Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 28. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

28.21. Uzdevuma noteikumus var pierakstīt sistēmas veidā

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = 10 \\ h_2 - h_1 \geq \frac{5}{6} \end{cases}$$

Izmantojot sakarības

$$h_2 = \frac{100}{a_2}, \quad h_1 = \frac{100}{a_1}, \quad a_2 = a_1 - 10.$$

iegūstam nevienādību

$$\frac{100}{a_1 - 10} - \frac{100}{a_1} \geq \frac{5}{6}.$$

To pārveidojam formā

$$a_1^2 - 10a_1 - 1200 \leq 0.$$

Nevienādības atrisinājums $a_1 \in [-30; 40]$.

Tā kā a_1 ir pozitīvs skaitlis, tad pirmā trijstūra augstums atrodas robežās no 0 līdz 40.

28.22. Apzīmēsim dotos skaitļus ar x, y, z. Uzdevuma nosacījumus pierakstām vienādojumu sistēmas veidā.

$$\begin{cases} xz = y^2 \\ x + z = 2(y+2) \\ x(z+9) = (y+2)^2 \end{cases}$$

Atņemot no trešā vienādojuma pirmo, iegūstam

$$9x = 4y + 4.$$

Kopā ar otro vienādojumu tie veido lineāru vienādojumu sistēmu, kuru risinot iegūstam

$$\begin{cases} x = \frac{4}{9}y + \frac{4}{9} \\ z = \frac{14}{9}y + \frac{32}{9}. \end{cases}$$

Ievietojot x un z vērtības vienādojumā $xz = y^2$, pēc pārveidojumiem iegūstam kvadrātvienādojumu

$$25y^2 - 184y - 128 = 0.$$

To atrisinot iegūstam atbildes $y_1 = 8,\ y_2 = -\dfrac{16}{25}$.

Atbilde: meklētie trīs skaitļi ir 4, 8, 16 vai $\dfrac{4}{25},\ -\dfrac{16}{25},\ \dfrac{64}{25}$.

28.23. Riņķa līniju centrus apzīmēsim ar O_1 un O_2, riņķa līniju krustpunktus ar *A* un *B*. Veidojas paralelograms AO_2BO_1. Riņķa līniju kopējā horda ir nogrieznis *AB*, kura garums ir divkāršots trijstūra O_1AO_2 augstums. Trijstūra laukumu aprēķina pēc Hērona formulas: $S = 84.$ Tātad

$$AB = 2h = \frac{S}{O_1O_2} = \frac{84}{15}.$$

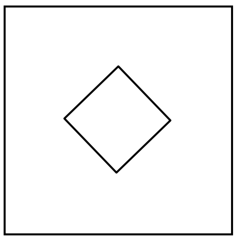
28.24. Apzīmēsim kvadrāttrinomu $ax^2 + bx + c$ ar $f(x)$. Tad

$$\begin{array}{l} a + b + c = f(1) \\ c = f(0) \end{array}.$$

Tā kā $f(1) < 0$ un kvadrātvienādojumam $f(x) = 0$ nav atrisinājuma, tad pie visām *x* vērtībām $f(x)$ vērtības ir negatīvas.

Līdz ar to $c = f(0) < 0$.

28.25. Jā, var. Ja kubu uz papīra loksnes novieto tā, kā parādīts 28.1. zīmējumā.



28.1. zīm.

Tālāk papīru aplokam ap kubu. Skaitliski aprēķini parāda, ka tiks noklāta arī kuba augšējā skaldne.

28.26. Apgalvojumu pierāda ar matemātisko indukciju. Apzīmēsim doto izteiksmi ar $f(n)$.

Bāze. Ja $n = 1$, tad $f(1) = 36$ dalās ar 9.

Induktīvā pāreja. Pieņemam, ka $f(n)$ dalās ar 9.

Tad $f(n+1)=f(n)+(n+1)^3-n^3$; mums jāpierāda, ka $(n+1)^3-n^3=3(n^2+n)+27$ dalās ar 9. Lai to pierādītu, pietiek pierādīt, ka n^2+n dalās ar 3. Pārbaude pēc moduļa 3 viegli atrisina šo uzdevumu.

28.27. Katrs īsākais ceļš sastāv no 5 vertikāliem un 5 horizontāliem posmiem (no krustojuma līdz krustojumam}. Šo ceļu var aprakstīt kā 10 burtu virkni, kura satur piecus burtus *v* un piecus burtus *h*.

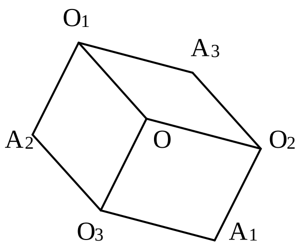
Tātad mums virknē no 10 burtiem jāizvēlas 5 vietas, kurās ierakstīti burti *v* (pārējie būs *h*). To var izdarīt $C_{10}^5=\frac{10!}{5!\cdot 5!}=252$ veidos.

Tātad kopējais īsāko ceļu skaits ir 252.

28.28. Izdalot x_n saucēju un skaitītāju ar n^2, iegūstam

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{2+0+0}{1+0+0}=2.$$

28.29. Apzīmēsim riņķa līniju kopīgo krustpunktu ar *O*, to centrus ar O_1,O_2,O_3 , bet otros krustpunktus ar A_1,A_2,A_3 (skat. 28.2. zīm.).



28.2. zīm.

