Latvijas 74. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi un atrisinājumi
9.-12. klase

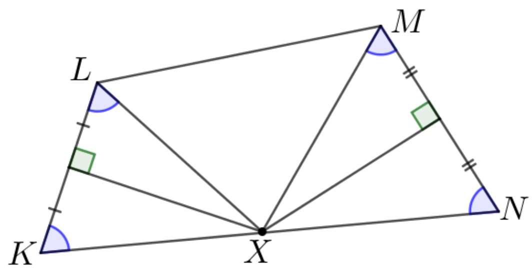
9. klase

9.1. Dots izliekts četrstūris $KLMN$. Zināms, ka $\sphericalangle LKN = \sphericalangle MNK$ un malu KL un MN vidusperpendikulu krustpunkts X atrodas uz malas KN. Pierādīt, ka $KM = LN$!

Atrisinājums. Pēc vidusperpendikula īpašības iegūstam, ka $XK = XL$ un $XN = XM$, tātad ΔKXL un ΔMXN ir vienādsānu trijstūri un to pamata pieleņķi ir vienādi, tas ir, $\sphericalangle XKL = \sphericalangle XLK$ un $\sphericalangle XMN = \sphericalangle XNM$ (skat. 1. att.).
Ievērojam, ka $\sphericalangle KXL = 180° - 2\sphericalangle XKL = 180° - 2\sphericalangle XNM = \sphericalangle MXN$. Tātad $\sphericalangle KXM = \sphericalangle KXL + \sphericalangle LXM =$ $= \sphericalangle MXN + \sphericalangle LXM = \sphericalangle LXN$ un $\Delta KXM = \Delta LXN$ pēc pazīmes mlm:

- $KX = LX$;
- $\sphericalangle KXM = \sphericalangle LXN$;
- $XM = XN$.

Tātad $KM = LN$ kā atbilstošās malas vienādos trijstūros.



1. att.

9.2. Pierādīt, ka $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 3$.

1. atrisinājums. Katru zemsaknes izteiksmi izteiksim kā summas vai starpības kvadrātu un veiksim ekvivalentus pārveidojumus:

$$\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} + \left(2\sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 1^2} + \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 1^2} =$$

$$= \sqrt{\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{2} - 1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{2} + 1\right)^2} = \left|3 - 2\sqrt{2}\right| + \left|\sqrt{2} - 1\right| + \left|\sqrt{2} + 1\right| =$$

$$= 3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1 = 3.$$

2. atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 3;$$

$$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}.$$

Ievērojam, ka $\sqrt{17-12\sqrt{2}} < \sqrt{9}$, tāpēc vienādības labās puses izteiksmes vērtība ir pozitīva, un varam kāpināt kvadrātā abas vienādības puses, pēc tam veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2 = \left(3-\sqrt{17-12\sqrt{2}}\right)^2;$$

$$3-2\sqrt{2}+2\sqrt{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}+3+2\sqrt{2} = 9-6\sqrt{17-12\sqrt{2}}+17-12\sqrt{2};$$

$$3-2\sqrt{2}+2\sqrt{9-8}+3+2\sqrt{2} = 9-6\sqrt{17-12\sqrt{2}}+17-12\sqrt{2};$$

$$6\sqrt{17-12\sqrt{2}} = 18-12\sqrt{2}.$$

Ievērojam, ka $12\sqrt{2} < 18$, tāpēc abas vienādības puses ir pozitīvas un varam tās kāpināt kvadrātā, pēc tam veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\left(6\sqrt{17-12\sqrt{2}}\right)^2 = \left(18-12\sqrt{2}\right)^2;$$

$$36\cdot\left(17-12\sqrt{2}\right) = 324-18\cdot 24\sqrt{2}+288;$$

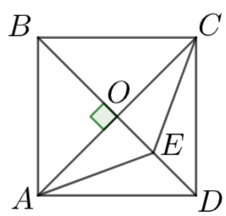
$$612-36\cdot 12\sqrt{2} = 612-18\cdot 24\sqrt{2};$$

$$3\cdot 12\cdot 12\sqrt{2} = 3\cdot 6\cdot 2\cdot 12\sqrt{2}.$$

Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi un iegūta patiesa vienādība, tad arī dotā vienādība ir patiesa.

9.3. Uz kvadrāta $ABCD$ diagonāles BD atlikts punkts E. Pierādīt, ka $ED\cdot EB+EA\cdot EC = AB^2$!

Atrisinājums. Apzīmējam diagonāļu krustpunktu ar O; $BD = d$ un $OE = x$. Diagonāle BD ir kvadrāta simetrijas ass, tāpēc $EA = EC$ (skat. 2. att.).



2. att.

Kvadrāta diagonāles ir perpendikulāras un krustpunktā dalās uz pusēm, tāpēc trijstūris AOE ir taisnleņķa trijstūris, kurā pēc Pitagora teorēmas iegūstam, ka $EA^2 = AO^2+OE^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2+x^2$. Tādā gadījumā iegūstam:

$$ED\cdot EB+EA\cdot EC = (OD-OE)(OB+OE)+EA^2 =$$

$$= \left(\frac{d}{2}-x\right)\left(\frac{d}{2}+x\right)+\left(\frac{d}{2}\right)^2+x^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2-x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2+x^2 = 2\cdot\frac{d^2}{4} = \frac{d^2}{2}.$$

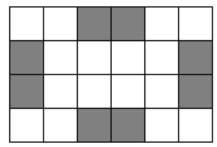
Izmantojot Pitagora teorēmu vienādsānu taisnleņķa trijstūrī ABD, iegūstam, ka $AB^2+AD^2 = BD^2$. Tā kā $AB = AD$, tad $2AB^2 = d^2$ jeb $AB^2 = \frac{d^2}{2}$.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka $ED\cdot EB+EA\cdot EC = \frac{d^2}{2} = AB^2$.

