Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 29. OLIMPIĀDE

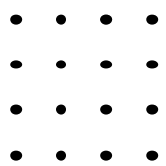
4. klase

29.1. Cik ciparu tiek uzrakstīts, ja pēc kārtas uzraksta visus veselos pozitīvos skaitļus no 1 līdz 1979 ?

29.2. Klasē ir mazāk nekā 50 skolēnu. Kādā kontroldarbā puse skolēnu saņēma atzīmi "5", trešdaļa – atzīmi "4", septītdaļa – atzīmi "3", pārējie – atzīmi "2". Cik skolēnu saņema atzīmi "2" ?

29.3. Pierādīt, ka trijstūra un četrstūra apvienojums var būt trijstūris, četrstūris, ... , desmitstūris.

29.4. Sešpadsmit punkti izvietoti kvadrātiskā režģī, kā parādīts 29.1. zīmējumā.. Uzrādiet 16 nogriežņus, kuru galapunkti ir 2 no dotajiem punktiem un starp kuriem nav paralēlu nogriežņu.
Vai var uzrādīt 17 šādus nogriežņus ?



29.2.zīm.

29.5. No stieples gabaliem jāizveido kuba karkass. Stieples gabalu gali drīkst atrasties tikai kuba virsotnēs; stieple nedrīkst divas vai vairakas reizes iet pa vienu un to pašu šķautnes posmu. Kāds ir mazākais stieples gabalu skaits, lai varētu izveidot karkasu?

5. klase.

29.6. Atrast skaitli, kuram ir tieši 12 pozitīvi dalītāji.

29.7. Kurš skaitlis lielāks:

$$\frac{19791979}{19791980} \text{ vai } \frac{19791980}{19791981} \text{ ?}$$

29.8. Deviņas vienādas grāmatas maksā 11 rubļus ar kapeikām, bet 13 tādas pašas grāmatas maksā 15 rubļus ar kapeikām. Cik maksa 22 šādas grāmatas ?

29.9. Kvadrāts satāv no 4×4 rūtiņām. Iekrāsot tajā 10 rūtiņas tā, lai iekrāsotajai figūrai būtu simetrijas ass.

Vai var šādi iekrāsot 11 rūtiņas?

29.10. Skolā saņemta vēstule, kurā starp citu teikts:

" Mūsu klasē ir zēni un meitenes. Ja es, Pēteris un Ilze sevi neskaitām, tad zēnu ir 6 reizes vairāk nekā meiteņu. Bet, ja es un Ilze tiekam skaitīti (bet Pēteris nē), tad zēnu ir 5 reizes vairāk nekā meiteņu."

Cik zēnu un cik meiteņu ir šajā klasē.

6. klase

29.11. Atrisināt vienādojumu

$$2 \cdot (3{,}5x - 6) = \frac{3}{4}x + \frac{7}{10}(x+1).$$

29.12. Figūra sastāv no 3 dažādām riņķa līnijām.

Cik simetrijas asu tām var būt?

29.13. Atrast koeficientu summu polinomam, ko iegūst, atverot iekavas reizinajumā

$$(5x^2 - 8x + 4) \cdot (4x^2 - 7x + 4) \cdot (3x^2 - 6x + 4).$$

29.14. Figūru *F* pagriežot ap centru *O* par $7°$ lielu leņķi vai par $9°$ lielu lenķi, tā attēlojas pati par sevi.

Pierādīt, ka tas pats notiek, pagriežot *F* ap *O* par $1°$ lielu leņķi.

29.15. Mainīgie *x* un *y* ir proporcionāli. Tabula (skat. 29.2. zīm) paredzēta to vērtību attēlošanai. Neviena no vērtībām nav 0.

x						
y						

29.2. zīm.

Kāds ir mazākais tabulas rūtiņu skaits, kuras jāaizpilda, lai pārējās rūtiņas varētu aizpildīt viennozīmīgi?

