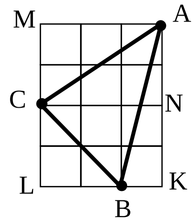
## Īsi atrisinājumi.

**5.1.** Jā, piemēram 7, 17, un 95 vieninieki.



1. zīm.

**5.2.** $S(ACM)=\frac{1}{2}S(ANCM)=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2=3$ rūtiņas, līdzīgi $S(AKB)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1=2$ rūtiņas un $S(CBL)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$ rūtiņas.

Tātad $S(ABC)=S(AKLM)-S(ACM)-S(AKB)-S(CBL)=$
$=3\cdot 4-3-2-2=5$ rūtiņas (skat. 1. zīm.).

**5.3.** Ievērosim trīs nosacījumus, kuriem jābūt spēkā visu ceļojuma laiku:
autobusā nevienā brīdī nedrīkst būt vairāk par 40 pasažieriem, nevienā pieturā no autobusa nevar izkāpt vairāk pasažieru, nekā ir autobusā un katru pilsētu var apmeklēt ne vairāk kā vienreiz.

Pirmā pilsēta ir A un, izbraucot no tās, autobusā ir 34 pasažieri, bet pēdējā ir G, iebraucot tajā autobusā bija 28 pasažieri.

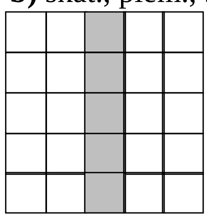
Otrā pilsēta var būt C, tad pēc maršruta AC nobraukšanas autobusā ir 35 pasažieri (apzīmēsim to AC (35)) vai arī otrā pilsēta var būt E, tātad AE (22).

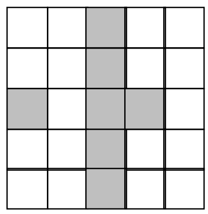
Analizēsim iespējamos šo maršrutu turpinājumus:

1) ACE (23) → ACEB (30) vai ACED (34), taču neviens no šiem maršrutiem nav tālāk turpināms.
2) **ACF (22) → ACFD (33) → ACFDB (40) → ACFDBE (28) → ACFDBEG (0)**
3) ACF (22) → ACFD (33) → ACFDE (21) – maršruts nav turpināms.
4) AED (33) → AEDB (40) →AEDBF (27) – maršruts nav turpināms.
5) AED (33) → AEDC (34) – maršruts nav turpināms.

Tātad vienīgais maršruts, kas apmierina visus noteikumus, ir **ACFDBEG**.

**5.4. a)** skat., piem., 2. zīm.; **b)** skat., piem., 3. zīm.


2. zīm.


3. zīm.

**5.5.** Atbilde: pēc 3 minūtēm.
Ar trim minūtēm pietiek, ja sarunas raganu starpā notiek, piemēram, šādi:
1. minūte: AB, CD, EF, GH.
2. minūte: AC, BD, EG, FH.
3. minūte: AE, BF, CG, DH.

Tā kā katru jauno burvestību pēc 2 minūtēm var zināt augstākais 4 raganas, tad ar 2 minūtēm nepietiek.

---

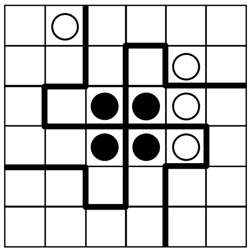
**6.1.** Ja tāds sadalījums būtu iespējams, tad katrā grupā un līdz ar to arī visu skaitļu summa būtu pāra skaitlis (katrā grupā ietilpstošo skaitļu summa ir $2M_i$, kur $M_i$ ir attiecīgās grupas lielākais skaitlis). Taču visu doto skaitļu summa $1+2+3+\cdots+21=231$ ir nepāra skaitlis.

**6.2.** Pavisam šajā virknē ir 5·4·3·2·1=120 skaitļi. Interesējošais skaitlis ir pēdējais, kas sākas ar 4, un pēc šī skaitļa virknē vēl ir 24 skaitļi, kas sākas ar ciparu 5. Tātad šajā virknē skaitlis 45321 atrodas 96. vietā.

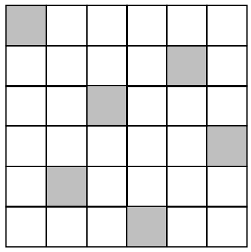
**6.3. a)** nē, jo gan 12, gan 8 dalās ar 4, bet 2 – nedalās.