9.4. Taisnstūrī ar izmēriem 4×6 rūtiņas sākotnēji katrā rūtiņā atradās tieši viens kaķis. Vienā brīdī katrs kaķis pārlēca uz kādu no blakus rūtiņām (katrs kaķis pārlēca tieši vienu reizi). Vai var gadīties, ka tagad visi kaķi atrodas tieši: **a)** 8 rūtiņās; **b)** 7 rūtiņās?

Piezīme. Divas rūtiņas sauc par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.

Atrisinājums. a) Jā, var, piemēram, skat. 3. att., kur visi kaķi atrodas pelēkajās rūtiņās (katrs kaķis no baltās rūtiņas varēja pārlēkt uz kādu pelēko rūtiņu, un kaķi, kas sākumā atradās kādā no pelēkajām rūtiņām, pārlēca uz blakus esošo pelēko rūtiņu).



3. att.

Piezīme. Der arī piemērs, kur kaķi pārlec uz otrās un piektās kolonnas rūtiņām.

b) Nē, nevar. Pierādīsim, ka kaķi tagad atrodas vismaz 8 rūtiņās.

Aplūkojam tos 8 kaķus, kas sākumā atradās 3. att. iekrāsotajās rūtiņās, un ievērosim, ka nekādi divi no tiem pēc pārlēkšanas nevar atrasties vienā un tajā pašā rūtiņā. Lai divi kaķi no pelēkajām rūtiņām varētu nonākt vienā un tajā pašā rūtiņā, būtu jābūt tādai rūtiņai, kurai divas blakus rūtiņas ir pelēkā krāsā, bet tādas rūtiņas nav. Tātad pēc pārlēkšanas kaķi atradīsies vismaz 8 rūtiņās.

9.5. Dots naturāls skaitlis, kura cipari ir sakārtoti augošā secībā (katrs cipars, izņemot pirmo, ir lielāks nekā tā kaimiņš kreisajā pusē). Pierādīt, ka 9 reizes lielāka skaitļa ciparu summa ir 9.

Atrisinājums. Ievērojam, ka $9x = 10x - x = \overline{x0} - x$. Apzīmējam $x = \overline{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}$ un aplūkojam skaitļa $9x = \overline{x0} - x$ ciparus, ievērojot, ka ciparu virkne ir augoša:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 \\
- & & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
\hline
 & a_1 & a_2 - a_1 & a_3 - a_2 & \cdots & a_{n-1} - a_{n-2} & a_n - a_{n-1} - 1 & 10 - a_n
\end{array}
$$

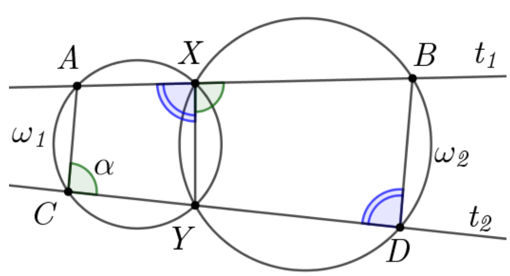
Aplūkojot skaitļa $9x$ ciparu summu, iegūstam prasīto:

$$a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1} - 1) + 10 - a_n = 9.$$

10. klase

10.1. Dotas divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2, kas krustojas punktos X un Y. Taisne t_1, kas vilkta caur X, krusto ω_1 un ω_2 attiecīgi punktos A un B (punkts X atrodas starp A un B), savukārt taisne t_2, kas vilkta caur Y, krusto $\omega_1$un ω_2 attiecīgi punktos C un D (punkts Y atrodas starp C un D). Pierādīt, ka AC ir paralēla ar BD!

Atrisinājums. Apzīmējam $\sphericalangle ACY = \alpha$ (skat. 4. att.). Tā kā četrstūris $CAXY$ ir ievilkts četrstūris, tad tā pretējo leņķu summa ir $180°$, tātad $\sphericalangle AXY = 180° - \alpha$. Ievērojam, ka $\sphericalangle BXY = 180° - \sphericalangle AXY = \alpha$ (blakusleņķu īpašība). Tā kā četrstūris $BDYX$ ir ievilkts četrstūris, tad tā pretējo leņķu summa ir $180°$. Tātad $\sphericalangle BDY = 180° - \sphericalangle BXY = 180° - \alpha$. Tā kā $\sphericalangle ACY + \sphericalangle BDY = \alpha + 180° - \alpha = 180°$ un tie ir iekšējie vienpusleņķi pie taisnēm AC un BD, kuras krusto taisne t_2, tad $AC \parallel BD$.



4. att.

10.2. Doti reāli skaitļi x un y, kuriem $xy^3+1=x+y^3$. Pierādīt, ka $yx^3+1=y+x^3$.

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus un sadalām vienādības kreiso pusi reizinātājos:

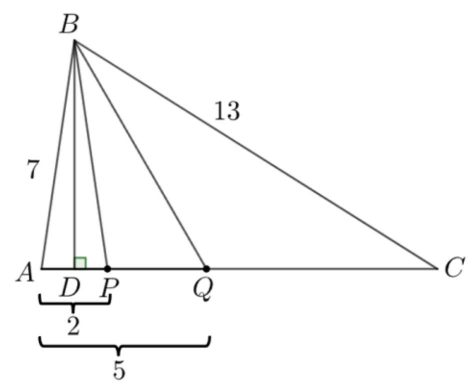
$$xy^3+1-x-y^3=0;$$
$$x(y^3-1)-(y^3-1)=0;$$
$$(y^3-1)(x-1)=0.$$

Tā kā reizinājums ir vienāds ar 0, tad $y^3-1=0$ vai $x-1=0$ jeb $y=1$ vai $x=1$. Apskatām abus gadījumus:

- ja $y=1$, tad vienādība $yx^3+1=y+x^3$ ir patiesa, jo $x^3+1=1+x^3$;
- ja $x=1$, tad vienādība $yx^3+1=y+x^3$ ir patiesa, jo $y+1=y+1$.

