Materiāls ņemts no grāmatas:Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 31. OLIMPIĀDE

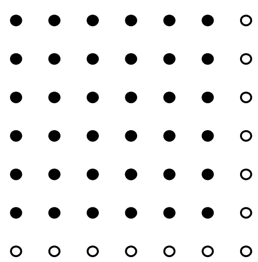
ATRISINĀJUMI

31.1. Lielākais piecciparu skaitlis, kas sastāv no dažādiem cipariem ir 98765; tas dalot ar 3 dod atlikumā 2. Nākošais lielākais piecciparu skaitlis, kas sastāv no dažādiem cipariem ir 98764; tas dalot ar 3 dod atlikumā 1. Nākošais lielākais piecciparu skaitlis, kas sastāv no dažādiem cipariem ir **98763**; tas dalās ar 3 un ir meklētais skaitlis.

31.2. Zīmes jāizvēlas šādi:

$$81 = 64 + 32 - 16 + 8 - 4 - 2 - 1.$$

31.3. Ja kāda no mēneša trešdienām ir pāra datums, tad nākošā ir nepāra datums, un otrādi. Apzīmēsim ar n mēneša pirmās trešdienas, kurai ir pāra datums, datumu. Tad nākošās “pāra” trešdienas datums ir $n+14$, bet trešās “pāra” trešdienas datums ir $n+28$. Tā kā $n+28 \le 31$, tad $n \le 3$. Ievērojot, ka i ir pāra skaitlis, iegūstam, ka $n = 2$. Tātad mēneša 2. un 16. datumi ir trešdienas, bet 18. datums ir piektdiena.



31.5. zīm.

31.4. Apzīmēsim ar A viena no iespējamo kvadrātu virsotnēm.

Aplūkosim kvadrātus 1×1. Šādu kvadrātu virsotne A var atrasties vienā no $6\times6 = 36$ atzīmētajiem punktiem (skat. 31.5. zīm.).

Tātad pavisam ir 36 kvadrāti 1×1. Līdzīgi pamato, ka ir $5\times5 = 25$ kvadrāti 2×2, 16 kvadrāti 3×3, 9 kvadrāti 4×4, 4 kvadrāti 5×5 un 1 kvadrāts 6×6.

31.5 Sākumā sadalām kubu $4\times4\times4 = 64$ vienādos kubos. Tad vienu no mazajiem kubiem vēlreiz sadalām 64 mazākos kubiņos. Kubiņu skaits palielinās par 63 (rodas 64 jauni kubiņi, bet pazūd vecais. Tagad kubs sadalīts 127 kubos. Vienu no tiem sadalām $2\times2\times2=8$ mazākos kubiņos, tagad kubs sadalīts $127+7=134$ kubos; vēlreiz vienu no sadalījuma kubiem sadalām 8 kubos: iegūstam sadalījumu no 141 kuba. Pēdējo reizi sadalām vienu no kubiem 8 kubos un iegūstam prasīto kuba sadalījumu 148 kubos.

31.6. Ievērosim, ka izpildās vienādība

$$\underbrace{111\ldots11}_{27\text{ vieninieki}}=111\cdot\underbrace{1001001\ldots001}_{9\text{ vieninieki}}$$

No dalāmības pazīmēm ar 3 un 9 seko, ka pirmais reizinātājs dalās ar 3, bet otrais ar 9; tātad viss reizinājums dalās ar 27.

31.7. Iespējami trīs gadījumi:

1) Jānis atdeva māsai 30 kapeikas; tad sākumā viņam bija $30\cdot5=150$ kapeikas, atlika 120 kapeikas. Puse no atlikuma – 60 kapeikas varētu būt 3 divdesmitkapeiku monētas.

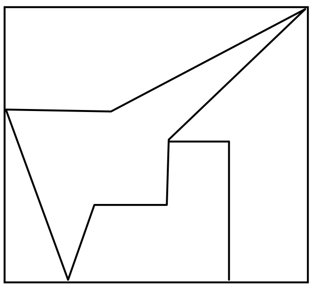
2) Jānis atdeva māsai 35 kapeikas; tad sākumā viņam bija $35\cdot5=175$ kapeikas, atlika 140 kapeikas. Bet puse no atlikuma – 70 kapeikas nevar būt trīs norādīto monētu summa.

3) Jānis atdeva māsai 40 kapeikas; tad sākumā viņam bija $40\cdot5=200$ kapeikas, atlika 160 kapeikas. Bet puse no atlikuma – 80 kapeikas nevar būt trīs norādīto monētu summa.

