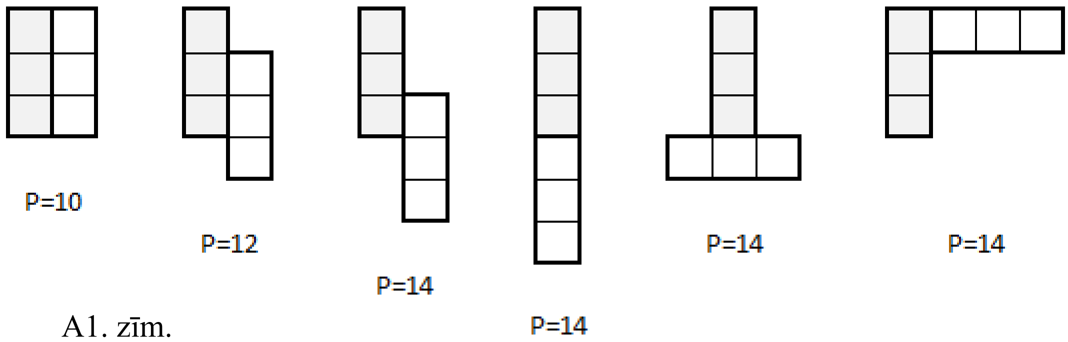
5. klase

5.1. *Uz rūtiņu lapas uzzīmēti divi taisnstūri ar izmēriem* 1×3 *rūtiņas tā, ka tie nepārklājas un saskaras pa veselu skaitu rūtiņu malām, veidojas daudzstūris, no* 6 *rūtiņām, kura malas iet pa rūtiņu līnijām. Katrs no taisnstūriem var būt novietots vertikāli vai horizontāli. Kāds var būt iegūtās figūras perimetrs?* (*Atrodi visas iespējamās vērtības un pamato, kāpēc nav citu!*)

Katra taisnstūra perimetrs ir $2\cdot(1+3)=8$, tātad „*kopējais*” perimetrs ir 16. Saliekot kopā, taisnstūri var saskarties ar 1, 2 vai 3 rūtiņu malām (skat. A1. zīm.); ar katru rūtiņu malu, kas tiem saskaras, kopējais perimetrs samazinās par 2. Tātad iegūtajai figūrai perimetrs var būt $16-2=14$, $16-4=12$ vai $16-6=10$.



A1. zīm.

5.2. *Naturālā vienpadsmitciparu skaitlī vienādus ciparus aizstāja ar vienādiem burtiem, bet dažādus - ar dažādiem; ieguva pierakstu PĀRSTEIGUMS. Zināms, ka šis skaitlis dalās ar* 18. *Noteikt, kurš cipars aizstāts ar burtu S. Atbildi pamatot!*

Vārdā PĀRSTEIGUMS pavisam ir 11 burti, no tiem pirmie 10 dažādi, tātad pirmie 10 burti apzīmē visus 10 ciparus. Tad

$$\text{P+Ā+R+S+T+E+I+G+U+M+S}=0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+\text{S}=45+\text{S}.$$

Tā kā dotais vienpadsmitciparu skaitlis dalās ar $18=2\cdot9$, tad tas ir pāra skaitlis (tātad S ir pāra cipars) un tā ciparu summa dalās ar 9 (t.i., $45+\text{S}$ dalās ar 9).

Lai summa $45+\text{S}$ dalītos ar 9, saskaitāmajam A ir jādalās ar 9 (ja viens saskaitāmais dalās ar 9, tad, lai summa dalītos ar 9, arī otram saskaitāmajam jādalās ar 9). Vienīgie cipari, kas dalās ar 9, ir 0 un 9. Tā kā S ir pāra skaitlis, tad cipars 9 neder.

Tātad ar burtu S ir aizstāts cipars 0.

5.3. *No četrciparu skaitļa A atņemot trīsciparu skaitli B, iegūst* 8002. *Šos pašus skaitļus A un B saskaitot, iegūst piecciparu skaitli. Atrast A un B.*

No uzdevuma nosacījumiem seko, ka, pieskaitot skaitlim 8002 skaitli *B* divas reizes, iegūst vismaz 10 000. Tas ir iespējams tikai, ja $B=999$ (ja $B<999$, tad $8002+B+B<10\,000$).

Tāpēc $B=999$ un $A=8002+B=8002+999=9001$.

Piezīme. Uzdevumu var risināt arī apskatot vislielāko trīsciparu skaitli 999 un pamatojot, ka mazāki trīsciparu skaitļi uzdevuma nosacījumus neapmierina.

5.4. *Grāmatas lappuses ir sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no* 1 *līdz* 2014 *pēc kārtas. Cik lappušu numuros ir sastopams cipars* 7*?*

1. risinājums. Vispirms noskaidrosim, cik lappušu numuros pirmajās 1000 lappusēs nav izmantots cipars 7. Aizstāsim 1000 lappusi ar 0-to lappusi, tad visi lappušu numuri ir trīsciparu skaitļi (viencipara un divciparu lappusēm priekšā var pierakstīt divas vai vienu nulli). Katru ciparu var izvēlēties 9 veidos (der visi cipari izņemot 7), tāpēc šādu lappušu skaits ir $9\cdot 9\cdot 9=729$. Tātad cipars 7 ir izmantots $1000-729=271$ lappuses numurā. Tikpat daudz lappusēs cipars 7 ir izmantots otrajā tūkstotī. Vēl viens cipars 7 ir izmantots skaitlī 2007. Tātad kopā cipars 7 ir sastopams $271+271+1=543$ lappušu numuros.

2. risinājums. Pieņemsim, ka grāmatai ir vēl arī 0-tā lappuse. Tā kā tās numerācijā nav izmantots cipars 7, tad šāds pieņēmums neizmanīs rezultātu – aprēķināto lappušu numuru skaitu.

Starp pirmajām desmit lappusēm (no 0. līdz 9.) vienas numurā būs sastopams cipars 7.

Lai aprēķinātu lappušu ar 7 skaitu starp pirmajām 100 lappusēm (no 0. līdz 99.), nepieciešams ņemt vērā, ka septītnieks ir visās lappusēs no 70. līdz 79. (kopā 10 lappuses) un pārējos deviņos lappušu desmitos katrā vēl pa vienam – kopā 19 lappuses.

Tagad aprēķinām lappušu skaitu starp pirmajām 1000 lappusēm (no 0. līdz 999.). No 700. līdz 799. lappusei cipars 7 ir visās 100 lappusēs. Katrā no pārējiem deviņiem lappušu simtiem ir pa 19 lappusēm. Tātad pavisam $100+9\cdot 19=271$ lappuse.

Tieši tikpat lappušu ar ciparu 7 ir otrajā lappušu tūkstotī (no 1000. līdz 1999.). Tātad no 0. līdz 1999. lappusei cipars 7 ir sastopams 542 lappušu numuros. Vēl cipars 7 ir 2007. lappuses numurā.

Tātad no 1. līdz 2014. lappusei cipars 7 ir sastopams **543** lappušu numuros.

5.5. *Doti* 99 *punkti, daži no šiem punktiem savienoti ar nogriežņiem. Vai var būt tā, ka no katra punkta iziet nepāra skaits nogriežņu?*

Pieņemsim, ka tā var būt. Tad no katra no 99 punktiem iziet nepāra skaits nogriežņu. Tātad kopējais nogriežņu galapunktu skaits ir nepāra skaitlis, bet tas ir pretrunā ar to, ka nogrieznim ir tieši divi galapunkti. Tātad uzdevumā aprakstītā situācija nav iespējama.