10.3. Šaurleņķu trijstūra ABC malu garumi ir $AB=7$ cm, $AC=12$ cm un $BC=13$ cm. Pierādīt, ka uz malas AC var atrast tādus divus iekšējus punktus P un Q, ka nogriežņu AP, AQ, BP un BQ garumi ir izsakāmi veselā skaitā centimetru!

Atrisinājums. Punkti P un Q jāatliek tā, ka $AP=2$ cm un $AQ=5$ cm (skat. 5. att.). Parādīsim, ka šādā gadījumā $BP=7$ cm un $BQ=8$ cm.



5. att.

Pret malu AC novelkam augstumu BD. Izmantojot Pitagora teorēmu trijstūros BDA un BDC, iegūstam, ka $AB^2-AD^2=BD^2=BC^2-DC^2$. Tā kā $AC=12$ cm, tad varam izteikt, ka $CD=12-AD$. Līdz ar to iegūstam, ka

$$7^2-AD^2=13^2-(12-AD)^2;$$
$$49-AD^2=169-(144-24AD+AD^2);$$
$$24AD=24 \quad\Rightarrow\quad AD=1 \text{ cm}.$$

Izmantojot Pitagora teorēmu trijstūrī ADB, iegūstam, ka $BD^2=AB^2-AD^2=48$.

Tā kā $DP=AP-AD=2-1=1$ cm, tad pēc Pitagora teorēmas ΔBDP iegūstam, ka $BP=\sqrt{BD^2+DP^2}=$ $=\sqrt{48+1}=7$ cm.

Tā kā $DQ=AQ-AD=5-1=4$ cm, tad pēc Pitagora teorēmas ΔBDQ iegūstam, ka $BQ=\sqrt{BD^2+DQ^2}=$ $=\sqrt{48+16}=8$ cm.

Piezīmes

1. Augstumu BD var aprēķināt arī, izmantojot trijstūra laukumu (pēc Hērona formulas).
2. Vajadzīgos punktus var iegūt, mēģinot kombinēt dažādus malu garumus, lai iegūtu, ka hipotenūzas garums ir vesels skaitlis.

10.4. Atrast visus tādus veselu skaitļu pārus $(a; b)$, kuriem izpildās vienādība $(a+b)^2 = a^3 + b^3$.

Atrisinājums. Sadalām vienādības labo pusi reizinātājos:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

Ievērojam, ka jebkuram skaitļu pārim $(a; b)$, kuram $a + b = 0$, dotā vienādība ir identitāte, jo tad abas puses ir vienādas ar 0. Tātad der skaitļu pāri $(k; -k)$, kur k ir vesels skaitlis.

Apskatām gadījumu, kad $a + b \neq 0$. Dotās vienādības abas puses dalām ar izteiksmi $a + b \neq 0$ un iegūstam:

$$a + b = a^2 - ab + b^2.$$

Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam:

$$a^2 - a - ab + b^2 - b = 0;$$
$$2a^2 - 2a - 2ab + 2b^2 - 2b = 0;$$
$$(a^2 - 2ab + b^2) + a^2 - 2a + b^2 - 2b = 0;$$
$$(a-b)^2 + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) - 2 = 0;$$
$$(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 = 2.$$

Tā kā a un b ir veseli skaitļi, tad vienīgais veids, kā trīs veselu skaitļu kvadrātu summai iegūt vērtību 2, ir, ja viens saskaitāmais ir 0, bet atlikušie divi ir 1. Apskatām visus gadījumus.

- Ja $a - b = 0$ jeb $a = b$, tad pārējiem saskaitāmajiem jābūt vienādiem ar 1, tātad $a - 1 = b - 1 = 1$ vai arī $a - 1 = b - 1 = -1$ (šis gadījums neder, jo $a + b \neq 0$). Tātad $a = b = 2$ jeb der skaitļu pāris $(2; 2)$.
- Ja $a - 1 = 0$ jeb $a = 1$, tad $(1-b)^2 + (b-1)^2 = 2(b-1)^2 = 2$ jeb $b = 0$ vai $b = 2$, līdz ar to iegūstam divus atrisinājumus $(1; 0)$ un $(1; 2)$.
- Gadījums, kad $b - 1 = 0$, ir simetrisks iepriekšējam, tad secinām, ka der arī skaitļu pāri $(2; 1)$ un $(0; 1)$.

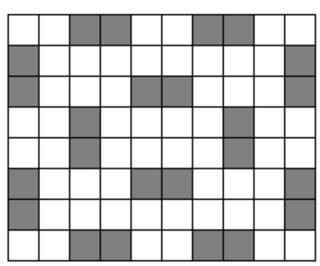
Līdz ar to esam ieguvuši, ka derīgie skaitļu pāri ir: $(1; 0)$, $(1; 2)$, $(0; 1)$, $(2; 1)$, $(2; 2)$ un $(k; -k)$, kur k ir vesels skaitlis.