**b)** jā; piemēram, $11 \cdot 4 - 7 \cdot 6 = 2$.

**6.4.** Skat., piem., 4. zīm.



4. zīm.



5. zīm.

**6.5.** Skat., piem., 5. zīm.

---

**7.1.** Tā kā katriem desmit pēc kārtas ņemtiem skaitļiem kvadrātu summa beidzas ar vienu un to pašu ciparu, un šai summai pievienojot $0^2$, tajā būs desmit desmitnieku (0, 1, 2,... 9; 10, 11, ..., 19; ...; 90, 91, ..., 99), tātad meklētās summas pēdējais cipars ir nulle.

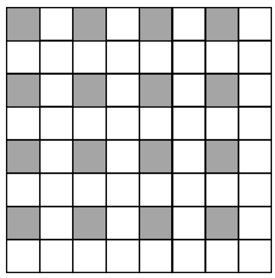
**7.2.** Ievērojam, ka $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$. Vismaz vienam no reizinātājiem $n+1$; $n+2$; $n+3$ jādalās ar 5. Tā kā skaitļi, kas dalās ar 5, atšķiras viens no otra vismaz par 5, tad tieši viena iekava dalās ar 125. Šī iekava ir viens no skaitļiem $125 \cdot k$, kur $k = 1, 2, 3, ..., 16$, jo jau $125 \cdot 17 > 2011$. Tāpēc meklējamo skaitļu ir $16 \cdot 3 = 48$.

**7.3. Atbilde:** tieši viens no tiem.

Vispirms pierādīsim, ka kāds no skaitļiem ir 0. Ja neviens no tiem nav nulle, tad visu blakus skaitļu reizinājumi ir negatīvi, tātad jebkuri divi blakus skaitļi ir ar pretējām zīmēm. Ja mēs skaitļus apzīmējam ar *a*,*b*,*c*,*d*,*e*, tad *a* un *b* ir ar pretējām zīmēm, *b* un *c* ir ar pretējām zīmēm, tātad *a* un *c* ir ar vienādām zīmēm. Tieši tāpat pamato, ka *c* un *e* arī ir ar vienādām zīmēm. Bet tātad arī *a* un *e* ir ar vienādām zīmēm un reizinājums *ae* ir pozitīvs – pretruna.

Tātad, viens no skaitļiem ir 0, pieņemsim, ka *e*=0. Tad zīmes skaitļiem *a*,*b*,*c*,*d* var būt vai nu "+ - + -" vai "- + - +". Redzams, ka no reizinājumiem *abc*, *bcd* viens ir pozitīvs ("- + -") un viens negatīvs ("+ - +"). Pārējie trīs triju blakusstāvošu skaitļu reizinājumi satur reizinātāju *e*, tātad to vērtība ir 0. Tātad tieši viens no šiem reizinājumiem ir pozitīvs.

**7.4. a)** Var, skat., piem., 6. zīm.



6. zīm.

**b)** Nē, nevar. Kvadrātu 8×8 rūtiņas sadalām 16 kvadrātiņos ar izmēriem 2×2 rūtiņas. Vismaz vienā no tiem būs vismaz divas aizkrāsotās rūtiņas, bet tās ir blakusrūtiņas.

**7.5.** Ar $g$ apzīmēsim cik % no visiem iedzīvotājiem ir godīgie, ar $g_A$ (resp. $g_B$, $g_C$, $g_D$) – tos godīgos iedzīvotājus (% no visiem iedzīvotājiem), kas balsoja par A (resp., B, C, D) partiju, $g_A + g_B + g_C + g_D = g$; līdzīgi ar $b$, $b_A$, $b_B$, $b_C$, $b_D$ apzīmēsim blēžus (% no visiem iedzīvotājiem).

Par A pozitīvi atbildēja godīgie iedzīvotāji, kas balsoja par A un tie blēži, kas nebalsoja par A. Tātad $g_A + b - b_A = 22\%$. Līdzīgi: $g_B + b - b_B = 33\%$, $g_C + b - b_C = 44\%$ un $g_D + b - b_D = 55\%$.

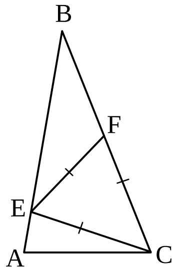
Saskaitot šīs vienādības, iegūstam $g + 3b = 154\%$, tātad $2b$=54% jeb $b$=27% un $g$=73%.