6. klase

6.1. *Atrodiet kaut vienu tādu skaitli a, ka vienlaicīgi izpildās šādas īpašības:*

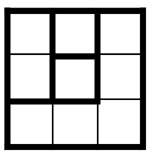
a) *noapaļojot* a, $3\cdot a$, $5\cdot a$, $7\cdot a$ *līdz veselam skaitlim, jānoapaļo uz leju;*

b) *noapaļojot* $2\cdot a$, $4\cdot a$, $6\cdot a$ *līdz veselam skaitlim, jānoapaļo uz augšu.*

Var pārbaudīt, ka der, piemēram, skaitlis $a=0{,}49$. Der arī citas a vērtības.

6.2. *Rūtiņu lapā uzzīmēt figūru, kuras malas iet pa rūtiņu līnijām un kuru var sadalīt četrās daļās tā, ka katra daļa sastāv no veselām rūtiņām un katra daļa saskaras ar katru citu daļu vismaz pa vienas rūtiņas malu. Vai prasītās figūras laukums var būt mazāks par 10 rūtiņām?*

Piemēram, skat. A2. zīm.



A2. zīm.

6.3. *Pareizā vienādībā* $4\cdot 4=16$ *var katru ciparu izmainīt tieši par* 1 *un atkal iegūt pareizu vienādību* $5\cdot 5=25$. *Atrast*

a) *kaut vienu piemēru ar tādu pašu īpašību, kurā reizina viencipara skaitli un trīsciparu skaitli,*

b) *kaut vienu piemēru ar tādu pašu īpašību, kurā reizina viencipara skaitli un divciparu skaitli, pie tam sākotnējā vienādībā ir vismaz četri dažādi cipari.*

Der, piemēram,

a) $1 \cdot 333 = 333$ un $2 \cdot 222 = 444$;

b) $3 \cdot 25 = 75$ un $4 \cdot 16 = 64$.

6.4. *Grāmatas lappuses ir sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no* 1 *līdz* 2014 *pēc kārtas. Cik lappušu numuros ir sastopams vismaz viens no cipariem* 3 *vai* 7*?*

1. risinājums. Vispirms noskaidrosim, cik lappušu numuros pirmajās 1000 lappusēs nav izmantots cipars 3 vai 7. Aizstāsim 1000 lappusi ar 0-to lappusi, tad visi lappušu numuri ir trīsciparu skaitļi (viencipara un divciparu lappusēm priekšā var pierakstīt divas vai vienu nulli). Katru ciparu var izvēlēties 8 veidos (der visi cipari izņemot 3 un 7), tāpēc šādu lappušu skaits ir $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$. Tātad cipars 3 vai 7 ir izmantots $1000 - 512 = 488$ lappušu numuros. Tikpat daudz lappusēs cipars 3 vai 7 ir izmantots otrajā tūkstotī. Vēl cipars 3 ir izmantots skaitlī 2003 un 2013, cipars 7 – skaitlī 2007. Tātad kopā cipars 3 vai 7 ir sastopams $488 + 488 + 3 = 979$ lappušu numuros.

2. risinājums. Pieņemsim, ka grāmatai ir vēl arī 0-tā lappuse. Tā kā tās numerācijā nav izmantoti cipari 3 un 7, tad šāds pieņēmums neizmanīs rezultātu – aprēķināto lappušu numuru skaitu.

Starp pirmajām desmit lappusēm (no 0. līdz 9. lappusei) divu lappušu numuros būs sastopams cipars 3 vai 7.

Lai aprēķinātu prasīto lappušu (ar ciparu 3 vai 7) numuru skaitu starp pirmajām 100 lappusēm (no 0. līdz 99.), nepieciešams ņemt vērā, ka cipars 3 ir visās lappusēs no 30. līdz 39. un cipars 7 – visās lappusēs no 70. līdz 79., bet pārējos astoņos lappušu desmitos katrā vēl pa divām – kopā 36 lappuses.

Tagad aprēķinām lappušu numuru skaitu starp pirmajām 1000 lappusēm (no 0. līdz 999.). No 300. līdz 399. lappusei visās ir cipars 3, bet no 700. līdz 799. lappusei visās ir cipars 7. Katrā no pārējiem astoņiem lappušu simtiem ir pa 36 lappušu numuriem ar ciparu 3 vai 7. Tātad starp pirmajām 1000 lappusēm ir $200 + 8 \cdot 36 = 488$ lappušu numuri, kas satur ciparu 3 vai 7.

Tieši tikpat lappušu numuru, kas satur ciparu 3 vai 7, ir otrajā lappušu tūkstotī (no 1000. līdz 1999.). Tātad no 0. līdz 1999. lappusei 976 lappušu numuros ir sastopams cipars 3 vai 7. Vēl cipars 3 vai 7 ir atrodams 2003., 2007. un 2013. lappuses numurā.

Tātad no 1. līdz 2014. lappusei cipars 3 vai 7 ir sastopams **979** lappušu numuros.

6.5. *Uz tāfeles rindā uzrakstīti naturālie skaitļi no* 1 *līdz* 20*. Roberts izvēlas jebkurus divus no tiem, nodzēš tos un rindas galā uzraksta šo skaitļu starpību (ja skaitļi ir dažādi, starpību aprēķina, no lielākā skaitļa atņemot mazāko). Šo darbību atkārto, kamēr uz tāfeles paliek viens skaitlis.*

a) *Vai iespējams, ka šis skaitlis ir* 0*?*

b) *Vai iespējams, ka šis skaitlis ir* 1*?*

a) Jā, piemēram, vispirms desmit gājienos iegūst

$$(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8), (9,10), (11,12), (13,14), (15,16), (17,18), (19,20) \to$$
$$\to 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.$$

Pēc tam piecos gājienos iegūst:

$$(1, 1), (1, 1), (1, 1), (1, 1), (1, 1) \to 0, 0, 0, 0, 0.$$

Tad četros gājienos iegūst skaitli 0:

$$0, 0, 0, 0, 0 \to 0, 0, 0, 0 \to 0, 0, 0 \to 0, 0 \to 0.$$

b) Ievērosim, ka, veicot doto pārveidojumu, uz tāfeles palikušo skaitļu summas paritāte nemainās (jo $(a+b)$ un $(a-b)$ ir vienas paritātes skaitļi). Sākotnējo skaitļu summa 210 ir pāra skaitlis; tātad rezultātā nevar iegūt nepāra skaitli 1.

7. klase

7.1. *Dots vienādojums*

$$\square \cdot x + \square = \square$$

Ariadne vienā (*jebkurā*) *rūtiņā ieraksta vienu skaitli, pēc tam Eleonora citā rūtiņā ieraksta vienu skaitli un beidzot Ariadne ieraksta skaitli atlikušajā tukšajā rūtiņā. Pierādīt, ka Ariadne var panākt jebkuru no trim situācijām:*

a) *vienādojumam ir tieši viens atrisinājums;*
b) *vienādojumam nav atrisinājumu;*
c) *vienādojumam ir bezgalīgi daudz atrisinājumu.*

(*Spēles sākumā jau zināms, kuru situāciju jāiegūst.*)

Ievērojam, ka lineāram vienādojumam $ax = b$:

- ir tieši viens atrisinājums, ja $a \neq 0$;
- nav atrisinājums, ja $a = 0$ un $b \neq 0$;
- ir bezgalīgi daudz atrisinājumu, ja $a = b = 0$.

Tātad Ariadnei jārīkojas šādi:

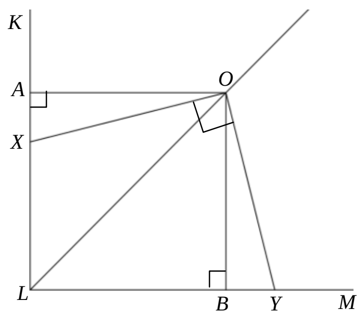
a) Pirmajā gājienā pirmajā lodziņā jāieraksta no nulles atšķirīgs skaitlis. Neatkarīgi no Eleonoras gājiena un Ariadnes otrā gājiena vienādojumam būs tieši viens atrisinājums.

b) Pirmajā gājienā pirmajā lodziņā jāieraksta 0, bet otrs skaitlis Ariadnei jāieraksta citāds nekā Eleonoras ierakstītais.

c) Pirmajā lodziņā Ariadnei jāieraksta 0, bet otram skaitlim jābūt tādam pašam kā Eleonoras ierakstītajam.