Piezīme. Vienādojumu $a + b = a^2 - ab + b^2$ var risināt arī kā kvadrātvienādojumu $a^2 - (b+1)a + b^2 - b = 0$ attiecībā pret nezināmo a, tad $D = -3b^2 + 6b + 1$, kuram ir reālas saknes, ja $D \geq 0$ jeb $b \in \left[\frac{3-2\sqrt{3}}{3}; \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]$. Pārbauda veselās b vērtības, kas atrodas atbilstošajā intervālā, tās ir 0; 1; 2.

10.5. Taisnstūrī ar izmēriem 8×10 rūtiņas sākotnēji katrā rūtiņā atradās tieši viena varde. Vienā brīdī katra varde pārlēca uz kādu no blakus rūtiņām (katra varde pārlēca tieši vienu reizi). Vai var gadīties, ka tagad visas vardes atrodas tieši: **a)** 24 rūtiņās; **b)** 23 rūtiņās?

Piezīme. Divas rūtiņas sauc par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.

Atrisinājums. a) Jā, var, piemēram, skat. 6. att., kur visas vardes ir nonākušas pelēkajās rūtiņās (katra varde no baltās rūtiņas varēja pārlēkt uz kādu pelēko rūtiņu, un vardes, kas sākumā atradās kādā no pelēkajām rūtiņām, pārlēca uz blakus esošo pelēko rūtiņu).



6. att.

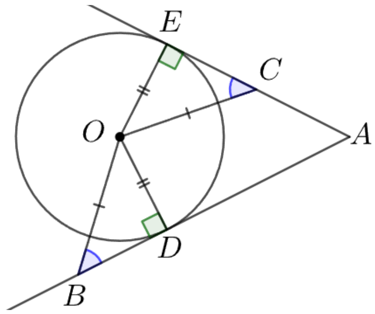
b) Nē, nevar. Pierādīsim, ka vardes atrodas vismaz 24 rūtiņās.

Aplūkosim tās 24 vardes, kas sākumā atradās 6. att. iekrāsotajās rūtiņās, un ievērosim, ka nekādas divas no tām pēc pārlēkšanas nevar atrasties vienā un tajā pašā rūtiņā. Lai divas vardes no pelēkajām rūtiņām varētu nonākt vienā un tajā pašā rūtiņā, būtu jābūt tādai rūtiņai, kurai divas blakus rūtiņas ir pelēkā krāsā, bet tādas rūtiņas nav. Tātad pēc pārlēkšanas vardes atradīsies vismaz 24 rūtiņās.

11. klase

11.1. No punkta A, kas atrodas ārpus riņķa līnijas ar centru O, novilktas divas pieskares, kas pieskaras riņķa līnijai punktos D un E. Uz taisnēm AD un AE atlikti attiecīgi punkti B un C tā, ka punkts D atrodas starp A un B, punkts C atrodas starp A un E un $OB = OC$. Pierādīt, ka punkti O, A, B un C atrodas uz vienas riņķa līnijas!

Atrisinājums. Tā kā $OD = OE$ (rādiusi) un $OB = OC$ (dots), tad abi taisnleņķa trijstūri OBD un OCE ir vienādi pēc pazīmes hk, tātad to atbilstošie leņķi ir vienādi: $\sphericalangle OBD = \sphericalangle OCE$ (skat. 7. att.). Ievērosim, ka pēc blakusleņķu īpašības $\sphericalangle OCA = 180° - \sphericalangle OCE = 180° - \sphericalangle OBD$, tātad $\sphericalangle OBA + \sphericalangle OCA = \sphericalangle OBD + (180° - \sphericalangle OBD) = 180°$. Tātad ap četrstūri $OCAB$ var apvilkt riņķa līniju un punkti O, A, B un C atrodas uz vienas riņķa līnijas.



7. att.

11.2. Reāliem skaitļiem x un y ir spēkā vienādība: $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 5$. Pierādīt, ka $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} < 3$.

1. atrisinājums. Reizinot dotās vienādības abas puses ar $(x^2 - y^2) \neq 0$, iegūstam:

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 5(x^2 - y^2);$$

$$2x^2 + 2y^2 = 5x^2 - 5y^2 \qquad \Rightarrow \qquad y^2 = \frac{3}{7}x^2.$$

Ievietojam iegūto sakarību pierādāmās nevienādības kreisās puses izteiksmē:

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{\frac{10}{7}x^2}{\frac{4}{7}x^2} + \frac{\frac{4}{7}x^2}{\frac{10}{7}x^2} = \frac{5}{2} + \frac{2}{5} = \frac{29}{10} < 3.$$

2. atrisinājums. Vienādojot saucējus izteiksmē $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}$, iegūstam, ka

$$\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = 2 \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}.$$

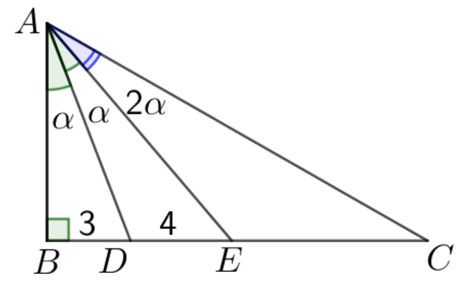
Tātad, ja $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 5$, tad $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{5}{2}$ un

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-\ y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+\ y^2} = \frac{5}{2} + \frac{2}{5} = \frac{29}{10} < 3.$$

11.3. Taisnleņķa trijstūrī ABC ($\sphericalangle ABC = 90°$) uz malas BC atlikti punkti D un E tā, ka $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAE$, $\sphericalangle EAC = 2\sphericalangle BAD$, $BD = 3$, $DE = 4$. Aprēķināt EC garumu!