---

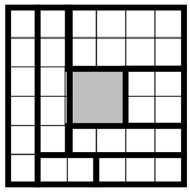
**8.1.** Uzrakstām $\overline{abcde} = (9999a + 999b + 99c + 9d) + (a + b + c + d + e)$. Atņemot saskaitāmie $(a + b + c + d + e)$ saīsinās.

**8.2.** Ievietojot $x$=1, iegūstam $1 + p + q = 0$ jeb $p + q = -1$.

**8.3.** ∠FCE=∠CEF=∠EFC=60°. Tad ∠BFE=180°-60°=120° (blakusleņķi) un ∠BEF=180°-30°-120°=30°, tātad ΔEBF – vienādsānu un BF=EF=FC (skat. 7. zīm.)



7. zīm.

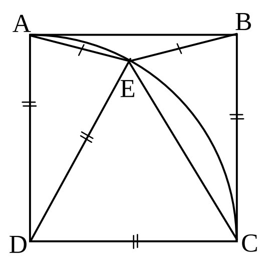

8. zīm.

**8.4.** Figūru var sagriezt augstākais 7 dažādos taisnstūros, piem., skat. 8. zīm.
Ja to sagrieztu tādos taisnstūros, kuru laukums nepārsniedz 6 rūtiņas, tad to laukumu summa nepārsniegtu 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 = 31 < 32 (šie taisnstūri ir ar izmēriem 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, 2×2, 1×5, 1×6 un 2×3 rūtiņas).
Tāpēc, figūru sagriežot kaut kādā skaitā taisnstūru, kāda iegūtā taisnstūra laukums būs vismaz 8. Pie tam, neviena taisnstūra laukums nebūs vienāds ar 7. Tāpēc, ja figūru sagrieztu vismaz 8 dažādos taisnstūros, tad to laukumu summa, ievērojot visu augstākminēto, būtu vismaz 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 8 = 33 > 32 – pretruna. Tāpēc 7 ir lielākais dažādo taisnstūru skaits, kuros figūru var sagriezt.

**8.5.** Tā kā par partiju D neviens iedzīvotājs nav atbildējis ar „jā”, tad visi blēži ir balsojuši par šo partiju un $g_D = 0$ (*apzīmējumi tādi paši kā 7.5. uzdevuma risinājumā*). Par partiju A ar „Jā” atbildēja visi godīgie iedzīvotāji, kas balsoja par A (apzīmēsim tos ar $g_A$) un visi blēži (apzīmēsim tos ar $b$), tātad $g_A + b = 33\%$. Līdzīgi par partiju B balsoja $g_B + b = 44\%$ iedzīvotāju, bet par partiju C – $g_C + b = 55\%$.
Saskaitot visas vienādības, iegūstam $g_A + g_B + g_C + 3b = g + 3b = 132\%$ jeb $2b = 32\%$ un $b = 16\%$. Tātad par partiju A ir balsojuši 17%, par B – 28%, par C – 39%, par D – 16% iedzīvotāju.

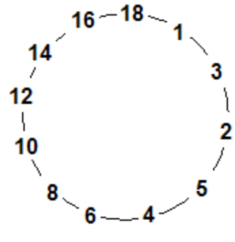
---

**9.1.** Ja $x = 1$, tad $y = a + 1 + b = 2012$. Ja $x = -1$, tad $y = a - 1 + b = 2010$. Tātad punkti $(1;\,2012)$ un $(-1;\,2010)$ pieder visu minēto funkciju grafikiem.




**9.2.** <u>Atbilde:</u> ∠ABE=15°.
Apzīmēsim ∠ABE=$x$, tad ∠ADE=2$x$. Tā kā ΔADE – vienādsānu, tad ∠DAE=(180°-2$x$):2=90°-$x$. Tātad ∠BAE=$x$ un ΔAEB ir vienādsānu trijstūris, kur AE=BE. ∠BEC=90°-$x$=∠DAE, tātad ΔAED=ΔBEC (*mlm*), tātad arī DE=EC=DC un ΔDEC – vienādmalu. ∠EDC=60°, ∠ADE=30°=2$x$ un $x$=15°. Tātad ∠ABE=15°.

**9.3.** <u>Atbilde:</u> $k$=12.
Apzīmēsim pāra skaitļus ar $p$, bet nepāra ar $n$. Tā kā $p$ skaits ir trīs reizes lielāks par $n$ skaitu, tad $k$ jādalās ar 4. Tā kā blakus esošo skaitļu pāru skaits arī ir $k$, tad $k$ jādalās ar 3, tātad $k$ jādalās ar 12.