7.2. *Uz taisnā leņķa KLM malām atlikti punkti X un Y* (*katrs uz savas malas*)*; uz tā bisektrises ņemts tāds punkts O, ka* $\angle XOY = 90°$*. Pierādīt, ka* $OX = OY$.

Novelkam no punkta *O* perpendikulus *OA* un *OB* pret leņķa *KLM* malām *KL* un *LM* (skat. A3. zīm.). Tā kā punkts O atrodas uz leņķa bisektrises, tad attālumi no punkta O līdz leņķa malām ir vienādi, t.i., $OA = OB$. Četrstūra *LAOB* trīs leņķi ir $90°$ lieli, tātad arī $\angle AOB = 90°$.



A3. zīm.

Ievērojam, ka

- $\angle XOA = \angle XOY - \angle AOY = 90° - \angle AOY$;
- $\angle YOB = \angle AOB - \angle AOY = 90° - \angle AOY = \angle XOA$.

Tad $\Delta XAO = \Delta YBO$ (pēc pazīmes „$\ell m \ell$”):

- $\angle XAO = \angle YBO = 90°$;
- $OA = OB$;
- $\angle XOA = \angle YOB$.

Līdz ar to $OX = OY$ kā vienādu trijstūru atbilstošās malas.

7.3. *Cik starp pirmajiem* 2014 *naturālajiem skaitļiem ir tādu skaitļu x, ka skaitlis* $x(x+1)(x+2)$ *dalās ar* 87*?*

Ievērojam, ka $87 = 29 \cdot 3$. Tā kā 29 ir pirmskaitlis, tad vienam no skaitļiem *x*, $x+1$ vai $x+2$ jādalās ar 29. Starp trīs pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 3, tāpēc dotais reizinājums vienmēr dalās ar 3.

No 1 līdz 2016 (2016 ir lielākā iespējamā $x+2$ vērtība) ir 69 skaitļi, kas dalās ar 29 (lielākais no tiem ir $2001 = 69 \cdot 29$).

Tātad 69 veidos var izvēlēties tādu *x*, kas dalās ar 29, 69 veidos – tādu *x*, ka $x+1$ dalās ar 29 un 69 veidos – tādu *x*, ka $x+2$ dalās ar 29, t. i., pavisam ir $69+69+69 = 207$ tādi skaitļi *x*, ka $x(x+1)(x+2)$ dalās ar 87.

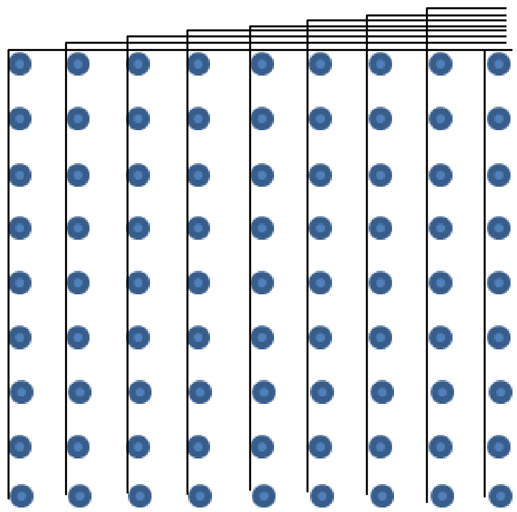
7.4. *Uz ballīti ieradās N (*$N > 1$*) cilvēki un ballītes beigās katrs uz lapiņas uzrakstīja veselu skaitli robežās no 0 līdz* $N-1$ *– cik jau iepriekš pazīstamus cilvēkus ballītē saticis. Uzskatīsim, ka pazīšanās ir abpusēja – ja A pazīst B, tad B pazīst A. Izrādījās, ka uz visām lapiņām bija uzrakstīti atšķirīgi skaitļi. Pierādīt, ka vismaz viens no ballītes apmeklētājiem ir kļūdījies.*

Ja visi skaitļi ir atšķirīgi, tad katrs no skaitļiem no 0 līdz $N-1$ ir bijis uzrakstīts tieši vienu reizi. Tas, kurš uzrakstīja 0, nepazina nevienu citu ballītes dalībnieku un, tātad, arī viņu neviens nepazina. Tas nozīmē, ka nevarēja būt dalībnieks, kas pazīst $N-1$ dalībnieku (visus, izņemot sevi). Tātad vismaz viens no ballītes apmeklētājiem kļūdījās.

7.5. *Pilsētas ielu tīkls veido kvadrātveida režģi, kas sastāv no* 8×8 *vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā no* 81 *rūtiņu stūriem ir autobusu pietura; citu pieturu nav. Kādu vismazāko skaitu autobusa maršrutu jāievieš, lai no katras pieturas varētu aizbraukt uz katru citu, izdarot ne vairāk kā vienu pārsēšanos? Pa katru maršrutu autobuss kursē abos virzienos; katrs maršruts drīkst saturēt augstākais vienu pagriezienu.*

Katrs maršruts iet pa augstākais vienu horizontāli un vienu vertikāli. Ja maršrutu skaits nepārsniedz 8, tad atrastos vertikāle un horizontāle, pa kurām neiet neviens maršruts; uz šo ielu krustpunktu nevarētu aizbraukt.

Ar 9 maršrutiem pietiek. Piemēram, var ņemt visus maršrutus, katrs no kuriem satur pilnībā vienu vertikāli un visu augšējās horizontāles daļu pa labi no šīs vertikāles (skat. A4. zīm.).



A4. zīm.

8. klase

8.1. *Dots, ka* $a+b+c=0$ *un* $a\neq 0$. *Pierādīt, ka vienādojumam* $ax^2+bx+c=0$ *ir saknes* (*varbūt vienādas*)*, un izteikt tās, neizmantojot kvadrātsaknes zīmi.*

No vienādības $a+b+c=0$ seko, ka skaitlis 1 ir vienādojuma $ax^2+bx+c=0$ sakne.

Otru vienādojuma sakni atrodam izmantojot Vjeta teorēmu:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \qquad \Rightarrow \qquad x_1=1 \ \text{ un } \ x_2=-\frac{b}{a}-1$$

vai arī

$$x_1x_2=\frac{c}{a} \qquad \Rightarrow \qquad x_1=1 \ \text{ un } \ x_2=\frac{c}{a}.$$

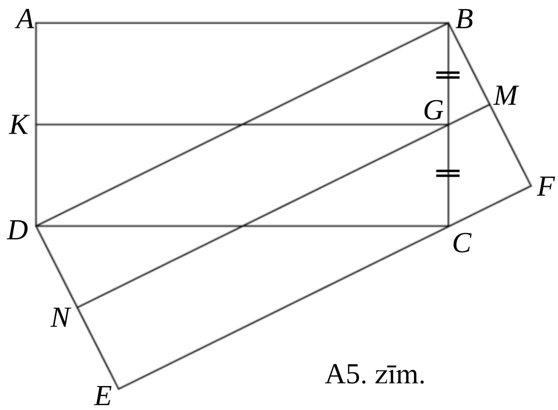
8.2. *Taisnstūra ABCD diagonāle BD ir taisnstūra BDEF mala, punkts C atrodas uz EF. Malas BC viduspunkts ir G. Pierādīt, ka* $AG=EG$.