1. atrisinājums. Izmantojot bisektrises īpašību trijstūrī ABE (skat. 8. att.), iegūstam, ka $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DE} = \frac{3}{4}$. Apzīmējam $AB = 3x$ un $AE = 4x$. Pēc Pitagora teorēmas ΔABE iegūstam:

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 \quad \Rightarrow \quad 16x^2 = 9x^2 + 49 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{7} \quad \Rightarrow \quad AB = 3\sqrt{7}\,; \quad AE = 4\sqrt{7}.$$



8. att.

Izmantojot bisektrises īpašību ΔABE, iegūstam, ka $\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{BE} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$. Apzīmējot $AC = 3\sqrt{7}a$ un $EC = 7a$ un lietojot Pitagora teorēmu ΔABC, iegūstam:

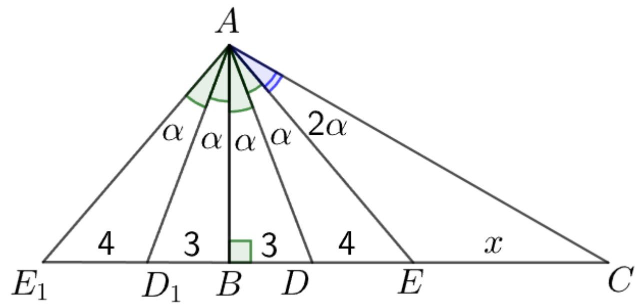
$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \quad \Rightarrow \quad \left(3\sqrt{7}\right)^2 + (7 + 7a)^2 = \left(3\sqrt{7}a\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 9 \cdot 7 + 7^2 + 2 \cdot 7^2 a + 7^2 a^2 = 9 \cdot 7a^2$$

$$9 + 7 + 14a + 7a^2 = 9a^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 - 7a - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 8 \text{ vai } a = -1 \text{ (neder).}$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka $EC = 7a = 56$.

2. atrisinājums. Apzīmējam $EC = x$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAE = \alpha$, $\sphericalangle EAC = 2\alpha$ un atliekam punktiem D un E attiecīgi simetriskus punktus D_1 un E_1 pret taisni AB (skat. 9. att.). Tātad $BD_1 = BD = 3$ un $DE = D_1E_1 = 4$. Izmantosim bisektrises īpašību un nogriežņu garumu vienādību $AE_1 = AE$ (simetrijas dēļ):

1) ΔBAC bisektrise AE: $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{EC} = \frac{7}{x}$;
2) ΔBAE bisektrise AD: $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DE} = \frac{3}{4}$;
3) ΔE_1AC bisektrise AD: $\frac{AE_1}{AC} = \frac{E_1D}{DC} \quad \Rightarrow \quad \frac{AE}{AC} = \frac{10}{4+x}$.



9. att.

No 2) un 3) iegūstam, ka

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AE} \cdot \frac{AE}{AC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{4 + x} = \frac{30}{4(4 + x)}.$$

Izmantojot 1), iegūstam:

$$\frac{30}{4(4 + x)} = \frac{7}{x} \quad \Rightarrow \quad 30x = 112 + 28x \quad \Rightarrow \quad x = 56.$$

Tātad $EC = x = 56$.

11.4. Pierādīt: ja a, b, c ir naturāli skaitļi un $a + \mathrm{LKD}(a,b) = b + \mathrm{LKD}(b,c) = c + \mathrm{LKD}(c,a)$, tad $a = b = c$.

Piezīme. Ar $\mathrm{LKD}(a,b)$ ir apzīmēts skaitļu a un b lielākais kopīgais dalītājs.

1. atrisinājums. Pierādīsim, ka $\mathrm{LKD}(a,b) = \mathrm{LKD}(a,c) = \mathrm{LKD}(b,c)$.

Apzīmējam $\mathrm{LKD}(a,b) = x$. Tātad gan a, gan b dalās ar x. Tā kā $\mathrm{LKD}(b,c) = a + \mathrm{LKD}(a,b) - b$ un vienādības labajā pusē visi locekļi dalās ar x, tad arī $\mathrm{LKD}(b,c)$ dalās ar x. Tas nozīmē, ka arī c dalās ar x, līdz ar to arī $\mathrm{LKD}(a,c)$ dalās ar x.

Tātad esam pierādījuši, ka $\mathrm{LKD}(a,c)$ dalās ar $\mathrm{LKD}(a,b)$. Līdzīgi varam pierādīt arī, ka $\mathrm{LKD}(a,b)$ dalās ar $\mathrm{LKD}(a,c)$. No tā secinām, ka $\mathrm{LKD}(a,b) = \mathrm{LKD}(a,c)$ un simetrijas dēļ $\mathrm{LKD}(b,c) = \mathrm{LKD}(a,b) = x$.

Ievietojot to dotajā vienādībā, iegūstam, ka $a + x = b + x = c + x$ jeb $a = b = c$.

2. atrisinājums. Pieņemsim, ka visi trīs skaitļi a, b, c dalās ar kādu naturālu skaitli y. Tādā gadījumā varam ievērot, ka arī skaitļi $a_1 = \frac{a}{y}$, $b_1 = \frac{b}{y}$ un $c_1 = \frac{c}{y}$ ir doto vienādojumu atrisinājums (tas izriet no tā, ka $\mathrm{LKD}\left(\frac{a}{y}, \frac{b}{y}\right) = \frac{\mathrm{LKD}(a,b)}{y}$).