Piemērs parāda, ka 12 skaitļus var izvietot atbilstoši uzdevuma nosacījumiem.

**9.4.** Ja dotā vienādība izpildās, tad $a > x$, $a > y$ un $a > z$. Naturāliem skaitļiem no šejienes seko nevienādības $a \ge x+1$, $a \ge y+1$ un $a \ge z+1$.

Tātad $7^a = 7 \cdot 7^{a-1} = 4 \cdot 7^{a-1} + 7^{a-1} + 7^{a-1} + 7^{a-1} > 7^x + 7^y + 7^z$ un nav tādu naturālu skaitļu $a, x, y, z$, ka $7^a = 7^x + 7^y + 7^z$.

**9.5.** Atbilde: N≤7.

Ja Maija kādai sportistei būs zaudējusi visos četros braucienos, tad viņa būs zaudējusi šai sportistei arī kopvērtējumā. Tātad, lai Maija kopvērtējumā būtu pirmā, nedrīkst atrasties neviena tāda sportiste, kura būtu ātrāka par Maiju visos četros braucienos. Pie N=7 tas ir iespējams, skat., piem., tabulu.

| | **1.brauciens** | | **2.brauciens** | | **3.brauciens** | | **4.brauciens** | | **Kopvērtējums** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Laiks** | **Vieta** | **Laiks** | **Vieta** | **Laiks** | **Vieta** | **Laiks** | **Vieta** | **Laiks** | **Vieta** |
| A | 40 | 1 | 40,01 | 1 | 40,02 | 1 | 41 | 8 | **161,03** | **2** |
| B | 41,01 | 8 | 40,05 | 2 | 40,06 | 2 | 40,03 | 1 | **161,15** | **3** |
| C | 40,04 | 2 | 41,02 | 8 | 40,1 | 3 | 40,07 | 2 | **161,23** | **4** |
| D | 40,08 | 3 | 40,09 | 3 | 41,03 | 8 | 40,11 | 3 | **161,31** | **5** |
| E | 40,12 | 4 | 40,13 | 4 | 40,14 | 4 | 41,04 | 9 | **161,43** | **6** |
| F | 41,05 | 9 | 40,17 | 5 | 40,18 | 5 | 40,15 | 4 | **161,55** | **7** |
| G | 40,16 | 5 | 41,06 | 9 | 40,22 | 6 | 40,19 | 5 | **161,63** | **8** |
| H | 40,2 | 6 | 40,21 | 6 | 41,07 | 9 | 40,23 | 6 | **161,71** | **9** |
| M | 40,24 | 7 | 40,25 | 7 | 40,26 | 7 | 40,27 | 7 | **161,02** | **1** |

Pierādīsim, ka N nevar būt lielāks par 7. Ja N būtu 8, tad katrā braucienā tikai viena sportiste būtu zaudējusi Maijai un kopumā būtu tikai četras sportistes no astoņām, kas kopvērtējumā varētu būt zaudējušas Maijai, tātad Maija kopvērtējumā nevarētu būt ieguvusi augstākais 5. vietu.

---

**10.1. a)** $(s+t)^2 = p^2 \Rightarrow s^2 + 2st + t^2 = p^2 \Rightarrow s^2 + 2st - t^2 = p^2 - 2t^2 \Rightarrow$

$2s^2 - (s-t)^2 = p^2 - 2t^2$. Tā kā $(s-t)^2 \ge 0$, tad $2s^2 \ge p^2 - 2t^2$, k.b.j.

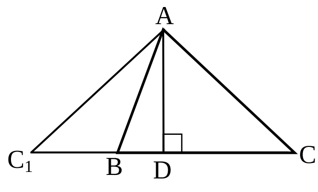
**b)** $(s+t+u)^2 = p^2 \Rightarrow s^2 + t^2 + u^2 + 2st + 2su + 2tu = p^2 \Rightarrow$

$s^2 - 2t^2 - 2u^2 + 2st + 2su + 2tu = p^2 - 3t^2 - 3u^2 \Rightarrow$

$3s^2 - (s-t)^2 - (s-u)^2 - (t-u)^2 = p^2 - 3t^2 - 3u^2$.

Tā kā $(s-t)^2 \ge 0$, $(s-u)^2 \ge 0$ un $(t-u)^2 \ge 0$, tad $3s^2 \ge p^2 - 3t^2 - 3u^2$, k.b.j.