Atbilde: Jānim sākumā bija 150 kapeikas.

31.8. Astoņstūrim ir 8 malas; tātad tiks aplūkotas 8 starpības. Tās var pieņemt tikai 7 dažādas vērtības no 1 līdz 7. No Dirihle principa seko, ka vismaz divas no starpībām būs vienādas.

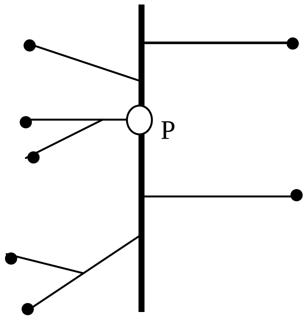
31.9. To var izdarīt, piemēram tā, kā parādīts 31.6. zīm.



31.6. zīm.

31.10. Pieturu jāceļ 31.7. zīm. norādītajā punktā P.

Tiešām, ja pieturu pārnestu uz augšu par attālumu *a*, tad attālums līdz 5 mājam palielinātos par *a*, bet līdz diviem ciemiem samazinātos ne vairāk kā par *a*; tātad attālumu summa palielinātos (ne mazāk kā par 3*a*).



31.7. zīm.

Ja pieturu pārnestu uz leju par attālumu *a*, tad attālums līdz 4 mājam palielinātos par *a*, bet līdz 3 ciemiem samazinātos ne vairāk kā par *a*; tātad attālumu summa palielinātos (ne mazāk kā par *a*).

31.11. Jā, tāda kopa eksistē. Riņķa līniju ar centru punktā *O* un rādiusu 1 sadalīsim 360 vienādos lokos (viens loks būs 1° liels). Loku galapunktu kopu apzīmēsim ar *M*. Tad, pagriežot kopu *M* ap centru *O* par jebkuru veselu grādu lielu leņķi, šī kopa attēlosies sevī.

31.12. a) No 31.8. zīmējuma redzams, ka skaitlis ($-x$), ko attēloja punkts *E*, ir lielāks par skaitli *x*, tātad *x* ir negatīvs skaitlis.

31.8. zīm.

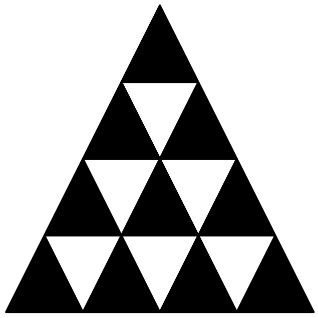
b) No a) punkta seko, ka starp dotajiem skaitļiem ir tieši divi negatīvi skaitļi : *x* un x^3. Tātad trešais punkts no kreisās puses – *C* apzīmē skaitli 0. Līdz ar to *A* apzīmē x^3. Tā kā $x^3 > x$, tad

$$x \cdot (x^2 - 1) > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 > 1.$$

Tas nozīmē, ka *D* apzīmē skaitli 1, bet *F* apzīmē skaitli x^2.

31.13. Nē, tā nevar būt. Pieņemsim pretējo, ka katra figūra nonāca blakus lauciņā. Iekrāsosim trijstūrīšus tā, kā parādīts 31.9. zīmējumā. Tad figūras, kas atradās uz melnajiem lauciņiem (tādu ir 10), pēc pārvietošanas nonāca baltajos lauciņos (tādu ir

6), jo melnajiem trijstūrīšiem nav kopīgu malu. Taču nav iespējams novietot 10 figūras sešos lauciņos pa vienai.



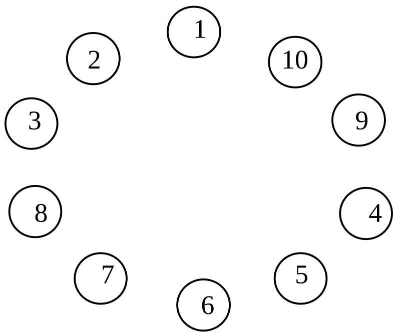
31.9. zIm

31.14. Divu skaitļu x un y apmainīšanu vietām apzīmēsim šādi: $x \leftrightarrow y$.

Izpildīsim šādu pārveidojumu sēriju:

$$2 \leftrightarrow 10, 1 \leftrightarrow 3, 3 \leftrightarrow 9, 1 \leftrightarrow 9.$$

Iegūsim situāciju, kāda parādīta 31.10. zīm.



31.10.