Novelkam nogriežņu BC un BF vidusperpendikulus GK un MN (skat. A5. zīm.).

Tā kā katrs punkts, kas atrodas uz nogriežņa vidusperpendikula, atrodas vienādā attālumā no nogriežņa galapunktiem, tad $AG=DG$.

Ievērojam, ka $BM=MF$ un $MN\perp BF$. No kā seko, ka $MG\parallel CF$ un MG ir trijstūra BFC viduslīnija, kas iet caur malas BC viduspunktu G. Tātad punkts G atrodas uz nogriežņa BF vidusperpendikula MN (nogriežņu BF un DE vidusperpendikuli sakrīt, jo $BDEF$ ir taisnstūris). Līdz ar to $DG=GE$.

Esam ieguvuši, ka $AG=DG=GE$, kas arī bija jāpierāda.



A5. zīm.

8.3. *Cik ir tādu piecciparu skaitļu, kuru pierakstā ir vismaz viens nepāra cipars?*

Pavisam ir $9\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10=90000$ piecciparu skaitļi. Uzdevumā prasīts atrast visus tos piecciparu skaitļus, kuru pierakstā ir vismaz viens nepāra cipars; šo nosacījumu neapmierina tie skaitļi, kuros visi cipari ir pāra. Šādu (kas satur tikai pāra ciparus) skaitļu skaits ir $4\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5=2500$ (skaitļa pirmais cipars var būt 2, 4, 6, 8 – četras dažādas iespējas). Tātad $90000-2500=87500$ piecciparu skaitļu pierakstā ir vismaz viens nepāra cipars.

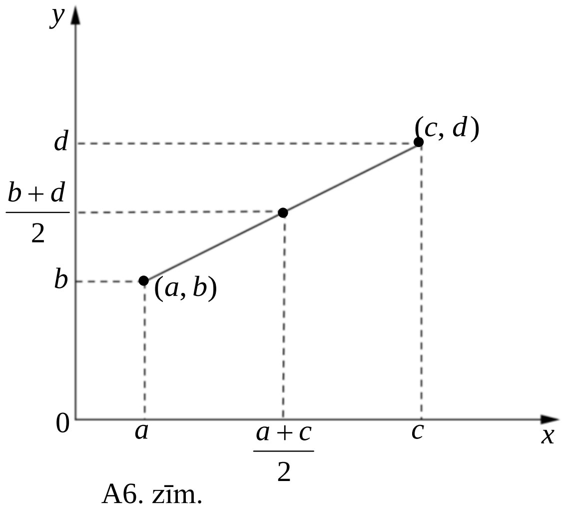
8.4. *Uz ballīti ieradās N ($N>1$) cilvēki un ballītes beigās katrs uz lapiņas uzrakstīja veselu skaitli robežās no 0 līdz $N-1$ – cik jau iepriekš pazīstamus cilvēkus ballītē saticis. Uzskatīsim, ka pazīšanās ir abpusēja – ja A pazīst B, tad B pazīst A. Vai var būt, ka uz visām lapiņām bija uzrakstīti nepāra skaitļi, ja* ***a)*** $N=2014$, ***b)*** $N=2401$?

a) var būt. Piemēram, ja visi viesi viens otru pazīst pa pāriem, tad visi viesi uz lapiņas būs uzrakstījuši pa vieniniekam.

b) nevar būt. Visu uzrakstīto skaitļu kopsummai jābūt pāra skaitlim, kas vienāds ar divkāršotu pazīšanos skaitu (jo katru pazīšanos atzīmē abi tajā iesaistītie – *A pazīst B un B pazīst A*). Nepāra skaita nepāru skaitļu summa ir nepāra skaitlis, tāpēc šāda situācija nav iespējama.

8.5. *Trijstūra virsotnes atrodas kvadrātiska rūtiņu režģa punktos. Pierādīt, ka kāda no trijstūra malām iet vai nu caur kādu citu rūtiņu režģa punktu, vai kādas rūtiņas centru.*

Ieviesīsim koordinātu sistēmu tā, ka koordinātu asis iet pa rūtiņu malām un 1 vienība ir vienas rūtiņas malas garums. Varam ievērot, ka rūtiņu krustpunktu koordinātas ir $\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)$, kur n_1 un n_2 ir nepāra skaitļi. Punktu (a, b) un (c, d) viduspunkta koordinātas ir $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$.



A6. zīm.

Aplūkosim trijstūra virsotņu koordinātas (x, y) pēc to paritātes. Katra virsotne ietilpst kādā no grupām

$$(p, p),\quad (p, n),\quad (n, p),\quad (n, n),$$

kur ar *p* apzīmēts pāra skaitlis, ar *n* – nepāra.

Iespējami divi gadījumi:

- Ja divas trijstūra virsotnes ietilpst vienā grupā, tad izvēlamies šos divus punktus un šo punktu viduspunkta koordinātas abi būs veseli skaitļi, kas nozīmē, ka šis viduspunkts atrodas kādā citā rūtiņu režģa krustpunktā.
- Ja nekādas divas virsotnes neietilpst vienā grupā, tad var izvēlēties divas virsotnes tā, ka abām koordinātām ir pretēja paritāte. Šo punktu viduspunkta koordinātas būs formā $\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)$, kur n_1 un n_2 – nepāra skaitļi, kas nozīmē, ka šis viduspunkts atrodas kādas rūtiņas centrā jeb trijstūra mala iet caur rūtiņas centru. Līdz ar to esam pierādījuši prasīto.

9. klase

9.1. *Vai vienādojumam* $2x^2+a^2+b^2=2x\cdot(a+b)$ *ir atrisinājums, ja a un b ir dažādi skaitļi?*

1. risinājums. Ievērosim, ka

$$2x^2-2x\cdot(a+b)+a^2+b^2=(x^2-2ax+a^2)+(x^2-2bx+b^2)=(x-a)^2+(x-b)^2.$$

Tāpēc doto vienādojumu var pārveidot formā

$$(x-a)^2+(x-b)^2=0.$$

Divu skaitļu kvadrātu summa ir 0 tad un tikai, ja abi šie skaitļi ir nulles. Ja x ir dotā vienādojuma sakne, tad jābūt $x=a$ un $x=b$; bet tas nozīmē, ka $a=b$; pretruna ar uzdevuma nosacījumu. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

2. risinājums. Uzrakstām dota kvadrātvienādojuma diskriminatu:

$$D=4(a+b)^2-8(a^2+b^2)=4a^2+8ab+4b^2-8a^2-8b^2=$$

$$=-4a^2+8ab-4b^2=-4(a^2-2ab+b^2)=-4(a-b)^2.$$

Lai kvadrātvienādojumam būtu atrisinājums diskriminantam vērtībai jābūt nenegatīvai. Tā kā $-4(a-b)^2\le 0$, tad vienīgā iespēja, lai dotajam vienādojumam eksistētu atrisinājums ir gadījums, kad $a=b$.

Tātad, ja *a* un *b* ir dažādi skaitļi, dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

9.2. *Taisnstūra malu garumi ir veseli skaitļi, tā perimetrs ir par* 8 *mazāks nekā taisnstūra laukums. Atrast visus šādus taisnstūrus.*

Ja *a* un *b*, $a\ge b$ ir taisnstūra malu garumi, tad $ab=2a+2b+8$. Ekvivalenti pārveidojot, iegūstam $ab-2a-2b+4=12$ jeb $(a-2)(b-2)=12$. Pēdējā vienādojuma kreisās puses reizinātāji var pieņemt tikai vērtības 1 un 12, 2 un 6 vai 3 un 4 (tā kā vienādojums ir simetrisks attiecībā pret mainīgajiem *a* un *b*, tad reizinātāju secība nav svarīga). Līdz ar to iespējami trīs gadījumi:

- $a-2=1$ un $b-2=12$ jeb $a=3$ un $b=14$;
- $a-2=2$ un $b-2=6$ jeb $a=4$ un $b=8$;
- $a-2=3$ un $b-2=4$ jeb $a=5$ un $b=6$.