**10.2.** Ja AD atrodas trijstūra ABC iekšpusē, atliekam punktu $C_1$ simetriski punktam C attiecībā pret taisni AD. Tad $DC_1$=DC un $AC_1$=AC. No trijstūra nevienādības trijstūrī $ABC_1$ seko $DC - DB = DC_1 - DB = C_1B > AC_1 - AB = AC - AB$.




Ja ΔABC ir platleņķa trijstūris un AD atrodas ārpus trijstūra ABC, pierādāmais apgalvojums tieši seko no trijstūra nevienādības trijstūrī ABC.

**10.3.** Atbilde: vienīgais šāds skaitlis ir $3\frac{8}{11}$.

Ja $x \ge 4$, tad vienādojuma kreisā puse nav mazāka par 64 un prasītā vienādība neizpildās.

Ja $x < 3$, tad vienādojuma kreisā puse nepārsniedz 27 un prasītā vienādība neizpildās.

Tātad $3 \le x < 4$ un iegūstam vienādojumu $x \cdot [3x] = 41$. Tā kā $9 \le 3x < 12$, tad šķirojam variantus:

a) $[3x] = 9$; $9x = 41$, $x = 4\frac{5}{9}$ – neder, jo $[x] \ne 3$;

b) $[3x] = 10$; $10x = 41$, $x = 4.1$ – neder, jo $[x] \ne 3$;

c) $[3x] = 11$; $11x = 41$, $x = 3\frac{8}{11}$ – der (nepieciešama pārbaude).

**10.4.** ∠BAC=∠BCA=(180°-30°):2=75°, ∠FCE=∠CEF=∠EFC=60°. Tad ∠BFE=180°-60°=120° (blakusleņķi) un ∠BEF=180°-30°-120°=30°, tātad ΔEBF – vienādsānu un BF=EF=FC.

Apzīmēsim AB=BC=2*a*, tad FC=BF=*a*. Tad $S_{CEF} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ un $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \sin 30° = a^2$. Tātad $\frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

**10.5.** <u>Atbilde:</u> augstākā – 1. vieta, zemākā – 16. vieta.

Jāņa komanda noteikti ir zaudējusi tām komandām, kurām tā ir zaudējusi katrā atsevišķā braucienā. Ja ir zaudēts ne visos braucienos, tad kopvērtējumā var būt uzvarējusi gan viena, gan otra komanda. Pirmo vietu Jāņa komanda var iegūt tad, ja neatrodas tāda komanda, kura būtu bijusi labāka par Jāņa komandu visos braucienos. Tas ir iespējams, ja komandas atsevišķos braucienos finišējušas, piemēram šādi (Jāņa komanda apzīmēta ar J):

| Brauciens\Vieta | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | 12. | 13. | 14. | 15. | 16. | 17. | 18. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | A | J | R | P | O | N | M | L | K | S | I | H | G | F | E | D | C | B |
| 2. | A | B | J | R | P | O | N | M | L | K | S | I | H | G | F | E | D | C |
| 3. | A | B | C | J | R | P | O | N | M | L | K | S | I | H | G | F | E | D |
| 4. | B | C | D | E | F | G | H | I | S | J | K | L | M | N | O | P | R | A |

Šeit jāņem vērā, ka vietu secība dažādos braucienos nenozīmē vienādu laika starpību. Piemēram, pirmajā braucienā pirmo divu vietu rezultātu starpība neko neļauj spriest par pirmo divu vietu rezultātu starpību citos braucienos.

Zemākā iespējamā Jāņa komandas vieta būs tad, ja augstāk par Jāņa komandu atradīsies visas komandas, kas ir uzvarējušas Jāņa komandu vismaz vienā braucienā. Tādas komandas pavisam ir 15 (viena pirmajā braucienā, divas – otrajā, trīs – trešajā un deviņas – ceturtajā). Tātad zemākā Jāņa komandas ieņemtā vieta kopvērtējumā var būt 16. (Jāparāda piemērs, kad tas var realizēties.)

