LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 65. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

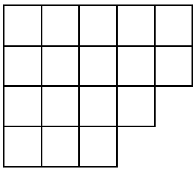
5. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Mudīte ar automašīnu plkst. 7:10 devās ceļā no Skrundas uz Daugavpili, braucot cauri Rīgai. Rīgā viņa iebrauca plkst. 9:10 un no Rīgas uz Daugavpili izbrauca plkst. 9:40. Daugavpilī viņa nokļuva plkst. 12:40. Aprēķini attālumu no Skrundas līdz Rīgai, ja attālums no Rīgas līdz Daugavpilij ir 225 kilometri! Braukšanas ātrums visā ceļa posmā bija viens un tas pats.

2. Niknajam jūras laupītājam Smuidrim ir četras kaudzes ar zelta monētām. Viņš māk vienu kaudzi sadalīt 3 vai 5 mazākās kaudzēs. Vai, atkārtoti izpildot šādas darbības, Smuidris varēs iegūt tieši 2015 kaudzes, ko piešķirt saviem palīgiem?

3. Rihards ir izcepis interesantas formas torti, kuras pamatā ir 17 kvadrātveida cepumi (skat. 1. att.). Parādi vienu veidu, kā torti sadalīt četros pēc formas vienādos gabalos, lai katrs saturētu tieši četrus cepumus, un gabaliņš ar vienu cepumu paliktu pāri. Tā kā tortes augšpuse ir izdekorēta, tad gabalus drīkst grozīt, bet nedrīkst apmest otrādi.



1. att.

4. Reizināšanas piemērā ciparus aizstāja ar burtiem – vienādi cipari tika aizstāti ar vienādiem burtiem, dažādi – ar dažādiem. Tika iegūta šāda izteiksme:

$$EJA \cdot M = 2015.$$

Nosaki, kāds cipars atbilst katram burtam! *Atrodi visas iespējas un pamato, ka citu nav!*

5. Raimonds stāv upes krastā un viņam ir divi spaiņi. Viena spaiņa tilpums ir 10 litri, bet otra spaiņa tilpumu Raimonds ir aizmirsis – tas ir vai nu 7, vai 8 litri. Kā Raimondam ar ūdens pārliešanu palīdzību noteikt otrā spaiņa tilpumu? Nekādu citu palīglīdzekļu Raimondam nav un, ieskatoties nepilnā spainī, nav iespējams precīzi noteikt tajā esošā ūdens daudzumu.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 65. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

6. klase

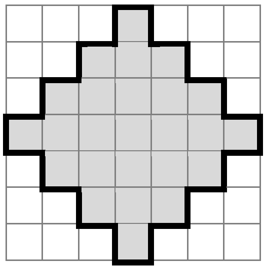
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Veikalā ir divu veidu saldumu pakas. Vienā pakā ir 8 vienādas lielas šokolādes un 6 vienādas mazas šokolādes, bet otrā pakā ir 12 tādas pašas lielas šokolādes un 6 tādas pašas mazas šokolādes. Aprēķini, cik maksā viena lielā šokolāde un cik maksā viena mazā šokolāde, ja pirmās pakas cena ir 15 eiro un otrās – 21 eiro! (Pakas cena veidojas, saskaitot tajā ielikto šokolāžu cenu.)

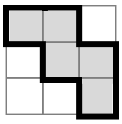
2. Bagātajai Austrumu princesei Smuidrai zem gultas ir 6 lādes. Sākumā lādēs ir attiecīgi 1, 5, 0, 0, 2, 3 zelta monētas. Katru stundu viņa izvēlas 2 lādes un katrā no tām pieliek klāt 1 monētu. Vai, atkārtoti izpildot šādas darbības, var panākt, ka kādā brīdī visās lādēs būs vienāds skaits monētu?

3. Tabulā, kuras izmēri ir 3×3 rūtiņas, katrā rūtiņā ierakstīts tieši viens naturāls skaitlis no 1 līdz 9 (visi ierakstītie skaitļi ir dažādi). Katrām divām rūtiņām ar kopīgu malu aprēķina tajos ierakstīto skaitļu summu. Vai iespējams, ka neviena no šīm summām nav pirmskaitlis?

4. Rūtiņu lapā uzzīmēta figūra (skat. 2. att.). Kāds ir lielākais skaits 3. att. doto figūru, ko var izgriezt no 2. att. figūras? Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām.



2. att.



3. att.

5. Sivēntiņš 229 ābolus salika 60 grozos. Dažos grozos viņš ielika x ābolus, bet pārējos – katrā pa 3 āboliem. Nosaki visas iespējamās naturālās x vērtības!

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 65. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

7. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Atrisini vienādojumu $\frac{8a-5}{5}-\frac{2a-7}{2}=-3$.