Uzdevuma nosacījumus apmierina taisnstūri ar izmēriem 3×14, 4×8 un 5×6.

9.3. *Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu* $3abc+3a+3b=7bc+7$.

Izsakām mainīgo *a*:

$$a(3bc+3)=7bc+7-3b;$$

$$a=\frac{7bc+7-3b}{3(bc+1)}=\frac{7(bc+1)-3b}{3(bc+1)}=\frac{7(bc+1)}{3(bc+1)}-\frac{3b}{3(bc+1)}=\frac{7}{3}-\frac{b}{bc+1}=2\frac{1}{3}-\frac{b}{bc+1}.$$

Lai *a* būtu naturāls skaitlis, tad jābūt $\frac{b}{bc+1}=\frac{1}{3}$ vai $\frac{b}{bc+1}=1\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

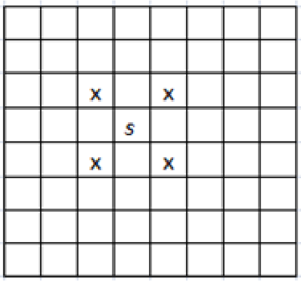
Apskatām abus gadījumus:

- Ja $\frac{b}{bc+1}=\frac{1}{3}$, tad $a=2$ un $bc+1=3b$ jeb $c=\frac{3b-1}{b}=\frac{3b}{b}-\frac{1}{b}=3-\frac{1}{b}$. Skaitlis c ir naturāls tikai tad, ja $\frac{1}{b}$ ir naturāls. Vienīgā iespēja, ja $b=1$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $a=2$, $b=1$ un $c=2$ ir dotā vienādojuma atrisinājums.

- Ja b un c ir naturāli skaitļi, tad $b < bc+1$ jeb $\frac{b}{bc+1} < 1$. Tātad $\frac{b}{bc+1} \neq \frac{4}{3}$ un šajā gadījumā dotajam vienādojumam nav atrisinājuma.

Līdz ar to esam parādījuši, ka dotajam vienādojumam naturālos skaitļos ir viens vienīgs atrisinājums $a=2$, $b=1$ un $c=2$.

9.4. *Figūra „sienāzis" apdraud tās rūtiņas, kas tai pieskaras ar stūriem (skat.* 1. *zīm, kur s - sienāzis, x - rūtiņas, ko tas apdraud). Cik dažādos veidos uz* 8×8 *rūtiņu šaha galdiņa var novietot vienu baltu un vienu melnu sienāzi (katru savā rūtiņā) tā, lai tie viens otru neapdraudētu?*

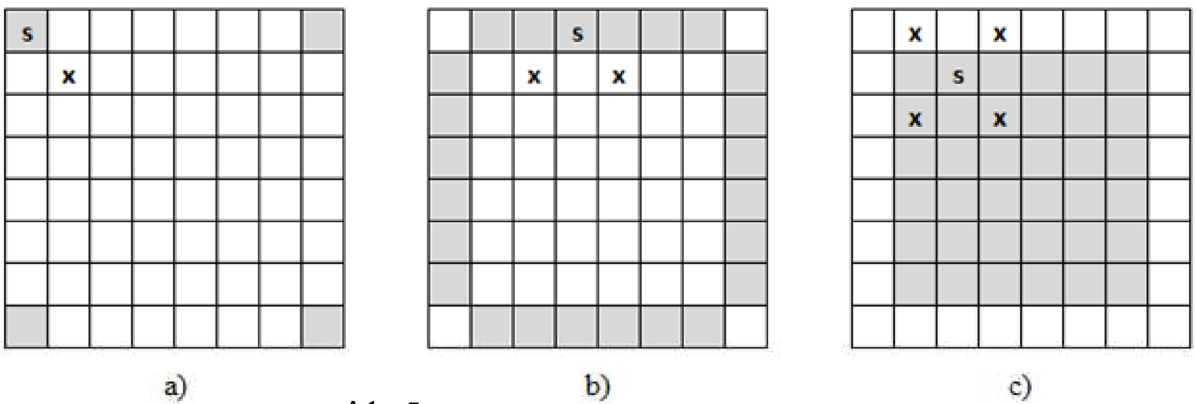


1. zīm.

Apskatām trīs principiāli atšķirīgus baltā sienāža izvietojumus:

- Ja baltais sienāzis atrodas šaha galdiņa stūra rūtiņā, tad tas apdraud tikai vienu rūtiņu x (skat. A1. a) zīm.). Līdz ar to melno sienāzi var novietot jebkurā no atlikušajām $64-1-1=62$ rūtiņām. Tā kā ir četras stūra rūtiņas, tad dažādo izvietojumu skaits ir $4\cdot 62=248$.
- Ja baltais sienāzis atrodas šaha galdiņa malējā rūtiņā (ne stūrī), tad tas apdraud divas rūtiņas x (skat. A1. b) zīm.). Līdz ar to melno sienāzi var novietot jebkurā no atlikušajām $64-1-2=61$ rūtiņām. Tā kā ir 24 malējās rūtiņas, tad dažādo izvietojumu skaits ir $24\cdot 61=1464$.
- Ja baltais sienāzis atrodas kādā no šaha galdiņa vidus rūtiņā (ne stūrī un ne pie šaha galda malas), tad tas apdraud četras rūtiņas x (skat. A1. c) zīm.). Līdz ar to melno sienāzi var novietot jebkurā no atlikušajām $64-1-4=59$ rūtiņām. Tā kā ir 36 vidus rūtiņas, tad dažādo izvietojumu skaits ir $36\cdot 59=2124$.

Tātad kopējais dažādo figūru izvietojumu skaits ir $248+1464+2124=3836$.



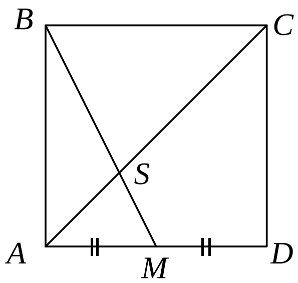
A1. zīm.

9.5. *Kvadrāta ABCD malas garums ir* 1*; M ir malas AD viduspunkts. Nogriežņi AC un BM krustojas punktā S. Aprēķināt trijstūra ASM laukumu.*

Trijstūri *ASM* un *CSB* ir līdzīgi (pēc pazīmes „$\ell\ell$”), jo $\angle ASM = \angle CSB$ kā krustleņķi un $\angle SAM = \angle SCB$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm *AD* un *BC* (skat. A2. zīm.). Tā kā $AM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC$, tad $\frac{BS}{SM} = \frac{BC}{AM} = 2$. Šo trijstūru laukumu attiecība ir vienāda ar trijstūru līdzības koeficienta kvadrātu, t.i., $\frac{S_{CSB}}{S_{ASM}} = 2^2 = 4$ jeb $S_{CSB} = 4S_{ASM}$.

Ievērojam, ka trijstūriem *ASM* un *ASB* ir kopīgs augstums, un malu, pret kurām novilkts kopīgais augstums, attiecība ir $\frac{BS}{SM} = 2$. Līdz ar to šo trijstūru laukumu attiecība arī ir 2, t.i., $\frac{S_{ABS}}{S_{ASM}} = 2$ jeb $S_{ABS} = 2S_{ASM}$.

Esam ieguvuši, ka $S_{ABC} = S_{ABS} + S_{SBC} = 2S_{ASM} + 4S_{ASM}$. Tā kā $S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$, tad $6S_{ASM} = \frac{1}{2}$ jeb $S_{ASM} = \frac{1}{12}$.



A2. zīm.

