LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 64. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

5. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Uz rūtiņu lapas uzzīmēti divi taisnstūri ar izmēriem 1×3 rūtiņas tā, ka tie nepārklājas un saskaras pa veselu skaitu rūtiņu malām, veidojas daudzstūris, no 6 rūtiņām, kura malas iet pa rūtiņu līnijām. Katrs no taisnstūriem var būt novietots vertikāli vai horizontāli. Kāds var būt iegūtās figūras perimetrs? (Atrodi visas iespējamās vērtības un pamato, kāpēc nav citu!)

2. Naturālā vienpadsmitciparu skaitlī vienādus ciparus aizstāja ar vienādiem burtiem, bet dažādus - ar dažādiem; ieguva pierakstu PĀRSTEIGUMS. Zināms, ka šis skaitlis dalās ar 18. Noteikt, kurš cipars aizstāts ar burtu S. Atbildi pamatot!

3. No četrciparu skaitļa A atņemot trīsciparu skaitli B, iegūst 8002. Šos pašus skaitļus A un B saskaitot, iegūst piecciparu skaitli. Atrast A un B.

4. Grāmatas lappuses ir sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 2014 pēc kārtas. Cik lappušu numuros ir sastopams cipars 7?

5. Doti 99 punkti, daži no šiem punktiem savienoti ar nogriežņiem. Vai var būt tā, ka no katra punkta iziet nepāra skaits nogriežņu?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 64. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

6. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Atrodiet kaut vienu tādu skaitli a, ka vienlaicīgi izpildās šādas īpašības:

a) noapaļojot a, $3 \cdot a$, $5 \cdot a$, $7 \cdot a$ līdz veselam skaitlim, jānoapaļo uz leju;

b) noapaļojot $2 \cdot a$, $4 \cdot a$, $6 \cdot a$ līdz veselam skaitlim, jānoapaļo uz augšu.

2. Rūtiņu lapā uzzīmēt figūru, kuras malas iet pa rūtiņu līnijām un kuru var sadalīt četrās daļās tā, ka katra daļa sastāv no veselām rūtiņām un katra daļa saskaras ar katru citu daļu vismaz pa vienas rūtiņas malu. Vai prasītās figūras laukums var būt mazāks nekā 10 rūtiņas?

3. Pareizā vienādībā $4 \cdot 4 = 16$ var katru ciparu izmainīt tieši par 1 un atkal iegūt pareizu vienādību $5 \cdot 5 = 25$. Atrast

a) kaut vienu piemēru ar tādu pašu īpašību, kurā reizina viencipara skaitli un trīsciparu skaitli,

b) kaut vienu piemēru ar tādu pašu īpašību, kurā reizina viencipara skaitli un divciparu skaitli, pie tam sākotnējā vienādībā ir vismaz četri dažādi cipari.

4. Grāmatas lappuses ir sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 2014 pēc kārtas. Cik lappušu numuros ir sastopams vismaz viens no cipariem 3 vai 7?

5. Uz tāfeles rindā uzrakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 20. Roberts izvēlas jebkurus divus no tiem, nodzēš tos un rindas galā uzraksta šo skaitļu starpību (ja skaitļi ir dažādi, starpību aprēķina, no lielākā skaitļa atņemot mazāko). Šo darbību atkārto, kamēr uz tāfeles paliek viens skaitlis.

a) Vai iespējams, ka šis skaitlis ir 0?

b) Vai iespējams, ka šis skaitlis ir 1?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 64. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

7. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Dots vienādojums

$$\square \cdot x + \square = \square$$

Ariadne vienā (jebkurā) rūtiņā ieraksta vienu skaitli, pēc tam Eleonora citā rūtiņā ieraksta vienu skaitli un beidzot Ariadne ieraksta skaitli atlikušajā tukšajā rūtiņā. Pierādīt, ka Ariadne var panākt jebkuru no trim situācijām:

a) vienādojumam ir tieši viens atrisinājums;
b) vienādojumam nav atrisinājumu;
c) vienādojumam ir bezgalīgi daudz atrisinājumu.

(Spēles sākumā jau zināms, kuru situāciju jāiegūst.)

2. Uz taisnā leņķa KLM malām atlikti punkti X un Y (katrs uz savas malas); uz tā bisektrises ņemts tāds punkts O, ka $\angle XOY = 90°$. Pierādīt, ka $OX = OY$.