Par y var izvēlēties visu trīs doto skaitļu lielāko kopīgo dalītāju un tālāk aplūkot skaitļus a_1, b_1 un c_1, kam izpildās uzdevuma nosacījumi un kuru lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

Līdzīgi kā 1. atrisinājumā varam iegūt, ka, ja $\mathrm{LKD}(a_1, b_1) = x$, tad arī c_1 dalās ar x. Bet tā kā visu skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad secinām, ka $\mathrm{LKD}(a_1, b_1) = 1$.

Līdzīgi iegūstam, ka $\mathrm{LKD}(b_1, c_1) = 1$ un $\mathrm{LKD}(c_1, a_1) = 1$. Tātad $a_1 + 1 = b_1 + 1 = c_1 + 1$ jeb $a_1 = b_1 = c_1 = 1$.

11.5. Uz galda stāv n kastes, kurās ir āboli un bumbieri, katrā kastē ir vismaz viens ābols un vismaz viens bumbieris. Zināms, ka kastes var sakārtot rindā gan tā, ka katrā nākamajā kastē ir par vienu ābolu vairāk nekā iepriekšējā, gan tā, ka katrā nākamajā kastē ir par vienu bumbieri vairāk nekā iepriekšējā, gan tā, ka katrā nākamajā kastē ir par vienu augli vairāk nekā iepriekšējā. Vai iespējams, ka: **a)** $n = 2024$; **b)** $n = 2025$?

Atrisinājums. a) Pamatosim, ka $n = 2024$ nav iespējams. Izmantosim pierādījumu no pretējā. Pieņemsim, ka mums ir tādas 2024 kastes ar augļiem, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem. Tā kā kastes var pārkārtot tā, ka katrā nākamajā kastē ir par vienu ābolu vairāk nekā iepriekšējā, tad varam secināt, ka ābolu skaits šajā sakārtojumā ir 2024 pēc kārtas esoši naturāli skaitļi. Ja ar a apzīmējam mazāko ābolu skaitu kādā kastē, tad lielākais skaits būs $a + 2023$. Pie tam varam secināt, ka ābolu kopā ir $\frac{a+(a+2023)}{2} \cdot 2024 = 1012(2a + 2023)$. Līdzīgi varam spriest par bumbieriem, tas ir, ja mazāko bumbieru skaitu apzīmējam ar b, tad kopējais bumbieru skaits ir $1012(2b + 2023)$. Vēl ir dots, ka šīs kastes var sakārtot tā, lai kopējais augļu skaits veidotu pēc kārtas esošu naturālu skaitļu virkni. Ja apzīmējam mazāko augļu skaitu ar k, tad kopējais augļu skaits visās kastēs ir $1012(2k + 2023)$, jo augļu skaits kastēs ir pēc kārtas esoši naturāli skaitļi. Ievērojam, ka kopējais augļu skaits būs arī $1012(2a + 2023) + 1012(2b + 2023) =$ $= 1012(2a + 2023 + 2b + 2023)$. Tātad jābūt, ka

$$1012(2a + 2023 + 2b + 2023) = 1012(2k + 2023);$$
$$2(a + b + 2023) = 2k + 2023.$$

Iegūstam pretrunu. Vienādības kreisās puses vērtība ir pāra skaitlis, bet labās puses izteiksmes vērtība ir nepāra skaitlis. Tātad pieņēmums ir aplams un nav iespējams, ka uz galda ir 2024 kastes.

b) Parādīsim, kā izveidot kastes ar augļiem tā, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, ja $n = 2025$. Saliksim augļus tā, ka gan ābolu, gan bumbieru skaits kastēs būs visi naturālie skaitļi no 1 līdz 2025, bet kopējās augļu skaits kastēs būs visi naturālie skaitļi no 1014 līdz 3038. Sakārtosim kastes vienā rindā. Kā salikt ābolus un bumbierus kastēs parādīts tabulā.

Kastes nr.	1.	2.	3.	…	1013.	1014.	1015.	…	2024.	2025.
Ābolu skaits	1	2	3	…	1013	1014	1015	…	2024	2025
Bumbieru skaits	2025	2023	2021	…	1	2024	2022	…	4	2
Kopā	2026	2025	2024	…	1014	3038	3037	…	2028	2027

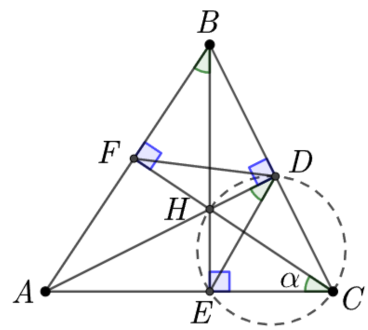
Vispirms katrā kastē saliekam ābolus tā, ka pirmajā kastē ir 1 ābols un katrā nākamajā kastē ir par 1 ābolu vairāk nekā iepriekšējā (tātad pēdējā kastē ir 2025 āboli). Tad pirmajā kastē ieliksim 2025 bumbierus, bet katrā nākamajā par 2 bumbieriem mazāk līdz pat 1013. kastei, kurā ielieksim 1 bumbieri. Tālāk 1014. kastē ieliksim 2024 bumbierus

un atkal katrā nākamajā kastē ieliksim par 2 bumbieriem mazāk nekā iepriekšējā līdz nonāksim pie 2025. kastes, kurā ieliksim 2 bumbierus.
Redzams, ka pirmajās 1013 kastēs augļu skaits ir attiecīgi no 2026 līdz 1014 (katrā nākamajā kastē par vienu mazāk), bet atlikušajās 1012 kastēs tas ir attiecīgi no 3038 līdz 2027 (katrā nākamajā kastē par vienu mazāk).

12. klase

12.1. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkti augstumi AD, BE un CF, kas krustojas punktā H. Pierādīt, ka DH ir leņķa EDF bisektrise!