7. klase

29.16. Atrisināt nevienādību

$$\frac{3-x}{x+3} \geq 0.$$

29.17. Atrisināt vienādojumu

$$x^8 + 2x^6 + 3x^4 - 6x^2 = 0.$$

29.18. Dots, ka $0 \leq x \leq y \leq z \leq u \leq v \leq 10$. Atrast izteiksmes

$$5x - 4y + 3z - 2u + v$$

lielāko un mazāko iespējamo vērtību.

29.19. Trijstūrim *ABC* var konstruēt riņķa līniju, kas pieskaras tā visām malām to viduspunktos. Pierādīt, ka trijstūris *ABC* ir regulārs.

29.20. Trapeces *ABCD* diagonāles *AC* un *BD* krustojas punktā *O*. Trapeces pamati ir *AD* un *BC*.

a) Dots, ka $S_{AOB} = 1$. Aprēķināt S_{COD}.

b) Papildus dots, ka $S_{BOC} = 2$. Aprēķināt S_{AOD}.

8. klase

29.21. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 13 \\ x + y = 5. \end{cases}$$

29.22. Divu riņķa līniju rādiusu garumi ir 13 cm un 14 cm, un attālums starp to centriem ir 15 cm.
Aprēķināt šo riņķa līniju kopējās hordas garumu.

29.23. Skaitļu virknes pirmais loceklis ir 1, divi nākošie locekļi ir 2, trīs nākošie locekļi ir 3, ... , n nākošie locekļi ir n, ... (Tātad virknes sākuma posms ir 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ...).
Aprēķināt šīs virknes 1979-to locekli.

29.24. Dots, ka x un y ir pozitīvi skaitļi, kas apmierina nevienādību sistēmu

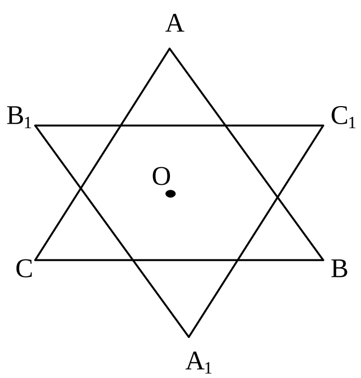
$$\begin{cases} 4x - y \geq 4 \\ y - x \leq 2\,. \end{cases}$$

Aprēķināt vislielāko iespējamo attiecības $\frac{y}{x}$ vērtību.

29.25. Plaknē dots šaurs leņķis α ar virsotni O, kā arī nogrieznis a. Konstruēt punktus A un B tā, lai tie katrs piederētu dažādām leņķa α malām, nogrieznis AB būtu vienāds ar nogriezni a, un trijstūra AOB laukums būtu vislielākais iespējamais.

9. klase

29.26. Dots regulārs trijstūris ABC ar malas garumu 1, O ir šī trijstūra centrs. $A_1B_1C_1$ ir otrs regulārs trijstūris, kas simetrisks trijstūrim ABC attiecībā pret centru O (skat. 29.1. zīm.).
Aprēķināt trijstūru ABC un $A_1B_1C_1$ kopējās daļas laukumu.



29.1. zīm.

29.27. Skaitļu virkne definēta ar formulu

$$x_n = \frac{2n^2 + n + 1}{n^2 + 3n + 1}.$$

Pierādīt, ka tās robeža ir 2,

a) lietojot teorēmas par summas, dalījuma utt. robežām;

b) lietojot robežas definīciju un nelietojot teorēmas par summas, dalījuma utt. robežām.

29.28. Pierādīt, ka

a) lg 7 ir iracionāls skaitlis,

b) eksistē tādi iracionāli skaitļi α un β, ka α^β ir racionāls skaitlis.

29.29. Vai var novietot 11 punktus tā, lai, projicējot tos visus paralēli, projekciju plaknē varētu iegūt jebkuru skaitu punktu no 3 līdz 11 atkarībā no projicējošo staru virziena?