10. klase

10.1. *Dots, ka* $x^3 > 2$. *Pierādīt, ka*

a) $x^6 > 4$;

b) $x^7 > 5$.

a) 1. risinājums. Ievērojam, ka $x^6 = x^3 \cdot x^3 > 2 \cdot 2 = 4$. Līdz ar to esam pierādījuši, ka $x^6 > 4$.

2. risinājums. Dotās nevienādības $x^3 > 2$ abas puses ir pozitīvas. Tāpēc, ceļot to pakāpē ar naturālu kāpinātāju, atkal iegūst patiesas nevienādības. Tātad, ceļot $x^3 > 2$ kvadrātā, iegūst $x^6 > 4$, kas arī bija jāpierāda.

b) 1. risinājums. Tā kā $2^7 = 128 > 125 = 5^3$, tad, doto izteiksmi kāpinot septītajā pakāpē, iegūstam:

$$(x^3)^7 > 2^7 > 5^3 \quad \Rightarrow \quad (x^7)^3 > 5^3 \quad \Rightarrow \quad x^7 > 5.$$

2. risinājums. Velkot trešās pakāpes sakni no dotās nevienādības abu pušu izteiksmēm, iegūstam $x > \sqrt[3]{2}$.

Tā kā nevienādību $x > \sqrt[3]{2}$ un $x^6 > 4$ abas puses ir pozitīvas, tad varam šīs nevienādības reizināt

$$x \cdot x^6 > \sqrt[3]{2} \cdot 4.$$

Veicot pārveidojumus un novērtējot, iegūstam prasīto:

$$x^7 > \sqrt[3]{2} \cdot 4 = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{128} > \sqrt[3]{125} = 5.$$

10.2. *Pierādīt, ka, izvēloties* 52 *no aritmētiskās progresijas* 1, 4, 7, 10, ... *locekļiem, kas nepārsniedz* 300, *vienmēr starp šiem skaitļiem var atrast divus skaitļus, kuru summa ir* 302.

Lielākais minētās aritmētiskās progresijas loceklis, kas nepārsniedz 300, ir 298. Sadalām visus progresijas locekļus kopās (katras kopas, kurā ir divi progresijas locekļi, elementu summa ir 302):

$$\{1\}, \{151\}, \{4, 298\}, \{7, 295\}, \{10, 292\}, ..., \{148, 154\}.$$

Šādu kopu skaits ir 51. Tā kā ir jāizvēlas 52 skaitļi, tad vismaz divi no tiem būs no vienas kopas. Šie skaitļi ir meklētie divi skaitļi, kas summā dod 302.

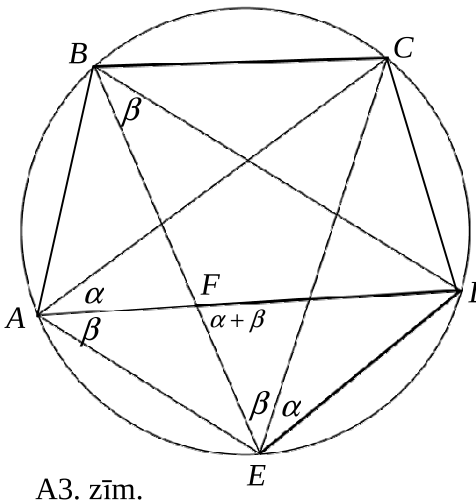
10.3. *Piecstūris ABCDE ievilkts riņķa līnijā, nogriežņi AD un BE krustojas punktā F. Zināms, ka* $BC = DF = DE$. *Pierādīt, ka* $AC = CE$.

Novelkam *BD, AC* un *EC* (skat. A3. zīm.).

Tā kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienādām hordām, ir vienādi, tad $\angle EBD = \angle BEC = \angle DAE = \beta$ un $\angle DEC = \angle CAD = \alpha$. Vienādsānu trijstūra *DEF* leņķi pie pamata ir vienādi, t.i., $\angle DEF = \angle EFD = \alpha + \beta$. Tad $\angle AEF = 180° - \angle EFD = 180° - (\alpha + \beta)$ kā blakusleņķi. No ΔAEF iegūstam, ka

$$\angle AEF = 180° - \angle FAE - \angle AFE = 180° - \beta - 180° + \alpha + \beta = \alpha.$$

Esam ieguvuši, ka $\angle EAC = \angle AEC = \alpha + \beta$. Tātad trijstūris *AEC* ir vienādsānu un $AC = CE$ kā atbilstošās sānu malas.



A3. zīm.

10.4. *Zināms, ka* $a_1, a_2, ..., a_{10}$ *ir tādi dažādi nepāra naturāli skaitļi, ka* $a_1 > \sqrt{a_2}$, $a_2 > \sqrt{a_3}$, ..., $a_9 > \sqrt{a_{10}}$ *un* $a_{10} > \sqrt{a_1}$. *Aprēķināt vismazāko summas* $a_1 + a_2 + ... + a_{10}$ *vērtību.*

Tā kā visi a_i ($i = 1, 2, ..., 10$) ir naturāli skaitļi, to mazākā iespējamā vērtība ir 1. Ja kāds no dotajiem skaitļiem $a_k = 1$, tad nevienādība $a_k = 1 > \sqrt{a_{k+1}}$ nav patiesa nevienam naturālam skaitlim a_{k+1}. Tātad mazākā iespējamā skaitļu a_i vērtība ir 3 (skaitlis 2 neder, jo tas ir pāra skaitlis). Viegli pārbaudīt, ka $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$, $a_4 = 9$, $a_5 = 11$, $a_6 = 13$, $a_7 = 15$, $a_8 = 17$, $a_9 = 19$, $a_{10} = 21$ apmierina dotās nevienādības. Tā kā tie ir mazākie dažādie nepāra naturālie skaitļi, kas apmierina dotās nevienādības, tad summas $a_1 + a_2 + ... + a_{10}$ mazākā iespējamā vērtība ir

$$3+5+7+9+11+13+15+17+19+21=120.$$

10.5. *Grozos pa apli izvietotas 2014 konfektes tā, ka blakus grozos konfekšu skaits atšķiras tieši par* 1. *Zināms, ka ir vismaz divi grozi un katrā grozā ir vismaz viena konfekte. Kāds var būt a) vismazākais; b) vislielākais grozu skaits?*

a) Vismazākais grozu skaits, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir 4. Konfekšu izvietojums grozos ir šāds: (503, 504, 503, 504).

Skaidrs, ka nepietiek ar diviem groziem, jo tad vienā grozā konfekšu skaits būtu *k*, bet otrā $k+1$, kas kopā dotu nepāra skaitli. Nepietiek arī ar trijiem groziem, jo tad grozā ar mazāko konfekšu skaitu būtu *k* konfektes un blakus grozos pa $k+1$ konfektei, bet saskaņā ar uzdevuma noteikumiem blakus grozos nevar būt vienāds konfekšu skaits.

b) Pierādīsim, ka grozu skaitam vienmēr ir jādalās ar 4. Blakus esošos grozos konfekšu skaitam vienmēr ir pretēja paritāte – līdz ar to grozu skaitam noteikti jādalās ar 2 (citādi kaut kur blakus būs divi grozi, kuros abos ir vai nu pāra, vai nepāra skaits konfekšu).

Ievērosim, ka divos blakus esošos grozos konfekšu summa vienmēr ir nepāra skaitlis. Apzīmējam grozu skaitu ar $2n$ un sadalām visus grozus *n* blakusstāvošu grozu pāros, katrā šādā pārī konfekšu skaits ir nepāra, tātad kopējais konfekšu skaits ir *n* nepāra skaitļu summa. Tā kā kopējais konfekšu skaits ir 2014, tad *n* jābūt pāra skaitlim. Tātad grozu skaits dalās ar 4. (Piezīme. Šis spriedums arī parāda, ka mazākais grozu skaits var būt 4).

