LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 63. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

5. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Vai var atrast 7 naturālus skaitļus (ne obligāti dažādus), kuru summa vienāda ar to reizinājumu?

2. Parādi, kā kvadrātu var sadalīt četros vienādos piecstūros.

3. Izveido sešciparu skaitli, kas dalās ar 7 un kura pierakstā katrs no cipariem 1, 2, 3, 4, 5, 8 izmantots tieši vienu reizi.

4. Piecstūra katrā virsotnē ieraksti vienu naturālu skaitli tā, lai katras malas galapunktos ierakstīto skaitļu lielākais kopīgais dalītājs būtu 1, bet katras diagonāles galapunktos ierakstīto skaitļu lielākais kopīgais dalītājs būtu lielāks nekā 1.

5. Doti 13 punkti, daži no šiem punktiem savienoti ar nogriežņiem. Vai var būt tā, ka no katra punkta iziet tieši 3 vai 5 nogriežņi?

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 63. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

6. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

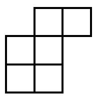
1. Atrodi tādus četrus dažādus naturālus skaitļus *a*, *b*, *c*, *d*, ka $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$.

2. Uz tāfeles rindā uzrakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 10. Roberts izvēlas jebkurus divus no tiem, nodzēš tos un rindas galā uzraksta šo skaitļu starpību (ja skaitļi ir dažādi, starpību aprēķina, no lielākā skaitļa atņemot mazāko). Šo darbību atkārto, kamēr uz tāfeles paliek viens skaitlis.
a) Vai iespējams, ka šis skaitlis ir 1?
b) Vai iespējams, ka šis skaitlis ir 0?

3. Vai plaknē var uzzīmēt
a) 12-stūri,
b) 13-stūri
un riņķa līniju, kas krusto uzzīmētā daudzstūra katru malu tieši vienā punktā? (Riņķa līnija nepieskaras daudzstūra malām un neiet caur tā virsotnēm.)

4. Atrast nenulles ciparus (ne obligāti dažādus):
a) *p*, *q* un *r* tādus, ka skaitlis $\overline{pqr}$ dalās ar $\overline{qr}$ un $\overline{qr}$ dalās ar *r*;
b) *k*, *l*, *m* un *n* tādus, ka skaitlis $\overline{klmn}$ dalās ar $\overline{lmn}$, $\overline{lmn}$ dalās ar $\overline{mn}$ un $\overline{mn}$ dalās ar *n*;
c) *a*, *b*, *c*, *d* un *e* tādus, ka skaitlis $\overline{abcde}$ dalās ar $\overline{bcde}$, $\overline{bcde}$ dalās ar $\overline{cde}$, $\overline{cde}$ dalās ar $\overline{de}$ un $\overline{de}$ dalās ar *e*.
(*Pieraksts* $\overline{xyzt}$ *nozīmē, ka četrciparu skaitlī ir x tūkstoši, y simti, z desmiti un t vieni.*)

5. Vai kvadrātā 6 × 6 rūtiņas var iekrāsot **a)** 7 rūtiņas; **b)** 6 rūtiņas tā, lai atlikušajā daļā vairs nevarētu ievietot nevienu 1. zīmējumā attēloto figūru (tā var būt pagriezta vai apgriezta citādi)?
Figūra var tikt novietota tikai tā, lai tās malas ietu pa rūtiņu līnijām.



1. zīm.

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola

Latvijas 63. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

7. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

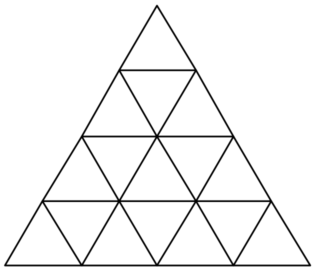
1. Naturālie skaitļi no 1 līdz 18 sadalīti pa pāriem tā, ka katrā pārī esošo skaitļu summa ir naturāla skaitļa kvadrāts. Ar ko pārī apvienots skaitlis 1?
Par skaitļa kvadrātu sauc skaitļa reizinājumu pašam ar sevi.

