

Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 26. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

26.21. Dalībnieku skaitu simultantspēlē apzīmēsim ar n .

Tad pirmajās 2 stundās meistars spēlēja ar $0,6 \cdot n + 2$ dalībniekiem. Atlika $0,4 - 2$ dalībnieki. Nākošajās 2 stundās viņš spēlēja ar $0,4 \cdot n - 2$ dalībniekiem. Iegūstam vienādojumu

$$0,6 \cdot n + 2 + 0,4(0,4 \cdot n - 2) + 6 = n \Leftrightarrow$$

$$0,24 \cdot n = 7,2 \Leftrightarrow n = 30.$$

Tātad simultantspēlē piedalījās 30 dalībnieki.

26.22. Apzīmēsim meklējamo skaitli ar \overline{ab} . Tad

$$\overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11(a + b) = n^2.$$

Tas nozīmē, ka n dalās ar 11; tāpēc $11(a + b)$ dalās ar 121. Tas nozīmē, ka $a + b$ dalās ar 11. Tā kā a un b ir cipari, tad $a + b = 11$. Visi šādi skaitļi der, jo rezultātā iegūstam skaitli $121 = 11^2$.

Atbilde: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

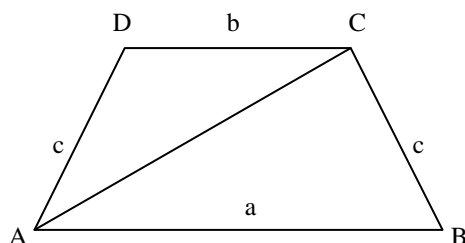
26.23. Izmantojot ekvivalentus pārveidojumus pierādām, ka no vienādības

$$a^2 + c^2 = 2b^2$$

seko vienādība

$$\frac{1}{c+b} + \frac{1}{a+b} = 2 \frac{1}{c+a}.$$

26.24. Skat. 26.1. zīmējumu.



26.1.

Ja $\angle BAC = \beta$, tad no sinusu teorēmas trijstūrim ABC seko, ka

$$\frac{a}{\sin \angle ACB} = \frac{c}{\sin \angle CAB} \Rightarrow$$

$$\frac{a}{\sin(180^\circ - \alpha - (\alpha + \beta))} = \frac{c}{\sin \alpha} \Rightarrow$$

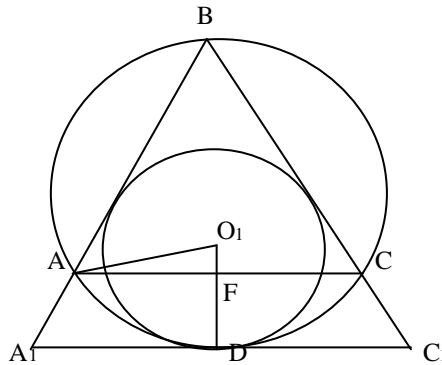
$$c = \frac{a \sin \alpha}{\sin(2\alpha + \beta)}.$$

Pielietojot sinusu teorēmu trijstūrim ADC , atrodam, ka $b = \frac{a \sin \beta}{\sin(2\alpha + \beta)}$.

Otrajā gadījumā, ja $\angle ACB = \beta$ analogiski iegūstam

$$c = \frac{a \sin \alpha}{\sin \beta}, \quad b = \frac{a \sin(2\alpha + \beta)}{\sin \beta}.$$

26.25. Caur abu riņķu līniju pieskaršanās punktu D velkam pieskari, kas atšķēļ no leņķa $\angle ABC$ regulāru trijstūri A_1BC_1 (skat. 26.2. zīm.).



26.2. zīm.

Regulārā trijstūra A_1BC_1 augstums BD ir vienāds ar $2R$; O_1 ir šā trijstūra centrs, tāpēc $O_1D = \frac{2R}{3}$. $DF = \frac{R}{2}$ (pamatojiet šo vienādību!).

Taisnleņķa trijstūrī AFD leņķis $\angle DAF = 30^\circ$; tāpat $AF = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

$$O_1F = O_1D - DF = \frac{R}{6}, \quad AO_1 = \sqrt{AF^2 + O_1F^2} = \frac{R\sqrt{7}}{3}.$$

Punkts O_1 atrodas trijstūra ABC iekšpusē, jo $O_1D > FD$.