---

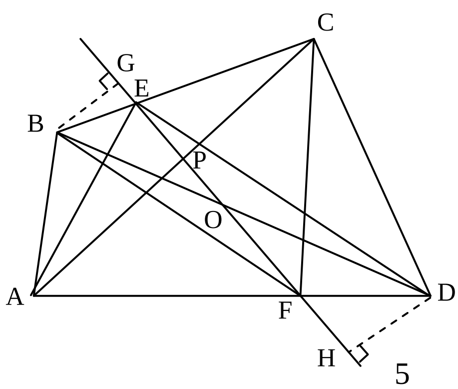
**11.1.** Pareizinot doto izteiksmi ar divi, iegūst

$$2x^2 + 2y^2 + 8 \ge 4x + 4y + 2xy$$

To savukārt var pārveidot par triju kvadrātu summu:

$$(x-y)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 \ge 0.$$

**11.2.** Punkti P un O ir attiecīgi AC un BD viduspunkti (AP=PC un BO=OD). No B un D novelk perpendikulus pret EF: BG⊥EF un DH⊥EF. Aplūko taisnleņķa trijstūrus BGO un DHO. Šiem trijstūriem ir vienādas hipotenūzas OB=OD un šaurie leņķi ∠BOG=∠DOH (kā krustleņķi. Tātad



$\Delta BGO = \Delta DHO$, tāpēc arī $BG=DH$. No tā seko, ka trijstūru EFD un BEF laukumi ir vienādi, jo tiem ir kopīga mala EF un pret šo malu vilktie augstumi ir vienādi. Līdzīgi, novelkot augstumus no A un C pret EF, var pierādīt, ka arī trijstūru AEF un CEF laukumi ir vienādi. Tad $S_{ADE}=S_{AEF}+S_{DEF}=S_{CEF}+S_{BEF}=S_{BCF}$, k.b.j.

**11.3.** Visiem vienādojumiem abām pusēm pieskaitot 1, iegūstam

$$\begin{cases}(x+1)(y+1)=18\\(y+1)(z+1)=72\\(z+1)(x+1)=12\end{cases}$$

Sareizinot šos trīs vienādojumus, iegūstam

$$\left((x+1)(y+1)(z+1)\right)^2=72^2\cdot 3 \text{ jeb}$$

$$(x+1)(y+1)(z+1)=72\sqrt{3} \text{ vai } (x+1)(y+1)(z+1)=-72\sqrt{3}.$$

Iegūtās sakarību izdalot ar sistēmas katru vienādojumu, iegūstam

$$\begin{cases}z+1=4\sqrt{3}\\x+1=\sqrt{3}\\y+1=6\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{3}-1\\y=6\sqrt{3}-1\\z=4\sqrt{3}-1\end{cases}$$

vai

$$\begin{cases}z+1=-4\sqrt{3}\\x+1=-\sqrt{3}\\y+1=-6\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\sqrt{3}-1\\y=-6\sqrt{3}-1\\z=-4\sqrt{3}-1\end{cases}$$

**11.4.** Meklējamo $a+b$ mazāko iespējamo vērtību apzīmēsim ar $S$. Ievērosim, ka $21=5^2-5+1$, tāpēc $5^3+1=(5+1)(5^2-5+1)$ dalās ar 21 un tāpēc $S\le 5+3=8$. Tālāk izmantosim faktu: jebkuram naturālam $n$ skaitlis $n^2+1$ nedalās ar 3. Tiešām, ja $n$ dalās ar 3, tad $n^2+1$ nedalās ar 3, un ja $n$ nedalās ar 3, tad $n^2-1=(n+1)(n-1)$ dalās ar 3 un $n^2+1$ nedalās ar 3. Tāpēc ja $b$ būtu pāra skaitlis, tad $a^b$ būtu pilns kvadrāts un $a^b+1$ nedalītos ar 3 un tāpēc arī ar $3\cdot 7=21$. Tāpēc $b$ ir nepāra skaitlis, līdz ar to pietiek pārbaudīt šādas $b$ vērtības: 1, 3, 5, 7. Ja $b=1$, tad $a\ge 20$ un $a+b>S$. Ja $b=7$, tad $a>1$ un $a+b>8$. Tāpēc ja summa $a+b$ ir minimāla, tad $b$ ir 3 vai 5. Tālāka pārbaude rāda, ka ja $a^3+1$ dalās ar 21, tad $a\ge 5$ un ja $a^5+1$ dalās ar 21, tad $a\ge 4$. Tāpēc $S\ge 8$, no kurienes seko, ka $S=8$.