Lielākais iespējamais grozu skaits ir 1340. Konfektes grozos var izvietot šādi (divos grozos ir trīs konfektes, pārējos grozos – viena vai divas konfektes):

3, 2, 3, 2, 1, 2, 1, …, 2, 1, 2.

Ja grozu skaits būtu lielāks, tad būtu vismaz 1344 grozi, tātad 672 blakusstāvošu grozu pāri un, ja katrā pārī būtu minimālais konfekšu skaits (t.i., trīs konfektes), tad kopējais konfekšu skaits būtu vismaz $672 \cdot 3 = 2016$, kas pārsniedz 2014.

11. klase

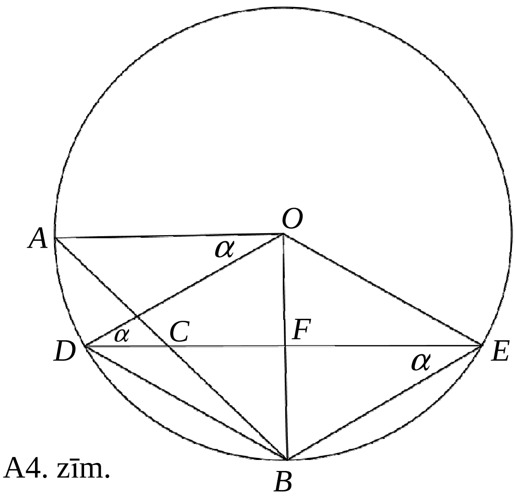
11.1. *Polinoms* $P(x)$, *kura visi koeficienti ir veseli skaitļi, piecām veselām x vērtībām pieņem vērtību* 2000. *Pierādīt, ka nav tādas veselas x vērtības, pie kuras dotais polinoms pieņem vērtību* 2014.

Apzīmēsim $F(x) = P(x) - 2000$. Tādā gadījumā *a*, *b*, *c*, *d*, *e* ir polinoma *F*(*x*) saknes un $F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)R(x)$.

Ja $P(n) = 2014$, tad $F(n) = 14 = (n-a)(n-b)(n-c)(n-d)(n-e)R(n)$. Esam ieguvuši, ka skaitlis 14 ir uzrakstīts kā vismaz piecu dažādu veselu skaitļu reizinājums. Iegūta pretruna, jo $14 = 1 \cdot 2 \cdot 7$ vai $14 = 1 \cdot 14$. Tātad nav tādas veselas *x* vērtības, pie kuras dotais polinoms pieņem vērtību 2014.

11.2. *Riņķa līnijā ar centru punktā O novilkti divi savstarpēji perpendikulāri rādiusi OA un OB. Caur hordas AB viduspunktu C novilkta horda DE, kas paralēla OA (punkts D atrodas uz mazākā loka AB). Aprēķināt leņķa AOD lielumu!*

Ar F apzīmējam nogriežņu OB un DE krustpunktu un $\angle AOD = \alpha$ (skat. A4. zīm.). Tā kā $AC = CB$ un $AO \parallel DE$, tad CF ir trijstūra AOB viduslīnija un $OF = BF$.



A4. zīm.

No OA un DE paralelitātes seko, ka $DE \perp OB$ un $\angle ODE = \angle AOD = \alpha$ (kā iekšējie šķērsleņķi). Četrstūris $DOEB$ ir rombs, jo $DE \perp OB$, $OF = FB$ un $DF = FE$ (rādiuss, kas perpendikulārs hordai, dala to uz pusēm). No romba īpašībām seko, ka $\angle DEB = \alpha$. Līdz ar to $\angle DOB = 2\angle DEB = 2\alpha$ kā centra leņķis un ievilktais leņķis, kas balstās uz vienu un to pašu loku DB.

Ievērojam, ka $\angle DOB + \angle AOD = 90°$ jeb $3\alpha = 90°$ un $\alpha = \angle AOD = 30°$.

11.3. *Kādiem naturāliem skaitļiem n piemīt šāda īpašība: visu skaitļa n naturālo dalītāju, izņemot 1 un n, kvadrātu summa ir vienāda ar pašu skaitli n?*

Parādīsim, ka uzdevuma nosacījumus apmierina visi naturālie skaitļi, kas ir pirmskaitļu kvadrāti, t.i., $n = p^2$, p – pirmskaitlis.

Pirmkārt, $n = p^2$ der, jo p^2 vienīgais dalītājs, kas nav ne 1, ne arī p^2, ir pirmskaitlis p. Tātad skaitļa $n = p^2$ naturālo dalītāju (izņemot 1 un n) kvadrātu summa ir $p^2 = n$.

Otrkārt, pierādām, ka citi naturālie skaitļi neder. Skaitlis 1 neder, jo tam nav citu naturālu dalītāju kā tikai skaitlis 1. Apskatām saliktu skaitli $n = a \cdot b$, kur $a > 1$ un $b > 1$. Tad skaitļa n dalītāju (kas atšķiras no 1 un n) kvadrātu summa ir vismaz $a^2 + b^2$. Taču

$$a^2 + b^2 \geq 2ab > ab = n,$$

kur pirmā nevienādība izriet no patiesas nevienādības $(a-b)^2 \geq 0$. Līdz ar to saliktiem skaitļiem n apskatāmo dalītāju kvadrātu summa ir lielāka nekā n.

11.4. *Kādā pilsētā ir n detektīvi ($n \geq 2$) un cita starpā tie izseko arī viens otru. Zināms, ka jebkuriem diviem detektīviem A un B vai nu A izseko B, vai B izseko A. Pierādīt, ka visus detektīvus var nostādīt vienā rindā tā, ka pirmais izseko otro, otrais - trešo, ..., $(n-1)$-ais izseko n-to.*

Apgalvojumu pierādīsim ar matemātisko indukciju pēc detektīvu skaita n.

Bāze. Ja $n = 2$, apgalvojums ir patiess, t.i., $A_1 \to A_2$ (detektīvs A_1 izseko detektīvu A_2).

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka k detektīvi $A_1, A_2, ..., A_k$ nostādīti rindā atbilstoši uzdevuma nosacījumiem:

$$A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_i \to A_{i+1} \to \cdots \to A_k .$$

Induktīvā pāreja. Aplūkojam detektīvu A_{k+1}. Iespējami divi gadījumi:

1. Ja detektīvs A_{k+1} izseko detektīvu A_1 (apzīmēsim $A_{k+1} \to A_1$), tad detektīvu A_{k+1} var novietot rindas sākumā.
2. Ja $A_1 \to A_{k+1}$, tad iespējami divi gadījumi:
   - visiem *i* izpildās $A_i \to A_{k+1}$, tad detektīvu A_{k+1} var nostādīt rindas beigās;
   - ja visiem *i* neizpildās, ka $A_i \to A_{k+1}$, tad ņemsim mazāko *i* tādu, ka $A_{k+1} \to A_i$, tādā gadījumā $A_{i-1} \to A_{k+1}$. Tad detektīvu A_{k+1} var nostādīt rindā starp detektīviem A_{i-1} un A_i.

Līdz ar to esam pieradījuši uzdevuma prasīto.