3. Cik starp pirmajiem 2014 naturālajiem skaitļiem ir tādu skaitļu x, ka skaitlis $x(x+1)(x+2)$ dalās ar 87?

4. Uz ballīti ieradās N ($N > 1$) cilvēki un ballītes beigās katrs uz lapiņas uzrakstīja veselu skaitli robežās no 0 līdz $N-1$ – cik jau iepriekš pazīstamus cilvēkus ballītē saticis. Uzskatīsim, ka pazīšanās ir abpusēja – ja A pazīst B, tad B pazīst A. Izrādījās, ka uz visām lapiņām bija uzrakstīti atšķirīgi skaitļi. Pierādīt, ka vismaz viens no ballītes apmeklētājiem ir kļūdījies.

5. Pilsētas ielu tīkls veido kvadrātveida režģi, kas sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā no 81 rūtiņu stūriem ir autobusu pietura; citu pieturu nav. Kādu vismazāko skaitu autobusa maršrutu jāievieš, lai no katras pieturas varētu aizbraukt uz katru citu, izdarot ne vairāk kā vienu pārsēšanos? Pa katru maršrutu autobuss kursē abos virzienos; katrs maršruts drīkst saturēt augstākais vienu pagriezienu.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 64. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

8. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Dots, ka $a+b+c=0$ un $a \neq 0$. Pierādīt, ka vienādojumam $ax^2+bx+c=0$ ir saknes (varbūt vienādas), un izteikt tās, neizmantojot kvadrātsaknes zīmi.

2. Taisnstūra *ABCD* diagonāle *BD* ir taisnstūra *BDEF* mala, punkts *C* atrodas uz *EF*. Malas *BC* viduspunkts ir *G*. Pierādīt, ka $AG = EG$.

3. Cik ir tādu piecciparu skaitļu, kuru pierakstā ir vismaz viens nepāra cipars?

4. Uz ballīti ieradās N ($N>1$) cilvēki un ballītes beigās katrs uz lapiņas uzrakstīja veselu skaitli robežās no 0 līdz $N-1$ – cik jau iepriekš pazīstamus cilvēkus ballītē saticis. Uzskatīsim, ka pazīšanās ir abpusēja – ja A pazīst B, tad B pazīst A. Vai var būt, ka uz visām lapiņām bija uzrakstīti nepāra skaitļi, ja **a)** $N=2014$, **b)** $N=2401$?

5. Trijstūra virsotnes atrodas kvadrātiska rūtiņu režģa punktos. Pierādīt, ka kāda no trijstūra malām iet vai nu caur kādu citu rūtiņu režģa punktu, vai kādas rūtiņas centru.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 64. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

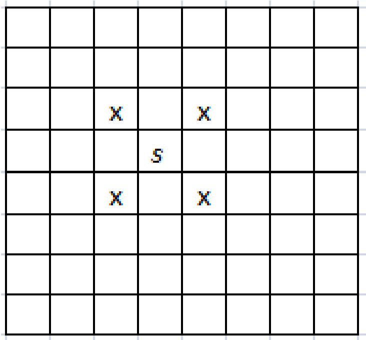
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Vai vienādojumam $2x^2+a^2+b^2=2x\cdot(a+b)$ ir atrisinājums, ja a un b ir dažādi skaitļi?

2. Taisnstūra malu garumi ir veseli skaitļi, tā perimetrs ir par 8 mazāks nekā taisnstūra laukums. Atrast visus šādus taisnstūrus.

3. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $3abc+3a+3b=7bc+7$.

4. Figūra „*sienāzis*" apdraud tās rūtiņas, kas tai pieskaras ar stūriem (skat. 1 zīm, kur s - *sienāzis*, x - rūtiņas, ko tas apdraud). Cik dažādos veidos uz 8×8 rūtiņu šaha galdiņa var novietot vienu baltu un vienu melnu *sienāzi* (katru savā rūtiņā) tā, lai tie viens otru neapdraudētu?



1. zīm.

5. Kvadrāta *ABCD* malas garums ir 1; *M* ir malas *AD* viduspunkts. Nogriežņi *AC* un *BM* krustojas punktā *S*. Aprēķināt trijstūra *ASM* laukumu.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 64. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Dots, ka $x^3 > 2$. Pierādīt, ka

a) $x^6 > 4$;

b) $x^7 > 5$.