26.26. Doto nevienādību pārveidojam formā

$$\frac{|x^2 - 3x - 4|}{|x - 4|} > 3 \Leftrightarrow |x^2 - 3x - 4| > 3|x - 4|, x \neq 4.$$

Risinām to ar intervālu metodi.

$$1) \begin{cases} x \leq -1 \\ x^2 - 3x - 4 > -3x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x^2 > 16. \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; -4).$$

$$2) \begin{cases} -1 < x < 4 \\ -x^2 + 3x + 4 > -3x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 4 \\ x^2 - 6x + 8 < 0. \end{cases}$$

$$x \in (2; 4).$$

$$3) \begin{cases} x > 4 \\ x^2 - 3x - 4 > -3x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x^2 - 16 > 0. \end{cases}$$

$$x \in (4; \infty).$$

$$\text{Atbilde: } x \in (-\infty; -4) \cup (2; 4) \cup (4; \infty).$$

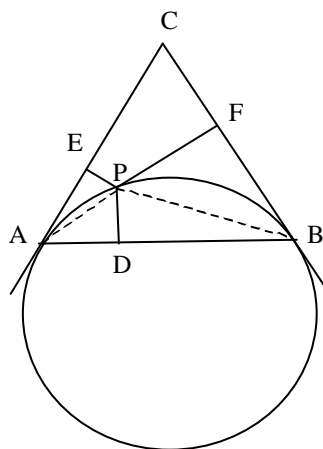
26.27. Uzrakstīsim doto skaitļu virkni pēc moduļa 2:

1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, ...

Tā ir periodiska, ar perioda garumu 5.

Skaitļu virknē pēc kārtā nevar būt uzrakstīti cipari 1, 8, 7, 6, jo pēc moduļa 2 tie veido fragmentu 1, 0, 1, 0, kāds dotajā virknē nav sastopams.

26.28. Skat 26.3. zīm.



26.3. zīm.

No ievilkto leņķu un leņķa starp hordu un pieskari īpašībām seko vienādība

$$\angle EAP = \frac{1}{2} \overset{\cup}{\angle AP} = \angle PBD.$$

No šejienes seko taisnleņķa trijstūru PEA un PDB līdzība. Tātad

$$\frac{PE}{PD} = \frac{PA}{PB}.$$

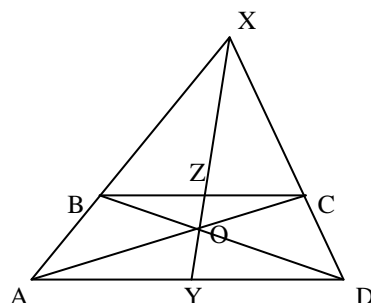
Analoģiski pierāda vienādību

$$\frac{PF}{PD} = \frac{PB}{PA}.$$

Sareizinot šīs vienādības iegūstam

$$\frac{PE \cdot PF}{PD^2} = 1 \Rightarrow PD^2 = PE \cdot PF.$$

26.29. Skat. 26.4. zīm.



26.4. zīm.

Konstrukcijas gaita ir sekojoša.

Atrodam taisņu AB un DC krustpunktu X .

Atrodam nogriežņu AC un BD krustpunktu O .

Taisne OX daļa trapeces $ABCD$ laukumu uz pusēm.

Pierādījums. No trijstūru līdzībām

$$\Delta AOY \approx \Delta ZOC, \quad \Delta BOC \approx \Delta DOA, \quad \Delta ZOB \approx \Delta YOD$$

seko, ka
$$\frac{AY}{ZC} = \frac{AO}{OC} = \frac{DO}{BO} = \frac{YD}{BZ}.$$

No trijstūru līdzībām

$$\Delta XAY \approx \Delta XBZ, \quad \Delta XYD \approx \Delta XZC$$

seko, ka
$$\frac{AY}{BZ} = \frac{XY}{XZ} = \frac{YD}{ZC}.$$

Sareizinot iegūtās vienādības, iegūstam $AY^2 = YD^2 \Rightarrow AY = YD.$

Līdzīgi pierāda, ka $BZ = ZC.$

Tātad trapecēm $ABZY$ un $YZCD$ ir vienādi augstumi un vienādas pamatu malas; līdz ar to trapeču laukumi ir vienādi.

26.30. Dotā taisnstūra diagonāle $\sqrt{410}$ nav samērojama ar taisnstūra malām, bet kaķa un peles ātrumi ir samērojami. Tādēļ pele var paglābties no kaķa, ja tā skries tikai pa diagonālēm.