11.5. *Neviens no reāliem skaitļiem x, y un z nav nulle un* $x + y + z = xyz$. *Pierādīt, ka*

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq 1.$$

Reizinot doto nevienādību ar $(xyz)^2 > 0$, iegūstam ekvivalentu nevienādību:

$$y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2 \geq (xyz)^2.$$

Veiksim ekvivalentus pārveidojumus:

$$y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2 \geq xyz(x + y + z);$$
$$y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2 \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2;$$
$$2y^2z^2 + 2x^2z^2 + 2x^2y^2 \geq 2x^2yz + 2xy^2z + 2xyz^2;$$
$$2y^2z^2 + 2x^2z^2 + 2x^2y^2 - 2x^2yz - 2xy^2z - 2xyz^2 \geq 0;$$
$$(x^2y^2 - 2x^2yz + x^2z^2) + (x^2y^2 - 2xy^2z + y^2z^2) + (x^2z^2 - 2xyz^2 + y^2z^2) \geq 0;$$
$$(xy - xz)^2 + (yz - xy)^2 + (xz - yz)^2 \geq 0.$$

Trīs kvadrātu summa ir nenegatīvs skaitlis, līdz ar to pēdējā nevienādība ir patiesa.
Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa.

12. klase

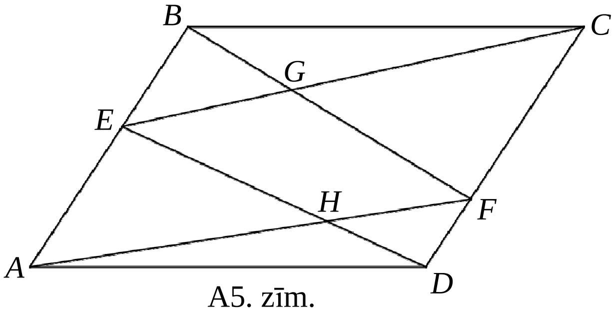
12.1. *Zināms, ka* $a > \frac{1}{2}$, $b > \frac{1}{2}$, $c > \frac{1}{2}$ *un x ir vienādojuma* $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ *sakne. Pierādīt, ka* $x > -\frac{1}{2}$.

Pieņemsim, ka $x < 0$. Tad $x^3 < 0$, $-ax^2 < 0$, $bx < 0$, $-c < 0$, tāpēc $x^3 - ax^2 + bx - c < 0$.
Tātad vienādojuma $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ sakne *x* nevar būt negatīvs skaitlis un $x \geq 0 > -\frac{1}{2}$.

12.2. *Uz paralelograma ABCD pretējām malām AB un CD atzīmēti attiecīgi punkti E un F. Nogriežņu AF un DE krustpunkts ir H, bet BF un CE krustpunkts ir G. Pierādīt, ka* $S_{EGFH}=S_{ADH}+S_{BCG}$.

Izsakām trijstūra *ABF* (skat. A5. zīm.) laukumu vairākos veidos:

- $S_{ABF}=S_{ADF}+S_{BCF}$;
- $S_{ABF}=\frac{1}{2}AB\cdot h_{AB}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$;
- $S_{ABF}=S_{AHE}+S_{BEG}+S_{GEHF}$.



A5. zīm.

Līdzīgi vairākos veidos izsakām trijstūra *CDE* laukumu:

- $S_{CDE}=\frac{1}{2}CD\cdot h_{CD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$;
- $S_{CDE}=S_{ADE}+S_{BCE}=S_{ADH}+S_{AHE}+S_{BCG}+S_{BEG}$.

Tā kā $S_{ABF}=S_{CDE}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$, tad

$$S_{AHE}+S_{BEG}+S_{GEHF}=S_{ADH}+S_{AHE}+S_{BCG}+S_{BEG};$$

$$S_{GEHF}=S_{ADH}+S_{BCG},$$

kas arī bija jāpierāda.

12.3. *Uz tāfeles uzrakstīti visi trīsciparu skaitļi, kas dalās ar* 31*:*

124, 155, 186, 217, ..., 961, 992.

Vai no šiem skaitļiem var izvēlēties a) deviņus, b) desmit tā, ka gan simtu, gan desmitu, gan vienu pozīcijā vismaz pa vienai reizei ir atrodams katrs no cipariem 1 *līdz* 9*?*

a) Lai pa reizei būtu pārstāvēts katrs no nenulles cipariem, tiem katrā pozīcijā jāparādās tieši vienu reizi. Tātad katrā pozīcijā ciparu summa ir 45 un visu izvēlēto skaitļu summas vērtība ir $45\cdot 111=3^3\cdot 5\cdot 37$. Tā kā visi izvēlētie skaitļi dalās ar 31, tad arī šo skaitļu summa dalās ar 31. Esam ieguvuši pretrunu, jo aprēķinātā summas vērtība nedalās ar 31. Tātad no dotajiem skaitļiem nevar izvēlēties deviņus tā, ka gan simtu, gan desmitu, gan vienu pozīcijā vismaz pa vienai reizei ir atrodams katrs no cipariem 1 līdz 9

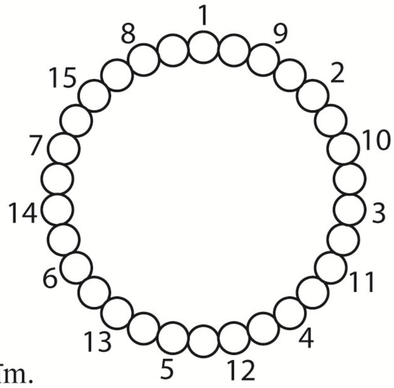
b) Uzdevuma prasīto var izpildīt. Der, piemēram, skaitļi

124, 248, 372, 465, 496, 589, 651, 713, 837, 992.

12.4. *Alise nēsā rokassprādzes, kas sastāv no virtenē savērtām 10 melnām un 20 baltām pērlītēm. Marta zaķis prot rokassprādzei samainīt divas pērlītes vietām tad, ja starp tām atrodas tieši trīs citas pērlītes. Cik rokassprādzes Alise var vienlaicīgi nēsāt, lai Marta zaķis ar atkārtotām darbībām no tām nevarētu iegūt divas vienādas? Rokassprādzes tiek uzskatītas par vienādām, ja tās sakrīt pagriežot pa apli (ap roku).*

Atbilde. 6 rokassprādzes.

Aplūkosim 15 pērlītes, kas atrodas pāra pozīcijās un parādīsim, ka Marta zaķis tās var sakārtot patvaļīgā secībā. Sanumurēsim tās šādi (skat. A6. zīm.)



A6. zīm.

Marta zaķis var mainīt vietām 1 ar 2, 2 ar 3, …, 15 ar 1. Tātad viņš var no sākuma iemainīt pareizo pērlīti vietā nr. 1, pēc tam, neaiztiekot vietu nr. 1, iemainīt pareizo pērlīti vietā nr. 2, pēc tam, nemainot 1 un 2 iemainīt pareizajā pērlīti vietā nr. 3 utt. To pašu var izdarīt arī ar pērlītēm, kas atrodas nepāra pozīcijās. Tātad atšķirīgas būs 6 rokassprādzes, kurām pāra pozīcijās būs dažāds melno pērlīšu skaits: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Sešas vai vairāk melnās pērlītes pāra pozīcijās nozīmē 4 vai mazāk nepāra pozīcijās, un, tā kā rokassprādzi var pagriezt tā, ka pāra pozīcijas pāriet par nepāra pozīcijām, tad šādas rokassprādzes varēs pārtaisīt par jau kādu no esošajām.

12.5. *Vai var atrast tādus 2014 dažādus naturālus skaitļus* $a_1, a_2, ..., a_{2014}$, *ka*

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{2014}}=1?$$

Ievērojam, ka $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$.

Tagad uzrādīsim paņēmienu (to var saukt par indukciju), kā no k saskaitāmajiem var iegūt k + 1 saskaitāmo. Izdalām iegūtās vienādības abas puses ar 2 un pieskaitām $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Procesu turpinām:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1.$$

Skaidrs, ka šādā veidā tiks iegūti 2014 saskaitāmie un tie visi būs dažādi.

Piezīme. Uzdevumu var atrisināt arī izmantojot matemātisko indukciju un vienādību $\frac{1}{m}=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m(m+1)}$.