2. Pierādīt, ka, izvēloties 52 no aritmētiskās progresijas 1, 4, 7, 10, ... locekļiem, kas nepārsniedz 300, vienmēr starp šiem skaitļiem var atrast divus skaitļus, kuru summa ir 302.

3. Piecstūris *ABCDE* ievilkts riņķa līnijā, nogriežņi *AD* un *BE* krustojas punktā *F*. Zināms, ka $BC = DF = DE$. Pierādīt, ka $AC = CE$.

4. Zināms, ka $a_1, a_2, ..., a_{10}$ ir tādi dažādi nepāra naturāli skaitļi, ka $a_1 > \sqrt{a_2}$, $a_2 > \sqrt{a_3}$, ..., $a_9 > \sqrt{a_{10}}$ un $a_{10} > \sqrt{a_1}$. Aprēķināt vismazāko summas $a_1 + a_2 + ... + a_{10}$ vērtību.

5. Grozos pa apli izvietotas 2014 konfektes tā, ka blakus grozos konfekšu skaits atšķiras tieši par 1. Zināms, ka ir vismaz divi grozi un katrā grozā ir vismaz viena konfekte. Kāds var būt **a)** vismazākais; **b)** vislielākais grozu skaits?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 64. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

---

1. Polinoms $P(x)$, kura visi koeficienti ir veseli skaitļi, piecām veselām x vērtībām pieņem vērtību 2000. Pierādīt, ka nav tādas veselas x vērtības, pie kuras dotais polinoms pieņem vērtību 2014.

2. Riņķa līnijā ar centru punktā O novilkti divi savstarpēji perpendikulāri rādiusi OA un OB. Caur hordas AB viduspunktu C novilkta horda DE, kas paralēla OA (punkts D atrodas uz mazākā loka AB). Aprēķināt leņķa AOD lielumu!

3. Kādiem naturāliem skaitļiem n piemīt šāda īpašība: visu skaitļa n naturālo dalītāju, izņemot 1 un n, kvadrātu summa ir vienāda ar pašu skaitli n?

4. Kādā pilsētā ir n detektīvi ($n \geq 2$) un cita starpā tie izseko arī viens otru. Zināms, ka jebkuriem diviem detektīviem A un B vai nu A izseko B, vai B izseko A. Pierādīt, ka visus detektīvus var nostādīt vienā rindā tā, ka pirmais izseko otro, otrais - trešo, ..., $(n-1)$-ais izseko n-to.

5. Neviens no reāliem skaitļiem x, y un z nav nulle un $x+y+z=xyz$. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\geq 1.$$

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 64. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Zināms, ka $a > \frac{1}{2}$, $b > \frac{1}{2}$, $c > \frac{1}{2}$ un x ir vienādojuma $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ sakne. Pierādīt, ka $x > -\frac{1}{2}$.

2. Uz paralelograma $ABCD$ pretējām malām AB un CD atzīmēti attiecīgi punkti E un F. Nogriežņu AF un DE krustpunkts ir H, bet BF un CE krustpunkts ir G. Pierādīt, ka $S_{EGFH} = S_{ADH} + S_{BCG}$.

3. Uz tāfeles uzrakstīti visi trīsciparu skaitļi, kas dalās ar 31:

124, 155, 186, 217, ..., 961, 992.

Vai no šiem skaitļiem var izvēlēties **a)** deviņus, **b)** desmit tā, ka gan simtu, gan desmitu, gan vienu pozīcijā vismaz pa vienai reizei ir atrodams katrs no cipariem 1 līdz 9?

4. Alise nēsā rokassprādzes, kas sastāv no virtenē savērtām 10 melnām un 20 baltām pērlītēm. Marta zaķis prot rokassprādzei samainīt divas pērlītes vietām tad, ja starp tām atrodas tieši trīs citas pērlītes. Cik rokassprādzes Alise var vienlaicīgi nēsāt, lai Marta zaķis ar atkārtotām darbībām no tām nevarētu iegūt divas vienādas? Rokassprādzes tiek uzskatītas par vienādām, ja tās sakrīt pagriežot pa apli (ap roku).

5. Vai var atrast tādus 2014 dažādus naturālus skaitļus $a_1, a_2, ..., a_{2014}$, ka

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_{2014}} = 1?$$