Atrisinājums. Tā kā $\sphericalangle HEC + \sphericalangle HDC = 180°$, tad ap četrstūri $EHDC$ var apvilkt riņķa līniju un $\sphericalangle ECH = \sphericalangle EDH = \alpha$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku EH (skat. 10. att.). Taisnleņķa trijstūros AFC un AEB izmantojam iekšējo leņķu summu. Tātad $\sphericalangle CAF = 180° - \sphericalangle AFC - \sphericalangle FCA = 90° - \alpha$ un $\sphericalangle ABE = 180° - \sphericalangle BEA - \sphericalangle BAE =$
$= 180° - 90° - (90° - \alpha) = \alpha$. Ievērojam, ka $\sphericalangle HFB + \sphericalangle HDB = 180°$, tad ap četrstūri $FBDH$ var apvilkt riņķa līniju un $\sphericalangle FDH = \sphericalangle FBH = \alpha$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku FH. Tātad $\sphericalangle HDE = \alpha = \sphericalangle FDH$ un DH ir leņķa EDF bisektrise.



10. att.

12.2. Reāliem skaitļiem x un y ir spēkā vienādība $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 7$. Pierādīt, ka $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} > \sqrt{14}$.

1. atrisinājums. Reizinot dotās vienādības abas puses ar $(x^2 - y^2) \neq 0$, iegūstam:

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 7(x^2 - y^2);$$

$$2x^2 + 2y^2 = 7x^2 - 7y^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{5}{9}x^2.$$

Ievietojam iegūto sakarību pierādāmās nevienādības kreisās puses izteiksmē:

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{\frac{14}{9}x^2}{\frac{4}{9}x^2} + \frac{\frac{4}{9}x^2}{\frac{14}{9}x^2} = \frac{7}{2} + \frac{2}{7} = \frac{53}{14} = \sqrt{\left(3\frac{11}{14}\right)^2} = \sqrt{\left(4 - \frac{3}{14}\right)^2} = \sqrt{16 - \frac{24}{14} + \frac{9}{196}} =$$

$$= \sqrt{14\frac{2}{7} + \frac{9}{196}} > \sqrt{14}.$$

2. atrisinājums. Vienādojot saucējus izteiksmē $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}$, iegūstam, ka

$$\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = 2 \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}.$$

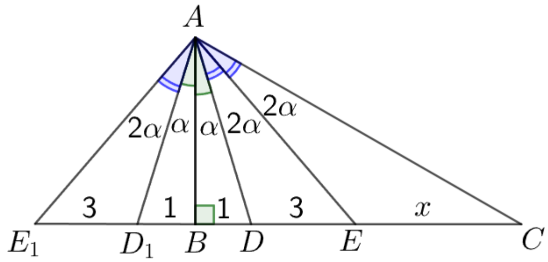
Tātad, ja $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 7$, tad $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{7}{2}$ un

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-\ y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+\ y^2}=\frac{7}{2}+\frac{2}{7}=\frac{53}{14}=\sqrt{\frac{53^2}{14^2}}=\sqrt{\frac{2809}{196}}=\sqrt{14\frac{65}{196}}>\sqrt{14}.$$

12.3. Taisnleņķa trijstūrī ABC ($\sphericalangle ABC=90°$) uz malas BC atlikti punkti D un E tā, ka $\sphericalangle EAC=\sphericalangle DAE=2\sphericalangle BAD$, $BD=1$, $DE=3$. Aprēķināt EC garumu!

Atrisinājums. Apzīmēsim $EC=x$, $\sphericalangle BAD=\alpha$, $\sphericalangle DAE=\sphericalangle EAC=2\alpha$ un punktiem D un E atliksim attiecīgi simetriskus punktus D_1 un E_1 pret taisni AB (skat. 11. att.). Tātad $BD_1=BD=1$ un $DE=D_1E_1=3$. Izmantosim bisektrises īpašību vairākos trijstūros un nogriežņu garumu vienādību $AD_1=AD$; $AE_1=AE$ (simetrijas dēļ):

1) ΔDAC bisektrise AE: $\frac{AD}{AC}=\frac{DE}{EC}=\frac{3}{x}$;
2) ΔD_1AE bisektrise AD: $\frac{AD_1}{AE}=\frac{D_1D}{DE}\quad\Rightarrow\quad\frac{AD}{AE}=\frac{2}{3}$;
3) ΔE_1AC bisektrise AD: $\frac{AE_1}{AC}=\frac{E_1D}{DC}\quad\Rightarrow\quad\frac{AE}{AC}=\frac{5}{3+x}$.



11. att.

No 2) un 3) iegūstam, ka

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AD}{AE}\cdot\frac{AE}{AC}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3+x}=\frac{10}{3(3+x)}$$

Izmantojot 1), iegūstam:

$$\frac{10}{3(3+x)}=\frac{3}{x}\qquad\Rightarrow\qquad 10x=27+9x\qquad\Rightarrow\qquad x=27.$$

Tātad $EC=x=27$.

12.4. Pie lielas konfekšu kastes pienāk Māris un Kims. Viņi abi pamīšus ņem no kastes konfektes, Māris sāk pirmais. Katrā gājienā spēlētājs var izvēlēties patvaļīgu pirmskaitli p un patvaļīgu veselu nenegatīvu skaitli n un paņemt no kastes p^n konfektes. Uzvar tas spēlētājs, pēc kura gājiena kaste paliek tukša. Spēli sāk Māris. Kurš spēlētājs, pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt, ja sākumā kastē ir: **a)** 20; **b)** 2024 konfektes?