2. Sensenos laikos saimnieciskajam Gotfrīdam bija 99 aitas un 21 kamielis, citu mājlopu Gotfrīdam nebija. Bagdādē par 4 kamieļiem pretī varēja saņemt 8 aitas, bet Damaskā par 5 aitām pretī varēja saņemt 3 kamieļus. Vai, atkārtoti mainot dzīvniekus tikai šajās divās pilsētās, Gotfrīds varēja iegūt tieši 2015 mājlopus?

3. Tabulā, kuras izmēri ir 3×3 rūtiņas, katrā rūtiņā ierakstīts viens naturāls skaitlis, kas nepārsniedz 10, visi ierakstītie skaitļi ir dažādi. Katrām divām rūtiņām ar kopīgu malu aprēķina tajos ierakstīto skaitļu summu. Vai iespējams, ka visas iegūtās summas ir pirmskaitļi?

4. Taisnstūris *ABCD* sagriezts kvadrātos, katra iegūtā kvadrāta perimetrs ir naturāls skaitlis. Vai taisnstūra *ABCD* perimetrs noteikti ir naturāls skaitlis?

5. Uz galda rindā novietotas sešas monētas, zināms, ka starp tām ir vismaz viena īsta un vismaz viena viltota monēta, kas ir vieglāka nekā īstā. Visas īstās monētas sver vienādi, un arī visas viltotās monētas sver vienādi, bet ir vieglākas par īstajām. No katras īstās monētas pa labi (ne noteikti blakus) atrodas kāda viltota monēta, bet no katras viltotās pa kreisi (ne noteikti blakus) atrodas kāda īsta monēta. Kā ar divām svēršanām ar sviru svariem bez atsvariem var noteikt katra veida monētu skaitu?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 65. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

8. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Pierādi, ka

a) $49^5 + 7^9$ dalās ar 2;

b) $49^5 - 7^9$ dalās ar 6.

2. Autoservisā „Šrotiņš" ir 39 mašīnas. Naskais Maigonis katra mēneša 20. datumā vai nu pārdod 7 restaurētas mašīnas un to vietā nopērk 16 vecas mašīnas, vai arī 19 mašīnas nodod metāllūžņos un to vietā nopērk 4 vecas mašīnas. Nekādas citas darbības, kas maina mašīnu skaitu, netiek veiktas. Vai iespējams, ka „Šrotiņā" kāda mēneša 21. datumā būs tieši 2015 mašīnas?

3. Kurš no skaitļiem $(a+b)(c+d)$, $(b+c)(d+a)$, $(a+c)(b+d)$ ir vislielākais un kurš – vismazākais, ja zināms, ka $a > b > c > d > 0$? Pamato atbildi!

4. Uz vienādmalu trijstūra ABC malām AB un BC attiecīgi atlikti punkti M un N tā, ka $MB + BN = AC$. Pierādi, ka $\angle MAN + \angle MCN = 60°$.

5. Kvadrāts $ABCD$ sagriezts kvadrātos, katra iegūtā kvadrāta perimetrs ir naturāls skaitlis. Vai kvadrāta $ABCD$ perimetrs noteikti ir naturāls skaitlis?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 65. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Atrisināt vienādojumu $\frac{5}{x^2-9}-\frac{1}{3-x}=\frac{1}{2}$.

2. Regulāra astoņstūra virsotnēs pēc kārtas uzrakstīti skaitļi 7, 15, 3, 17, 1, 9, 5, 11. Ar skaitļiem atļauts veikt šādas darbības:

- pieskaitīt kādam skaitlim divus skaitļus, kas atrodas blakus virsotnēs;
- atņemt no skaitļa divkāršotu pretējā virsotnē uzrakstīto skaitli, ja starpība ir pozitīva.

Vai, atkārtoti izpildot šīs darbības, var panākt, ka vienā no virsotnēm būs ierakstīts skaitlis 2014?

3. Vai jebkuru taisnstūri var sagriezt **a)** 2014, **b)** 2015 savstarpēji līdzīgos trijstūros?

4. Uz tāfeles uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 13. Dārta grib nodzēst vienu no tiem, bet pārējos ierakstīt 3×4 rūtiņu tabulā (katru skaitli vienā rūtiņā) tā, lai visās rindās un kolonnās skaitļu vidējais aritmētiskais būtu vienāds.
a) Pierādīt, ka ir tieši viens skaitlis, kuru nodzēšot, viņa to varēs izdarīt!
b) Atrast vienu skaitļu izvietojuma piemēru!

5. Apskata visas funkcijas $y=ax^2+x+b$, kur koeficientus a un b saista sakarība $a+2b=2015$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti!

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 65. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Uz parabolas $y = ax^2 + bx + c$ atrodas punkts $M(1;15)$, tās virsotne ir punktā $N(-3;-1)$. Noteikt koeficientus *a, b* un *c*!

2. Ar naturālu skaitli atļauts veikt šādas darbības:

- pieskaitīt 6;
- dalīt ar 4, ja skaitlis dalās ar 4;
- mainīt vietām skaitļa ciparus (skaitļa sākumā nedrīkst atrasties nulle).