Tālāk izpildīsim šādu pārveidojumu sēriju:

$$5 \leftrightarrow 7, 4 \leftrightarrow 6, 4 \leftrightarrow 8, 6 \leftrightarrow 8.$$

Rezultātā iegūsim prasīto situāciju .

31.15. Pieņemsim, ka $2n+5$ un $3n+8$ dalās ar kādu naturālu skaitli m. Tad ar m dalās arī skaitlis $3 \cdot (2n+5) - 2 \cdot (3n+8) = 1$. Tātad $m = 1$.

31.16. Doto daļu var uzrakstīt formā $\frac{a}{3a}$. No dotā iegūstam:

$$a + 1 = 3a - 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1,$$

tātad meklētā daļa ir $\frac{1}{3}$.

31.17. Doto nevienādību pārveidojam šādi:

$$x^5y(x-y)+xy^5(y-x)\geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$xy(x-y)(x^3-y^3)\geq 0.$$

Ja $x \geq y$, tad $x-y\geq 0$, $x^3-y^3\geq 0$, un viss reizinājums ir nenegatīvs.

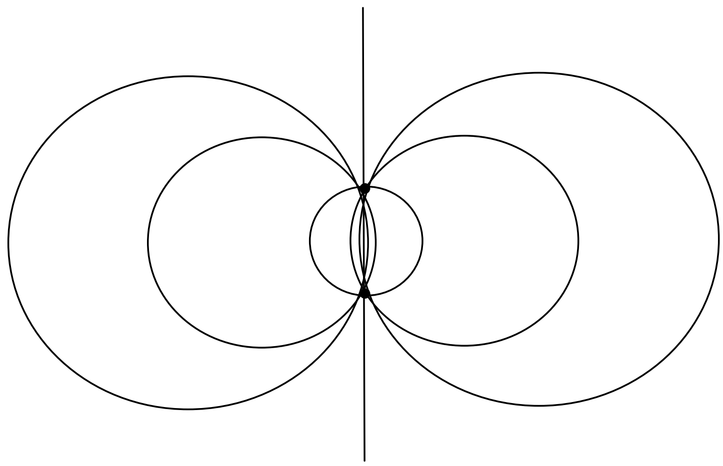
Pretējā gadījumā $x-y<0$, $x^3-y^3<0$, un viss reizinājums ir pozitīvs. Nevienādība pieradīta.

31.18. Meklējamais skaitlis ir 9. Tiešām, ar 9 dalās visi skaitļi, kas satur katru ciparu tieši vienu reizi, jo tā ciparu summa 45 dalās ar 9.

Ja k ir skaitlis, ar kuru dalās visi "dažādciparu" skaitļi, tad ar k dalās skaitļi 9876543210 un 9876543201, tātad ar k dalās arī šo skaitļu starpība – skaitlis 9. Tātad $k\leq 9$.

31.19. Ja daudzstūrim diagonāļu ir 14 reizes vairāk nekā malu, tad arī no katras virsotnes iziet 14 reizes vairāk diagonāļu nekā malu. Tātad no vienas virsotnes iziet 28 diagonāles. Tātad daudzstūrim ir 31 virsotne (izejas virsotne, divu izejošo malu galapunkti, 28 izejošo diagonāļu galapunkti).

31.20. Uzzīmējam riņķa līniju, kas iet caur diviem punktiem *A* un *B* (visiem pārējiem punktiem jāatrodas vienā pusē no taisnes *AB*), un satur visus pārējos punktus. Tad pakāpeniski samazinām tās rādiusu, līdz *AB* kļūs par tās diametru, pēc tam palielinām riņķa līniju otrā virzienā (punkti *A* un *B* pieder visām šīm riņķa līnijām). Tā kā sakumā šī riņķa līnija saturēja visus dotos punktus, bet beigās nevienu, tad kaut kādā brīdī tā gāja caur kaut kādu trešo punktu *C* un saturēja tieši 1000 no dotajiem punktiem (skat. 31.11. zīm.).



31.11. zīm.

31.21. Ievietojot $y = 5 - x$ pirmajā vienādojumā, iegūstam

$$x^2 - x(5 - x) + (5 - x)^2 = 13 \quad \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - 15x + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = 4\,.$$

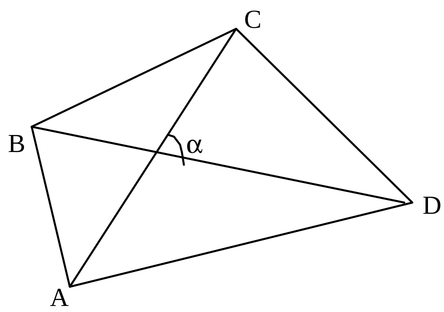
Atbilde: $\{(1,\ 4),\ (4,\ 1)\}$.