Atrisinājums. Pamatosim, ka Māris abos gadījumos var uzvarēt. Ievērosim, ka vienā gājienā drīkst paņemt 1; 2; 3; 4 vai 5 konfektes, bet nedrīkst paņemt 6 konfektes, tāpat nedrīkst paņemt konfekšu skaitu, kas ir 6 daudzkārtnis. Tātad Māris var spēlēt tā, lai pēc viņa gājiena atlikušo konfekšu skaits dalās ar 6. Tā kā nav iespējams paņemt konfekšu skaitu, kas sakrīt ar kādu skaitļa 6 daudzkārtni, tad Kims vienmēr pēc sava gājiena konfekšu kaudzē atstās tādu skaitu, kas nedalīsies ar 6. Ņemot vērā, ka ir iespējams paņemt 1; 2; 3; 4 vai 5 konfektes, tad Māris vienmēr varēs panākt, ka pēc viņa gājiena kastē atlikušais konfekšu skaits dalīsies ar 6. Tā kā 0 dalās ar 6 (situācija, kad paņemtas visas konfektes), tad Māris ar šādu stratēģiju vienmēr uzvarēs.

Pirmajā gājienā **a)** gadījumā Mārim jāpaņem 2 (vai 8) konfektes, lai pāri paliktu 18 (vai 12) konfektes. Arī **b)** gadījumā pirmajā gājienā Māris var paņemt 2 konfektes, lai pāri paliktu 2022 konfektes, kas dalās ar 6 (Māris pirmajā gājienā var ņemt arī citu konfekšu skaitu, piemēram, 8; 32; 128; …).

12.5. Atrast visus pirmskaitļu pārus $(p; q)$, kuriem izpildās vienādība $p^q = q^p + 7$.

Atrisinājums. Vispirms ievērosim, ka abi pirmskaitļi p un q vienlaicīgi nevar būt pāra skaitļi vai nepāra skaitļi. Ja $p = q = 2$, tad $2^2 \neq 2^2 + 7$. Ja gan p, gan q būtu nepāra skaitļi, tad p^q būtu nepāra skaitlis, bet $q^p + 7$ būtu pāra skaitlis, tāpēc vienādība nebūtu patiesa. Tādēļ tieši viens no abiem skaitļiem ir 2, bet otrs ir kāds nepāra pirmskaitlis.

Apskatīsim gadījumu, ja $p = 2$. Tātad mums jāatrod visi nepāra pirmskaitļi q, lai izpildītos vienādība $2^q = q^2 + 7$. Apskatām divas mazākās q vērtības:

- ja $q = 3$, tad $2^3 = 9 \neq 16 = 3^2 + 7$;
- ja $q = 5$, tad $2^5 = 32 = 5^2 + 7$, tātad $(2; 5)$ ir derīgs skaitļu pāris.

Lai pamatotu, ka citu atrisinājumu nav, parādīsim, ka lielākām q vērtībām vienādības kreisās puses izteiksme vienmēr ir lielāka nekā labās puses izteiksme, tas ir, ka visiem naturāliem $q \geq 7$ izpildās $2^q > q^2 + 7$. Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.

Indukcijas bāze. Ja $q = 7$, tad $2^7 = 128 > 56 = 7^2 + 7$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka nevienādība izpildās, ja $q = k \geq 7$, tas ir, $2^k > k^2 + 7$.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka nevienādība ir spēkā arī tad, ja $q = k + 1$, tas ir,

$$2^{k+1} > (k+1)^2 + 7 = k^2 + 2k + 8.$$

Izmantojam induktīvo pieņēmumu, ka $2^k > k^2 + 7$, un izteiksmju novērtēšanu, ievērojot, ka $k \geq 7$:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(k^2 + 7) = k^2 + k^2 + 14 \geq k^2 + 7k + 14 > k^2 + 2k + 8.$$

Secinājums. Tā kā nevienādība ir patiesa, ja $q = 7$, un no tā, ka nevienādība ir spēkā, ja $q = k$, izriet, ka nevienādība ir spēkā arī $q = k + 1$, secinām, ka nevienādība ir spēkā visiem naturāliem skaitļiem $q \geq 7$.

Tātad vienādojumam $2^q = q^2 + 7$ nav atrisinājuma, ja $q \geq 7$.

Aplūkosim gadījumu, ja $q = 2$. Tātad mums jāatrod visi nepāra pirmskaitļi p, lai izpildītos vienādība $p^2 = 2^p + 7$ jeb $2^p = p^2 - 7$. No iepriekš pierādītā jau zināms, ka visiem $p \geq 7$ šī vienādība nav spēkā, jo tādā gadījumā $2^p > p^2 + 7 > p^2 - 7$. Atliek pārbaudīt gadījumus $p = 3$ un $p = 5$. Tie abi neder kā vienādojuma $2^p = p^2 - 7$ atrisinājumi, jo $2^3 \neq 3^2 - 7$ un $2^5 \neq 5^2 - 7$.

Līdz ar to vienīgais derīgais skaitļu pāris ir $(2; 5)$.

Piezīme. Gadījumu, ja $q = 2$, var pamatot, apskatot šo vienādojumu pēc moduļa 4. Tā kā $p \geq 3$, tad $2^p + 7 \equiv 0 + 3 \equiv 3 \pmod 4$. Tā kā p ir nepāra skaitlis, tas ir, $p = 2n + 1$ kādam naturālam skaitlim n, tad $p^2 \equiv (2n+1)^2 \equiv$ $\equiv 4n^2 + 4n + 1 \equiv 1 \pmod 4$. Tā kā $1 \not\equiv 3 \pmod 4$, tad vienādojumam nav atrisinājuma, ja $q = 2$.