2. Cik starp pirmajiem 2013 naturālajiem skaitļiem ir tādu skaitļu x, ka skaitlis $x(x+1)(x+2)$ dalās ar 111?

3. Vai eksistē tāds **a)** 11-stūris; **b)** 12-stūris, kuram 8 virsotnes atrodas uz vienas taisnes?

4. Vai pa riņķi var uzrakstīt 13 naturālus skaitļus tā, lai jebkuru blakus esošu skaitļu starpība būtu 6, 10, 14 vai 18?

5. Vienādmalu trijstūris ar malas garumu 4 sadalīts 16 vienādos trijstūros (skat. 2. zīm.). Katrā mazajā trijstūrī ir ierakstīts viens skaitlis, pavisam ierakstīti septiņi trijnieki un deviņi piecinieki.
Pierādi, ka var izvēlēties četrus trijstūrus, kas veido vienādmalu trijstūri ar malas garumu 2 un kuros ierakstīto skaitļu summa ir vismaz 18.



2. zīm.

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 63. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

8. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Skaitli 8999999 uzraksti kā divu veselu skaitļu reizinājumu tā, lai katrs no reizinātājiem ir lielāks nekā 1.

2. Trijstūrī ABC novilkts augstums BH, bisektrise BL un mediāna BM. Zināms, ka punkts L atrodas starp punktiem M un H, turklāt $\angle MBL = \angle LBH$, $\angle CBH = \angle BAH$ un BM = BC. Nosaki trijstūra ABC leņķu lielumus!

3. Cik ir tādu četrciparu skaitļu, kuru pierakstā ir vismaz viens pāra cipars?

4. Kvadrātā 3×3 rūtiņas ieraksti deviņus dažādus naturālus skaitļus tā, lai katrā rindiņā ierakstīto skaitļu reizinājums un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu reizinājums būtu viens un tas pats.

5. Rindā kaut kādā secībā stāv 10 zēni un 10 meitenes. Divus bērnus var mainīt vietām, ja starp tiem stāv ne vairāk kā 9 citi bērni.

a) Pierādi, ka ar 10 maiņām noteikti pietiek, lai panāktu, ka vispirms stāv 10 zēni un pēc tam 10 meitenes.

b) Pierādi, ka sākuma situācija var būt tāda, ka ar 9 maiņām nevar panākt, ka vispirms stāv 10 zēni un pēc tam 10 meitenes.

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 63. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis, kura kvadrāta pēdējie 9 cipari ir 987654321 ?

2. Regulāra trijstūra iekšpusē patvaļīgi izvēlēts punkts *K*. Pierādīt, ka attālumu summa no punkta *K* līdz trijstūra malām nav atkarīga no punkta *K* izvēles.

3. Taisnstūra malu garumi ir veseli skaitļi, bet tā perimetrs un laukums izsakās ar vienu un to pašu skaitli. Atrast visus šādus taisnstūrus.

4. Zināms, ka a_1, a_2, ..., a_{2013} ir tādi naturāli skaitļi, ka $a_1 > \sqrt{a_2}$, $a_2 > \sqrt{a_3}$, ..., $a_{2012} > \sqrt{a_{2013}}$ un $a_{2013} > \sqrt{a_1}$. Aprēķināt mazāko iespējamo summas $a_1 + a_2 + ... + a_{2013}$ vērtību.

5. Profesora Cipariņa olimpiādē bija 3 uzdevumi. Tajā piedalījās 100 skolēni. Pierādīt, ka atradīsies vismaz 13 skolēni, kas izrēķināja vienus un tos pašus uzdevumus (vai arī neizrēķināja nevienu uzdevumu).
Katrs skolēns katru uzdevumu vai nu izrēķināja vai neizrēķināja, daļēji risinājumi netika iesniegti.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 63. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Zināms, ka $a_1, a_2, ..., a_{10}$ ir dažādi naturāli skaitļi tādi, ka $a_1 > \sqrt{a_2}$, $a_2 > \sqrt{a_3}$, ..., $a_9 > \sqrt{a_{10}}$ un $a_{10} > \sqrt{a_1}$. Aprēķināt mazāko iespējamo summas $a_1 + a_2 + ... + a_{10}$ vērtību.

2. Trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas un ievilktās riņķa līnijas centri ir simetriski attiecībā pret vienu no trijstūra ABC malām. Aprēķināt trijstūra ABC leņķus.

3. Vai eksistē tāda trijstūra piramīda, kurai katras skaldnes perimetrs ir 2013 un kurai nav vienāda garuma šķautņu?

4. Ansītis aprēķināja skaitļu 2^{2013} un 5^{2013} vērtības un iegūtos skaitļus uzrakstīja vienu aiz otra. Cik cipari uzrakstīti?

5. Doti 7 dažādi naturāli skaitļi, kuri nepārsniedz 21. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties divus skaitļu pārus, kuru starpības ir vienādas. (Skaitļu pāriem var būt arī kopīgs skaitlis, starpību aprēķina no lielākā skaitļa atņemot mazāko.)

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 63. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $(x-y)(x+y)=x$.

2. Caur paralelograma ABCD virsotnēm B un D ir novilkta riņķa līnija, kas krusto malas AB, DA, BC un CD attiecīgi to iekšējos punktos P, Q, R un S. Pierādīt, ka $\mathrm{PQ} \parallel \mathrm{RS}$.

3. Dotas sešas vienāda izskata monētas un sviras svari bez atsvariem. Četras no monētām sver 10 gramus katra, pārējās divas sver 9 gramus katra. Kā ar divām svēršanām atrast vismaz vienu monētu, kas sver 9 gramus?

4. Polinoms $P(x)$ ar veseliem koeficientiem četrām veselām x vērtībām pieņem vērtību 2000. Pierādīt, ka nav tādas veselas x vērtības, pie kuras dotais polinoms pieņem vērtību 2013.

5. Plaknē doti $n \geq 3$ patvaļīgi izvietoti punkti. Zināms, ka nekādi 3 no tiem neatrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka eksistē tāds n-stūris (iespējams, ieliekts), kura virsotnes atrodas šajos punktos. Daudzstūra malas nedrīkst krustoties.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 63. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

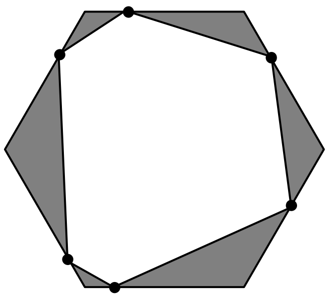
1. Zināms, ka a un b ir divi dažādi naturāli skaitļi. Pierādīt, ka

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}>\frac{1}{4(a+b)}.$$

2. Nogrieznis BP ir trijstūra ABC bisektrise, punkti N un M ir attiecīgi malu AB un AC tādi iekšēji punkti, ka $AN=PC$ un $AM=BC$. Taisnes BP un MN krustojas punktā X. Pierādīt, ka $\Delta NBX \sim \Delta PBC$.

3. Dots, ka $n > 1$ ir tāds naturāls skaitlis, kas, dalot ar 7, dod atlikumu 1. Pierādīt, ka skaitļa $n^2 + 3n + 3$ visi pirmreizinātāji ir mazāki nekā n^2.

4. Dots regulārs sešstūris ar malas garumu 1. Uz katras malas ir patvaļīgi izvēlēts viens punkts (skat. 1. zīm.). Pierādīt, ka vismaz viena iekrāsotā trijstūra laukums nepārsniedz $\frac{\sqrt{3}}{16}$.



1. zīm.

5. Parlamentā ir 2013 deputāti; katram no viņiem ir domstarpības ar ne vairāk kā d $(0 \le d \le 2012)$ citiem deputātiem. Domstarpības ir abpusējas: ja A ir domstarpības ar B, tad arī B ir domstarpības ar A. Pierādīt, ka deputātus var sadalīt $d + 1$ komisijā tā, lai nekādiem diviem vienas komisijas locekļiem nebūtu domstarpību savā starpā.