Vai, atkārtoti izpildot šīs darbības, no skaitļa 30 var iegūt skaitli 2015?

3. Vairāku pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summa ir 177. Kādas vērtības var pieņemt mazākais no šiem saskaitāmajiem?

4. Vai eksistē tāds vesels skaitlis *x*, ka visi skaitļi

a) $x,\ x+23,\ x+45,\ x+121;$

b) $x,\ x+23,\ x+46,\ x+121$

ir veselu skaitļu pakāpes ar naturālu kāpinātāju, kas lielāks nekā 1 (kāpinātāji var būt dažādi)?

5. Uz kvadrāta *ABCD* malas *AB* kā pamata uz kvadrāta ārpusi konstruēts trijstūris *AEB*. Taisne, kas vilkta no *E* caur kvadrāta diagonāļu krustpunktu *O*, krusto kvadrāta malu *AB* punktā *F* un malu *DC* – punktā *G*. Zināms, ka $\angle OEB = \angle OCG$. Pierādīt, ka trijstūris *AEB* ir taisnleņķa!

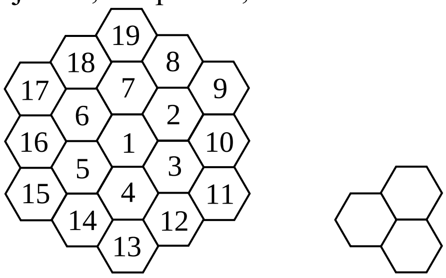
LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 65. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Atrisināt nevienādību $|x-2|-6+\dfrac{5}{|x-2|}>0$.

2. Vienā gājienā no 1. zīm. attēlotās figūras var izvēlēties jebkuru 2. zīm. redzamo figūru (figūru var arī pagriezt) un tajā ierakstītajiem skaitļiem vai nu pieskaitīt 1, vai arī atņemt 1.
Vai, atkārtoti izpildot šādus gājienus, var panākt, ka visās šūnās ir ierakstīts skaitlis 2015?



1. zīm. 2. zīm.

3. Kāds ir mazākais naturālais skaitlis *n*, kuru iespējams izteikt kā trīs dažādu naturālu skaitļu *a, b* un *c* summu tā, ka visi skaitļi $a+b$, $a+c$, $b+c$ ir naturālu skaitļu kvadrāti?

4. Uz trijstūra *XAC* malas *XC* atlikts iekšējs punkts *B* tā, ka $AB=AC$. Leņķu *ACB* un *ABX* bisektrises krustojas punktā *D*. Pierādīt, ka $AD=AB$!

5. Dots taisnstūris ar izmēriem $n\times m$ rūtiņas. Sākumā katrā rūtiņā ir ierakstīts 5. Māris dotajā taisnstūrī veic secīgas darbības:

1) izvēlas kādu taisnstūri un visās tā rūtiņās ieraksta ciparu 1;
2) izvēlas kādu taisnstūri un visās tā rūtiņās ieraksta ciparu 2;
3) izvēlas kādu taisnstūri un visās tā rūtiņās ieraksta ciparu 3;
4) visbeidzot izvēlas kādu taisnstūri un visās tā rūtiņās ieraksta ciparu 4.

Katra izvēlētā taisnstūra malām jāiet pa rūtiņu līnijām un cipars vienmēr jāraksta rūtiņā jau esošā skaitļa labajā pusē.
Vai iespējams, ka visās rūtiņās ierakstītie skaitļi ir dažādi, ja dotā taisnstūra izmēri ir **a)** 3×6, **b)** 3×5, **c)** 4×4 rūtiņas?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 65. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Atrisināt vienādojumu $(x-2)\log_{\sqrt{6}}(x^2-5x)=2x-\log_{\sqrt{6}}36$.

2. Ar naturālu skaitli atļauts izdarīt šādas darbības:
- pieskaitīt skaitlim tā ciparu summu;
- atņemt no skaitļa tā ciparu summu.

Vai, atkārtoti izpildot šīs darbības, no skaitļa 139 var iegūt skaitli **a)** 63; **b)** 193?

3. Cik daudz ir piecciparu skaitļu, kas sastāv tieši no trīs dažādiem cipariem, no kuriem neviens nav 0 un neviens neatkārtojas vairāk kā divas reizes?

4. Izliekta četrstūra *ABCD* malu *AB*, *BC*, *CD* un *DA* viduspunkti ir attiecīgi *E*, *F*, *G* un *H*. Nogrieznis *AF* krustojas ar *DE* un *BG* attiecīgi punktos *K* un *L*, bet *CH* krustojas ar *DE* un *BG* attiecīgi punktos *N* un *M*. Pierādīt, ka $S_{BFL}+S_{CMG}+S_{DNH}+S_{AKE}=S_{KLMN}$!

5. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi *a*, *b* un *c*, ka skaitļa $a^2+b^2+c^2$

a) pēdējie divi cipari ir 15;

b) pēdējie četri cipari ir 2015?