26.31. Sasummējot dotos vienādojumus, iegūstam

$$\left(\sqrt{x+y^2}\right)^3 = 125 \Rightarrow x+y^2 = 25 \text{ un } y\sqrt{x} = -12.$$

No šejienes iegūstam atrisinājumus: $\{(16, -3), (9, -4)\}.$

26.32. Vienādojumu var pārveidot formā

$$\sin 2x = \pm 2\sqrt{\frac{a-1}{2a-3}}.$$

Atrisinājums eksistē, ja $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$.

$$x = \pm \arcsin 2\sqrt{\frac{a-1}{2a-3}} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

26.33. Uzrakstīsim virkni 8^n pēc moduļa 10. Iegūstam

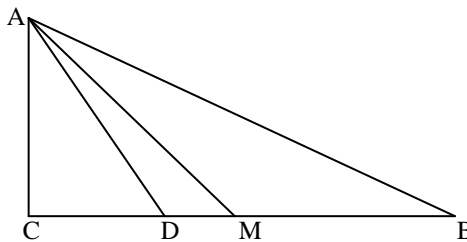
$$8, 4, 2, 6, 8, 4, 2, 6, \dots$$

Tā ir periodiska ar perioda garumu 4. Tā kā $\overbrace{33 \dots 371}^{1976} = 4k + 3$, tad

$$\underbrace{888 \dots 88}_{1976}^{\overbrace{333 \dots 33371}^{1976}} \equiv 8^3 \equiv 2 \pmod{10}.$$

Tātad dotā skaitļa pēdējais cipars ir 2.

26.34. Aplūkosim 26.5. zīmējumu (AM -- mediāna, AD -- bisektrise).



26.5. zīm.

Meklējamo leņķi $\angle DAM$ apzīmēsim ar x . Tad

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) = \frac{CM}{CA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CB}{CA} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha}{2} + x = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \Rightarrow x = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

26.35. Aplūkosim 2 no dotajām taisnēm a un b , to krustpunktu O un plakni π , kurai tās pieder. Pastāv divas iespējas:

a) Visas pārējās taisnes pieder plaknei π .

b) Kāda no taisnēm c nepieder plaknei π ; tā kā tā krustojas ar abām taisnēm a un b , tad tā iet caur punktu O . Jebkura no atlikušajām taisnēm arī ies caur punktu O , jo pretējā gadījumā tā nevarēs krustot taisnes a , b un c .

26.36. Kāpināsim abus vienādojumus kvadrātā un saskaitīsim:

$$\frac{x^2(y^4 + 2y^2 + 1) + y^2(x^4 - 2x^2 + 1)}{(x^2 + y^2)^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 + y^2 + x^2 y^2 (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$1 + x^2 y^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0.$$

Tā kā $x^2 - 1 \neq 0$ (tas seko no otrā vienādojuma), tad $y = \pm 1$.

Atbilde: $(x, y) \in \{(3, 1), (\frac{1}{3}, -1)\}$.

26.37. Pārveidojot doto vienādojumu, iegūstam

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} + 2\cos^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\cos^3 2x + 2\cos^2 2x - 2\cos 2x = 0 \\ \cos 2x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\cos 2x = 0 \text{ vai } \cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0.$$

$$\text{Atbilde: } x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi n; \quad n \in Z \right\}.$$

26.38. Dotā nevienādība ekvivalenta nevienādībai

$$\log_x(x+2) \leq 2.$$

Jāanalizē 2 gadījumi: $x > 1$ un $0 < x < 1$.

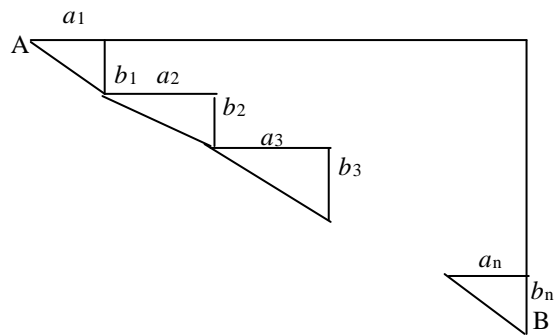
Atbilde: $x \geq 2$.

26.39. Šķautnes CC_1 krustpunktu ar novilkto plakni apzīmējam ar C_2 . Viegli pierādīt, ka $CC_2 = \frac{3}{4}a$. Caur punktu C_2 velkam plakni $A_2B_2C_2D_2$ paralēli kuba

skaldnei $ABCD$. Tad paralēlskaldņa $ABCD A_2B_2C_2D_2$ tilpums ir vienāds ar $\frac{3}{4}a^3$. No

simetrijas seko, ka vienas atšķeltās daļas tilpums ir puse no šā paralēlskaldņa tilpuma; tātad $\frac{3}{8}a^3$. Otrās atšķeltās daļas tilpums ir $\frac{5}{8}a^3$, un šo daļu tilpumu attiecība ir $\frac{3}{5}$.

26.40. Dotos taisnleņķa trijstūrus izvietosim tā, kā parādīts 26.6. zīmējumā.



26.6. zīm.

Doto trijstūru hipotenūzu summa ir lauza līnija, kas savieno punktus A un B ; tā būs vismazākā, ja šī līnija būs nogrieznis AB . Tātad pārējo katešu b_1, b_2, \dots, b_n garumiem jābūt proporcionāliem doto katešu garumiem. Tātad

$$b_i = \frac{b \cdot a_i}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$