $CD \parallel BE$ un $DE \parallel AC$. Pamatosim, ka arī $AE \parallel BD$.

Tā kā $AB \parallel CE$, tad augstumi, kas novilkti no punktiem C un E pret malu AB ir vienādi kā attālumi starp paralēlām taisnēm (skat. 14. att.). No šī varam secināt, ka $S_{ABE} = S_{ABC}$, jo novilkto augstumi pret vienu un to pašu malu AB ir vienāda garuma.



14. att.

Līdzīgi var pamatot, ka $S_{ABC} = S_{BCD}$, jo augstumi, kas novilkti no punktiem A un D pret malu BC , ir vienāda garuma, jo $BC \parallel AD$. Šādi turpinot, iegūstam, ka $S_{BCD} = S_{CDE}$, jo $CD \parallel BE$, un $S_{CDE} = S_{ADE}$, jo $DE \parallel AC$.

Tātad esam ieguvuši, ka $S_{ABE} = S_{ABC} = S_{BCD} = S_{CDE} = S_{ADE}$ jeb $S_{ABE} = S_{ADE}$. Trijstūriem ABE un ADE ir kopīga mala AE . Tā kā šo trijstūru laukumi ir vienādi, tad augstumiem, kas novilkti pret šo malu, arī jābūt vienādiem. Tātad attālumi starp nogriežņiem AE un BD ir vienādi. Secinām, ka šie nogriežņi ir paralēli, tas ir, $AE \parallel BD$.

- 12.4.** Pie apaļa galda apsēdušies daži rūķīši un katram no viņiem sākumā ir pāra skaits konfekšu. Ik pēc brīža burvju feja pamāj ar nūjiņu un tad visi rūķīši reizē dalās ar savām konfektēm – katrs rūķītis atdod pusi no savām konfektēm blakus pa labi sēdošajam rūķītim. Pēc tam katram rūķītim, kam atlicis nepāra skaits konfekšu, feja iedod vienu papildu konfektī. Pierādīt, ka pēc galīga šādu gājienu skaita visiem rūķīšiem būs vienāds skaits konfekšu!

Atrisinājums. Vispirms pamatosim, ka lielākais iespējamais skaits konfekšu, kas var būt katram rūķītim pēc gājiena, nepalielinās. Ievērosim, ka kādam rūķītim esošo konfekšu skaits var kļūt lielāks tikai tad, ja viņš gājienā iegūst vairāk konfekšu nekā atdod, tas ir, pa kreisi sēdošajam rūķītim ir lielāks konfekšu skaits. Pieņemsim, ka mums ir kāds rūķītis M ar m konfektēm, un viņam pa kreisi sēž rūķītis ar n konfektēm, turklāt $m < n$. Pēc gājiena rūķītim M būs ne vairāk kā $\frac{m}{2} + \frac{n}{2} + 1 = \frac{m+n}{2} + 1$ konfekšu. Tā kā $m < n$, tad $m < \frac{m+n}{2} < n$. Tā kā visi šie skaitļi ir naturāli, tad, pieskaitot 1 pie šīs vidējās vērtības, iegūstam, ka $\frac{m+n}{2} + 1 \leq n$. Tātad rūķīša M konfekšu skaits pēc katra gājiena nepārsniedz tam kreisi sēdošā rūķīša konfekšu skaitu n jeb tā lielākais iespējamais konfekšu skaits nepalielinās. Ja n ir lielākais iespējamais konfekšu skaits, tad pēc katra gājiena rūķīšu skaits ar šādu konfekšu skaitu, nepalielinās.

Līdzīgi varam pierādīt, ka mazākais iespējamais konfekšu skaits, kas var būt katram rūķītim katrā gājienā, nesamazinās. Ja rūķītim M ir m konfektes, un rūķītim, kas sēž pa kreisi no viņa, ir n konfektes, turklāt $m > n$, tad pēc gājiena rūķītim M būs ne mazāk kā $\frac{m+n}{2}$ konfekšu ($\frac{m+n}{2} > n$). Tātad, ja n ir mazākais iespējamais konfekšu skaits, tad pēc katra gājiena rūķīšu skaits ar šādu konfekšu skaitu, nepalielinās. Turklāt šādu rūķīšu skaits samazinās vai arī mazākais iespējamais konfekšu skaits palielinās.