31.22. Acīmredzot , gan pāra vietās esošie locekļi, gan nepāra vietās esošie locekļi veido aritmētiskās progresijas. Tāpēc no dotā iegūstam

$$\frac{a_1 + a_{1981}}{2} \cdot 991 = \frac{a_2 + a_{1980}}{2} \cdot 990\ .$$

Tā kā $a_1 + a_{1981} = a_2 + a_{1980} = c$, tad $c \cdot 991 = c \cdot 990 \quad \Rightarrow \quad c = 0$. Tāpēc arī meklējamā summa $\frac{a_1 + a_{1981}}{2} \cdot 1981$ ir vienāda ar 0.

31.23. Aplūkosim 31.3. zīmējumu.



31.3. zīm.

No trijstūra laukuma formulas iegūstam

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} =$$

$$\frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} BO \cdot CO \sin(180^\circ - \alpha) +$$

$$\frac{1}{2} CO \cdot DO \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} DO \cdot AO \sin(180^\circ - \alpha) =$$

$$\frac{1}{2} \sin\alpha \cdot (AO + CO) \cdot (BO + DO) = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha.$$

31.24. Varam uzskatīt, ka $a < b < c$. Vienādojuma kreisās puse izteiksmi apzīmēsim ar $f(x)$. Tad

$$f(a) = (a - b)(a - c) > 0,$$

$$f(b) = (b - a)(b - c) < 0,$$

$$f(c) = (c - a)(c - b) > 0.$$

Tātad polinomam $f(x)$ ir divas reālas saknes ; viena -- intervālā (a, b) , otra -- intervālā (b, c).

31.25. a) Der šādas skaitļu grupas: $\{1, 4, 6, 7\}$ un $\{2, 3, 5, 8\}$.

Skaitļu summas abās grupās ir 18, bet skaitļu kvadrātu summas ir 102.

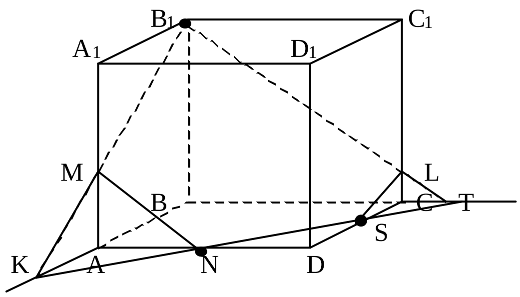
b) Der šādas skaitļu grupas:

$$\{1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16\} \text{ un } \{2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15\}.$$

31.26. Ja ģeometriskās progresijas kvocients ir q, tad $b = aq$, $c = aq^2$; iegūstam vienādojumu $a + aq^2 = 2aq$. Tā kā $a \neq 0$, tad $q^2 - 2q + 1 = 0 \Rightarrow q = 1$. Tāpēc ģeometriskā progresija (un arī aritmētiskā) ir konstanta.

Tātad meklējamais skaitlis ir 5.

31.27. Skat. 31.4. zīm.



31.4. zīm.

Konstrukcijas gaita:

1) $K = (NS) \cap (AB)$;

punkts K pieder šķēluma plaknei, jo punkti N un S pieder šķēluma plaknei;

2) $M = (KB_1) \cap (AA_1)$;

punkts M pieder šķēluma plaknei, jo punkti K un B_1 pieder šķēluma plaknei;

3) $T = (NS) \cap (BC)$;

punkts T pieder šķēluma plaknei, jo punkti N un S pieder šķēluma plaknei;

4) $L = (TB_1) \cap (CC_1)$;

punkts L pieder šķēluma plaknei, jo punkti T un B_1 pieder šķēluma plaknei.

Meklētais šķēlums ir piecstūris B_1LSNM.

31.28. Skudras pārvietošanos Ox ass virzienā ietekmē vienīgi pirmais, trešais, piektais, ... , posmi. Skudra Ox ass virzienā pārvietosies par attālumu

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{4}{5}.$$

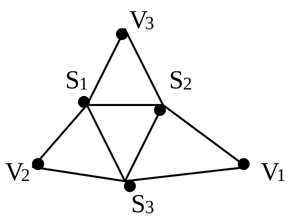
Līdzīgi pierāda, ka skudras pagriezienu punktu ordinātes tiecas uz

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32} - \frac{1}{128} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{2}{5}.$$

Tātad skudras pagriezienu punktu virkne tiecas uz punktu $\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)$. Tā kā attālumi starp diviem viens otram sekojošiem pagrieziena punktiem tiecas uz 0, un skudra starp tiem kustās pa taisni, tad skudra pakāpeniski tuvojas šim punktam.