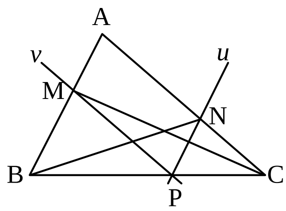
**11.5.** Tā kā katrs no skaitļiem ir divu citu skaitļu starpības modulis, tad visi uzrakstītie skaitļi ir nenegatīvi. Aplūkosim lielāko no tiem, apzīmēsim to ar L Savukārt ar A un B apzīmēsim skaitlim L pulksteņrādītāja virzienā sekojošos skaitļus secībā ...L, A, B...., pie tam $0\le A\le L$ un $0\le B\le L$. Lai būtu spēkā vienādība $L=|A-B|$, vai nu $A=L$ un $B=0$, vai arī $A=0$ un $B=L$.
Turpinot spriedumus, iegūstam, ka visi aplī uzrakstītie skaitļi ir vai nu L, vai 0, pie tam tie sadalās $k$ grupiņās pa trim (L,L,0).
Tātad visu skaitļu summa ir $10=2L\cdot k$, bet uzrakstīto skaitļu skaits $n=3k$. $Lk=5$, tātad $k=1$ vai $k=5$ un $n=3$ (L=5) vai $n=15$ (L=1).

---

**12.1.** Tā kā $0\le a^2\le 1$ un $0\le b^2\le 1$, tad $0\le\sqrt{1-a^2}\le 1$ un $0\le\sqrt{1-b^2}\le 1$. Tātad $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}-\sqrt{1-a^2}\le\frac{1}{2}$ un $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}-\sqrt{1-b^2}\le\frac{1}{2}$ jeb $\left|\frac{1}{2}-\sqrt{1-a^2}\right|\le\frac{1}{2}$ un

$\left|\frac{1}{2}-\sqrt{1-b^2}\right| \le \frac{1}{2}$, tātad $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{1-a^2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$ un $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{1-b^2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$. Uzdevumā dotā vienādība izpildās tikai gadījumā, ja $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{1-a^2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ un $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{1-b^2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ jeb $\sqrt{1-a^2}=0$ vai $\sqrt{1-a^2}=1$ un $\sqrt{1-b^2}=0$ vai $\sqrt{1-b^2}=1$, tātad $a^2=0$ vai $a^2=1$un $b^2=0$ vai $b^2=1$. Tāpēc iegūstam 9 atrisinājumus $(1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$, $(1;0)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(0;-1)$, $(0;0)$.

**12.2.** Ievērojam, ka S(ABC)=S(MBP)+S(NPC)+S(AMPN), S(MBC)=S(MBP)+S(MPC), S(NBC)=S(NPC)+S(NBP). Lai pierādītu prasīto atliek pierādīt, ka S(MPC)+S(NBP)=S(AMPN).




Bet $\mathrm{S(MPC)} = \frac{1}{2}\mathrm{MP}\cdot h_1 = \frac{1}{2}\mathrm{S(AMPN)}$, jo augstums no C pret MP ir vienāds ar augstumu no A pret MP, jo AC||MP. Tāpat $\mathrm{S(NBP)} = \frac{1}{2}\mathrm{NP}\cdot h_2 = \frac{1}{2}\mathrm{S(AMPN)}$, jo augstums no B pret NP ir vienāds ar augstumu no A pret NP, jo AB||NP.

**12.3.** Viegli pārbaudīt, ka skaitļi 3, 5, 7 un 9 nav fantastiski: $3 \ne 9$, $5 \ne 10$, $7 \ne 36$ un $9 \ne 8$.
Vairākciparu skaitļiem $n$ interesēsimies par pēdējo un priekšpēdējo ciparu $n^2$ decimālajā pierakstā.

Ja $n=10k+1$, tad $n^2=100k^2+10\cdot 2k+1$ un $n^2$ pēdējais cipars ir 1, bet priekšpēdējais – pāra cipars.

Ja $n=10k+3$, tad $n^2=100k^2+10\cdot 6k+9$ un $n^2$ pēdējais cipars ir 9, bet priekšpēdējais – pāra cipars.

Ja $n=10k+5$, tad $n^2=100k^2+100k+25$ un $n^2$ pēdējais cipars ir 5, bet priekšpēdējais – 2 (pāra cipars).

Ja $n=10k+7$, tad $n^2=100k^2+140k+49=100(k^2+k)+10(4k+4)+9$ un $n^2$ pēdējais cipars ir 9, bet priekšpēdējais – pāra cipars.