Veidojas sešstūris, kas sadalās trīs rombos, ar vienāda garuma malām. No šejienes seko, ka $A_1A_3O_1O_3$ ir paralelograms (O_3A_1 vienāds un paralēls O_1A_3).

No šejienes seko, ka O_1A_1 un O_2A_2 krustojoties dalās uz pusēm. To pašu var teikt arī par abiem pārējiem aplūkojamo nogriežņu pāriem.

Tātad visi aplūkojamie nogriežņi krustojas punktā, kas ir visu šo nogriežņu viduspunkts.

28.30. Punktu *D* konstruē izmantojot faktu, ka punkts *D* ir punkta *C* paralēlā projekcija plaknē, kuras virzienu nosaka taisne *AB*.

28.31. Tāds, piemēram, ir skaitlis $13^2+13^3=2366$.

28.32. Atbilde: $\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$.

28.33. Ja taisne pieskaras parabolai, tad tām ir tieši viens kopīgs punkts; tas nozīmē, ka vienādojumam

$$4 - x = ax - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - (a+1)x + 4 = 0$$

jābūt tieši vienai saknei. Tātad

$$D = a^2 + 2a - 15 = 0 .$$

Atbilde: $a \in \{-5; 3\}$.

28.34. Aplūkosim 4 vektorus

$$v_1 = (a,b),\ v_2 = (c,d),\ v_3 = (e,f),\ v_4 = (g,h) .$$

Aplūkojamie 6 skaitļi ir visu iespējamo 4 vektoru pāru skalārie reizinājumi.

Vismaz viens no leņķiem starp 4 vektoriem nepārsniedz $90°$. Šo vektoru skalārais reizinājums ir nenegatīvs; tātad atbilstošais skaitlis arī nav negatīvs.

28.35. Punktus *B* un *C* atrod uz taisnēm, kas iet atbilstoši caur punktiem *A* un *D* paralēli taisnei *c*.

28.36. Nevienādībai nav atrisinājumu.

28.37. Izmantosim šādu faktu: ja *M* ir trijstūra *ABC* malas *BC* viduspunkts, tad

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2MB^2 .$$

Pierādījums seko no kosinusu teorēmas.

Apzīmēsim mazās riņķa līnijas rādiusu ar *r*, lielās – ar *R*, riņķu kopīgo centru ar *O*, kvadrāta virsotnes ar *A*, *B*, *C*, *D*. Tad

$$MA^2 + MC^2 + MB^2 + MD^2 =$$
$$\left(2MO^2 + 2AO^2\right) + \left(2MO^2 + 2BO^2\right) =$$
$$\left(2R^2 + 2r^2\right) + \left(2R^2 + 2r^2\right) = 4R^2 + 4r^2 .$$

Redzam, ka šis lielums nav atkarīgs no punkta *M* izvietojuma uz lielās riņķa līnijas.

28.38. a) Četrstūra piramīdai ir 8 šķautnes; piecstūra piramīdai ir 10 šķautnes; savienojot ar pamatiem divas trijstūra piramīdas, iegūstam daudzskaldni ar 9 šķautnēm.

Parādīsim, kā daudzskaldnim, kam ir vismaz viena skaldne ir trijstūris, šķautņu skaitu palielināt par 3. Lai to izdarītu, pievienosim daudzskaldnim trijstūra piramīdu, kuras pamats sakrīt ar dotā daudzskaldņa skaldni – trijstūri.

Skaidrs, ka tādā veidā no sākotnējiem daudzskaldņiem ar 8, 9, 10 šķautnēm pakāpeniski varam iegūt daudzskaldni ar patvaļīgu šķautņu skaitu $n > 7$.

b) Daudzskaldnis ar 7 šķautnēm neeksistē. Ja daudzskaldnim ir 4 virsotnes, tā ir trijstūra piramīda, kurai ir 6 šķautnes. Ja tam ir vismaz 5 virsotnes, tad, ņemot vērā, ka no katras virsotnes iziet vismaz 3 šķautnes, tā kopējais šķautņu skaits ir ne mazāks par $\frac{5 \cdot 3}{2} > 7$.

28.39. Uzrakstīsim nevienādību starp vidējo aritmētisko skaitļiem 1, 2, 3, ... , *n*.

$$\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n} \leq \frac{1 + 2 + \cdots n}{n} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n \cdot (n+1)}{2n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{n!} \leq \frac{(n+1)}{2} \Leftrightarrow$$
$$2^n n! \leq (n+1)^n \Leftrightarrow 2^n (n+1)! \leq (n+1)^{n+1}.$$

Tagad atliek ievietot *n* vietā $(n-1)$, un prasītā nevienādība iegūta.

28.40. Mazākais jautājumu skaits ir 15. To var izdarīt, piemēram, sarīkojot "olimpisko turnīru": vispirms sadalīt skaitļus 8 pāros un ar 8 jautājumiem noskaidrot 8 lielākos; pēc tam sadalīt tos 4 pāros un noskaidrot 4 lielākos, utt, līdz paliks pēdējais skaitlis, kurš noteikti būs lielākais, jo visi pārējie kādā no salīdzināšanām ir bijuši mazāki par kādu citu skaitli.

Ar mazāku skaitu salīdzināšanu nepietiek, jo, kamēr skaitlis kādā no salīdzināšanām nav izrādījies mazāks par otru , nevar apgalvot, ka tas nav lielākais no visiem skaitļiem. Katrā salīdzināšanā no pretendentiem uz lielākā skaitļa lomu izkrīt 1 skaitlis; tātad lai izkristu 15 skaitļi vajag vismaz 15 salīdzināšanas.