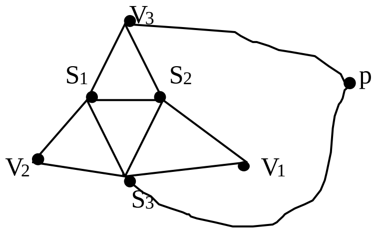
31.29. Nē neeksistē. Pieņemsim pretējo, ka tāda virkne (a_k) eksistē. Sāksim izrakstīt pēc kārtas virknē visus skaitļa $\sqrt{2}$ ciparus. Fiksēsim to brīdi, kad mēs sākam rakstīt virknes (a_k) ciparus. No šī brīža, kaut arī mēs joprojām izrakstām $\sqrt{2}$ ciparus, varam uzskatīt, ka izrakstām virknes (a_k) ciparus. Eksistē brīdis, kad, izrakstīdami virknes (a_k) ciparus, mēs sāksim izrakstīt $\sqrt{2}$ ciparus.
Pieņemsim, ka līdz šim brīdim izrakstīti cipari $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Tālāk atkal tiks izrakstīti cipari $c_1, c_2, \ldots, c_n$ utt., t.i., $\sqrt{2}$ ciparu virkne ir periodiska. Bet tas ir pretrunā ar to, ka $\sqrt{2}$ ir iracionāls skaitlis.

31.30. Rūķīšus apzīmēsim ar punktiem; ja divi rūķīši draudzējas, savienosim atbilstošos punktus ar līniju.
Aplūkosim trīs dažādas šillišallas s_1, s_2 un s_3, kas visi draudzējas savā starpā.
Pēc aksiomas $A3$ eksistē votivapa v_1, kas draudzējas ar s_2 un s_3, votivapa v_2, kas draudzējas ar s_1 un s_3, un votivapa v_3, kas draudzējas ar s_1 un s_2. Ja kaut divi no votivapām v_1, v_2 un v_3 ir viens un tas pats votivapa, tad tas ir votivapa, kas draudzējas ar visiem trim šillišallām. Tāpēc aplūkosim gadījumu , kad v_1, v_2 un v_3 -- dažādi rūķīši. Iegūstam 31.5. zīm. parādīto ainu:



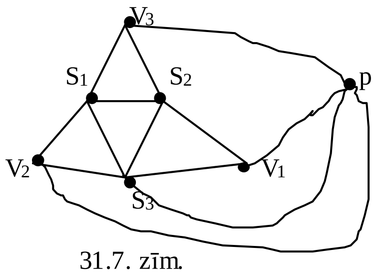
31.5. zīm.

Pēc aksiomas $A4$ eksistē tāds puika p, kas draudzējas ar votivapu v_3 un šillišallu s_3 .Iegūstam ainu:



31.6. zīm.

Tā kā p un v_1 draudzējas ar šillišallu s_3, tad pēc aksiomas $A1$ p draudzējas ar v_1. Līdzīgi pierāda, ka p draudzējas v_2. Iegūstam ainu:



31.7. zīm.

Tā kā v_3 un v_1 draudzējas ar s_2 un ar *p*, tad pēc aksiomas $A2$ p draudzējas ar s_2. Līdzīgi pierāda, ka *p* draudzējas ar s_1.

Tātad *p* draudzējas ar visām šillišallām s_1, s_2 un s_3, ko arī vajadzēja pierādīt.

31.31. Attālums starp šķērsām taisnēm ir īsākais attālums starp punktiem *x* un *y*, kur punkts *x* pieder vienai taisnei, bet *y* -- otrai. Apzīmēsim attālumu starp taisnēm t_1 un t_2 ar *d*. Uzskatīsim, ka $a \le b$. Tad

$$d \le a = \sqrt{aa} \le \sqrt{ab}\,.$$

31.32. Pārveidojam vienādības kreisās puses izteiksmi

$$\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha + 120°) + \cos(\alpha + 240°) =$$

$$\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + 1) + \frac{1}{2}(\cos(2a + 240°) + 1) + \frac{1}{2}(\cos(2\alpha + 120°) + 1) =$$

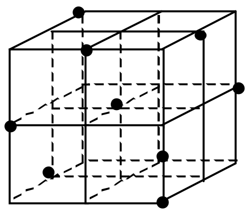
$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos(2\alpha + 240°) + \cos(2\alpha + 120°)) =$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + 2\cdot\cos(2\alpha + 180°)\cdot\cos 60°) =$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha - 2\cdot\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\,.$$

Identitāte pierādīta

31.33. Tā kā no viena punkta vienā ortogonālajā projekcijā rodas tikai viens punkts - attēls, tad M nevar saturēt mazāk nekā 9 punktus. 31.8. zīmējumā parādīta 9 punktu kopa, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. Punkti novietoti kuba virsotnēs, centrā un šķautņu viduspunktos.