Apskatīsim rūķīti ar vismazāko konfekšu skaitu x (vai vienu no tādiem), kam pa kreisi sēž rūķītis ar vairāk konfektēm (ja šādu rūķīšu nav, tad visiem ir vienāds konfekšu skaits). Pēc gājiena šī rūķīša konfekšu skaits pieaugs, tāpēc rūķīšu skaits, kam bija tieši x konfektes, samazinās par 1. Ja šis bija vienīgais rūķītis ar x konfektēm, tad mazākais konfekšu skaits, kas var būt kādam rūķītim, skaits ir pieaudzis.

Tā kā lielākais konfekšu skaits nepalielinās, un katru gājienu vai nu palielinās mazākais konfekšu skaits, vai arī samazinās rūķīšu skaits ar mazāko konfekšu skaitu, tad pēc galīga skaita gājienu mazākais konfekšu skaits sakrītīs ar lielāko konfekšu skaitu, tas ir, visiem rūķīšiem būs vienāds skaits konfekšu.

- 12.5.** Dota tabula ar izmēriem $n \times n$ rūtiņas. Katrā tabulas rūtiņā ierakstīts kāds naturāls skaitlis no 1 līdz n^2 , katrā rūtiņā atšķirīgs skaitlis. Tabulu saucim par sakarīgu, ja katrā kvadrātā ar izmēriem 2×2 rūtiņas ierakstīto skaitļu reizinājums dalās ar 5.

a) Pierādīt, ka tabula nav sakarīga, ja n ir pāra skaitlis.

b) Kāds ir lielākais nepāra skaitlis n , kuram tabula var būt sakarīga?

Atrisinājums. a) Tā kā n ir pāra skaitlis, tad $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, un kopā tabulā ir $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$ rūtiņu. Tādā gadījumā tabulu var sadalīt ar k^2 kvadrātos, kuru izmēri ir 2×2 rūtiņas. Lai katra šāda kvadrāta skaitļu reizinājums dalītos ar 5, tad kādā no rūtiņām ir jāatrodas skaitļa 5 daudzkārtņim. Tātad kopā nepieciešami k^2 atšķirīgi skaitļi, kas dalās ar 5, tas ir, 5; 10; 15; ...; $5k^2$. Lielākais tabulā ierakstītais skaitlis ir $4k^2 < 5k^2$, tāpēc nepietiek skaitļa 5 daudzkārtņu, ko ierakstīt katrā no kvadrātiem ar izmēriem 2×2 . Līdz ar to tabula nav sakarīga.

b) Pamatosim, ka lielākā n vērtība ir 9. Ja $n = 2k + 1$ ir nepāra skaitlis, tad tabulu, neieskaitot pēdējo rindu un pēdējo kolonnu, var sadalīt k^2 kvadrātos, kuru izmēri ir 2×2 rūtiņas. Tādā gadījumā nepieciešami vismaz k^2 skaitļa 5 daudzkārtņi, lai iegūtu sakarīgu tabulu. Pavisam tabulā ierakstīti $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ skaitļi, tāpēc nepieciešams, lai $4k^2 + 4k + 1 \geq 5k^2$ (lai pietiktu skaitļa 5 daudzkārtņu). Līdz ar to iegūstam nevienādību $k^2 \leq 4k + 1$, kas ir patiesa naturāliem skaitļiem $k \leq 4$, tāpēc lielākā k vērtība ir 4 un attiecīgi lielākā n vērtība ir 9. Skaitļus kvadrātā ar izmēriem 9×9 rūtiņas var sarakstīt, piemēram, kā redzams 15. att., kurā atlikušos skaitļus var ierakstīt patvaļīgi.

	5		10		15		20	
	25		30		35		40	
	45		50		55		60	
	65		70		75		80	

15. att.