Ja $n=10k+9$, tad $n^2=100k^2+180k+81=100(k^2+k)+10(8k+8)+1$ un $n^2$ pēdējais cipars ir 1, bet priekšpēdējais – pāra cipars.

Līdz ar to, ja $n$ ir nepāra skaitlis, tad $n^2$ satur vismaz vienu pāra ciparu un visu ciparu reizinājums ir pāra skaitlis, tātad nav vienāds ar $n$.

**12.4.** Pierādīsim, ka N nevar būt lielāks par 1.
Ja N>1, tad visām rūtiņām ir vairāk nekā viena kaimiņu rūtiņa. Aplūkosim vienu rūtiņu, kurā ierakstīts vismazākais skaitlis (šādas rūtiņas var būt arī vairākas). Tajā ierakstītais skaitlis ir mazāks vai vienāds ar **visās** (vairāk nekā vienā) kaimiņu rūtiņās ierakstītajiem skaitļiem – pretruna.
Ja N=1, tabulas aizpildījums var būt šāds:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... | 2008 | 2009 | 2010 | 2010 |

**12.5.** Katra šķautne ir mala tieši divām skaldnēm, tātad divkāršots daudzskaldņa šķautņu skaits ir vienāds ar visu skaldņu malu skaitu summu, tāpēc šī summa ir pāra skaitlis. Bet nepāra skaita nepāru skaitļu ir nepāra skaitlis, tad iegūstam pretrunu.

## Īsi norādījumi vērtēšanai.

**5.3**. Par atbildi ar pārbaudi, bez pamatojuma, ka tas ir vienīgais variants – 5 punkti.

**5.4**. Par katru daļu 5 punkti.

**5.5.** Par katru daļu (piemērs un minimalitātes pamatojums) 5 punkti.

**6.3.** Par katru daļu 5 punkti.

**7.2.** Ja nav pamatojuma, kāpēc visi piecinieki ir vienas iekavas dalītāji, jānoņem 4 punkti.

**7.3.** Par atbildi bez pamatojuma, kāpēc tā ir vienīgā iespējamā – līdz 5 punktiem.

**7.4.** Par katru daļu 5 punkti.

**8.4.** Par piemēru bez pamatojuma, kāpēc nevar būt vairāk taisnstūri – 5 punkti.

**9.3.** Par piemēru bez minimālitātes pierādījuma – 5 punkti.

**9.5.** Par piemēru bez pierādījuma, ka N nevar būt lielāks – 6 punkti.

**10.1.** Par katru daļu – 5 punkti.

**10.5**. Parādīts piemērs, ka var būt 1.vieta – 5 punkti;
Parādīts piemērs, ka var būt 16. vieta – 2 punkti;
Pamatots, ka nevar būt zemākā kā 16. vieta – 3 punkti.

**11.3.** Atrasts tikai pozitīvais atrisinājums – 7 punkti.

**11.4.** Par piemēru bez pierādījuma – 3 punkti.

**12.1.** Par pārveidojumiem bez rezultāta ne vairāk par 2 punktiem.

**12.2.** Par speciālgadījumu apskatīšanu – līdz 3 punktiem.

***Vispārēji ieteikumi olimpiāžu darbu vērtēšanai, ja nav doti citi norādījumi***

**–** (svītriņa) – uzdevums nav risināts; tīrrakstā nav minēts pat uzdevuma numurs.
**0** punkti – tīrrakstā minēts uzdevuma numurs, bet risinājumā nav nevienas vērtīgas idejas, kas varētu vest pie pareiza atrisinājuma.
**1-2** punkti – dažas derīgas idejas, bet bez tālākas izmantošanas vai pamatojuma.
**3-4** punkti – veiksmīgi iesākts risinājums, bet nav saskatīts virziens, kā turpināt iesākto un novest līdz galam.
**5** punkti – puse risinājuma.
**6** punkti – pareizi iesākts un turpināts risinājums, kas tomēr nav paspēts vai prasts novest līdz pašam galam.
**7** punkti – principā pareizs risinājums, bet ir kāda lielāka iebilde, nepilnība, trūkums.
**8-9** punkti – uzdevums atrisināts, bet risinājumam nelieli defekti – trūkst kāda paskaidrojuma, izlaistas mazāk būtiskas, bet tomēr nepieciešamas detaļas utml.
**10** punkti – absolūti pareizs un skaidri saprotami pierakstīts risinājums bez iebildēm, piebildēm un citiem trūkumiem.

*Labu veiksmi Jums un Jūsu skolēniem!*