Ja nevar, tad pierādiet, kāpēc.

Ja var, tad aprakstiet, kā var novietot punktus, un katram veselam skaitlim no 3 līdz 11 norādiet tādu projicējošo staru virzienu, ar kuru projekciju plaknē iegūto punktu skaits vienāds ar , šo veselo skaitli.

29.30. Atrast divas funkcijas $f(x)$ un $g(x)$ ar īpašībām:

a) funkcijas $f(x)$ un $g(x)$ ir definētas un nepārtrauktas visos skaitļu taisnes punktos;

b) funkcijām $f(x)$ un $g(x)$ eksistē atvasinājums visos skaitļu taisnes punktos, izņemot $x = 0$;

c) funkcijām $f(x) + g(x)$ un $f(x) \cdot g(x)$ eksistē atvasinājums visos skaitļu taisnes punktos.

10. klase

29.31. Aprēķināt $\mathrm{tg}\,15°$ ar precizitāti līdz $0{,}001$, nelietojot logaritma lineālu, tabulas, kalkulatorus utt.

29.32. Vai taisnība, ka $\sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$?

Pamatojiet savu atbildi.

29.33. Telpā dotas divas šķērsas taisnes t_1 un t_2. Punkts A pieder pie taisnes t_1; punkts B pieder pie taisnes t_2. Punkta A attālums līdz taisnei t_2 ir a; punkta B attālums līdz taisnei t_1 ir b. Pierādīt, ka attālums starp taisnēm t_1 un t_2 nepārsniedz $\frac{a+b}{2}$.

29.34. Kādam jābūt skaitlim a, lai taisne $y = 4 - x$ būtu parabolas $y = ax - x^2$ pieskare?

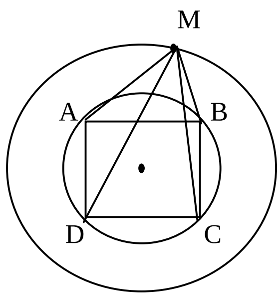
29.35. Dots, ka $f(x)$ -- funkcija, kas definēta visos skaitļu taisnes punktos. Pie tam zināms, ka, lai kādi būtu skaitļi a un b, ir spēkā nevienādība $|f(a) - f(b)| \le |a-b|^2$. Pierādīt, ka $f(0) = f(1)$.

11. klase

29.36. Atrisināt vienādojumu

$$\log_{(3x-1)}(x-2) = \log_{(9x^2-6x+1)}(2x^2-1).$$

29.37. Dotas divas koncentriskas riņķa līnijas. Iekšējā riņķa līnijā ievilkts kvadrāts. Uz ārējās riņķa līnijas ņemts punkts M un savienots ar visām kvadrāta virsotnēm (skat. 29.2. zīm.). Pierādīt, ka iegūto četru nogriežņu garumu kvadrātu summa nav atkarīga no punkta M stāvokļa uz ārējās riņķa līnijas.



29.2. zīm.

29.39. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n un tādi skaitļi $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, ka visām x vērtībām ir spēkā nevienādība

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx > 0 .$$

29.40. Kaudzītē ir $n > 1$ sērkociņu. Divi spēlētāji pēc kārtas ņem no kaudzītes jebkuru skaitu (ne nulli) sērkociņu, ievērojot vienu noteikumu: visus kaudzītē esošos sērkociņus spēlētājs drīkst ņemt tikai tad, ja to skaits nepārsniedz sērkociņu skaitu, ko iepriekšējā gājienā paņēmis pretinieks. Uzvar tas, kas paņem pēdējo sērkociņu. Kas uzvar, ja abi spēlētāji izvēlas sev visizdevīgākās stratēģijas – tas, kas izdara pirmo gājienu, vai tas, kas izdara otro gājienu? Atbildiet uz šo jautājumu

a) ja $n = 31$,

b) vispārīgā gadījumā.