31.8. zīm.

31.34. Izvēlēsimies leņķus α un β tā, ka $\cos\alpha = a, \sin\alpha = b$, $\cos\beta = c, \sin\beta = d$. Tad

$$|ac - bd + ad + bc| =$$
$$|\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta| =$$
$$|\cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta)| =$$
$$\sqrt{(\cos(\alpha + 2\sin\beta) + \sin(\alpha+\beta))^2} = \sqrt{1 + 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)} =$$
$$\sqrt{1 + \sin 2(\alpha+\beta)} \le \sqrt{2}\ .$$

31.35. Izmantojot dotās sakarības, patvaļīgam skaitlim x iegūstam

$$0 = f(x) - f(x) = f(2x - x) - f(x) =$$
$$f(2x + (-x)) - f(x) \le f(2x) + f(-x) - f(x) =$$
$$f(x + x) + f(-x) - f(x) \le f(x) + f(x) + f(-x) - f(x) =$$
$$f(x) + f(-x) \le f(x) + (-x) = f(x) - x \le x - x = 0\ .$$

Esam ieguvuši, ka $0 \le f(x) - x \le 0$; tātad $f(x) = x$ visiem x.

31.36. Pirmās iekavas vērtība atrodas starp 0 un 2; otrās iekavas vērtība atrodas starp (-1) un 3. Tāpēc vienādība var pastāvēt tad un tikai tad, ja

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1 \\ \sin(2x - y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 2x - y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\ . \end{cases}$$

Atbilde: $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi(n+k)}{3} \\ y = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi(2n-k)}{3} \end{cases} \quad n, k \in Z.$

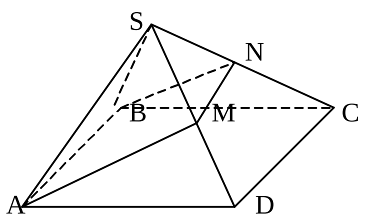
31.37. Skat. 31.9. zīm. Tā kā *MN* ir skaldnes *DSC* šķēluma taisne ar plakni, kas iet caur *AB*, un $AB \parallel DC$, tad $MN \parallel DC$.

Apzīmēsim piramīdas sānu skaldnes laukumu ar *L*, bet $\dfrac{SM}{SD} = \dfrac{SN}{SC} = x$. Tad trijstūru *ASM* un *BSN* laukumi ir $L \cdot x$, bet trijstūra MSN laukums ir $L \cdot x^2$ (pēc teorēmas par līdzīgu trijstūru malu attiecību). Tad piramīdas sānu virsmas augšējā daļa ir $L + 2Lx + Lx^2$, un iegūstam vienādojumu

$$\frac{Lx^2 + 2Lx + 1}{4L} = \frac{1}{2},$$

no kurienes $x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{2} - 1$. Tāpēc meklējamā attiecība ir

$$\frac{Lx^2}{L - Lx^2} = \frac{x^2}{1 - x^2} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$



31.9. zīm.

31.38. Nē neeksistē. Pieņemsim pretējo, ka eksistē tāds *n*-tās pakāpes polinoms, ka intervālā $[0, 1]$ izpildās vienādība

$$P(x) = \sin x.$$

Atvasināsim šo vienādību 4*k* reizes, kur $4k > n$. Tā kā $\sin x$ ceturtais atvasinājums ir 0, bet, atvasinot polinomu, tā pakāpe samazinās par 1, tad iegūsim vienādību

$$0 = \sin x,$$

kas izpildās visiem *x* intervālā $[0, 1]$, bet tā ir pretruna.

31.40. Maksimālais summas modulis, ko otrais var panākt pie vislabākās pirmā spēlētāja aizsardzības, ir 45.

A. Pierādīsim, ka otrais spēlētājs var panākt, lai summas modulis būtu vismaz 45, neatkarīgi no tā, kā spēlē pirmais spēlētājs.

Otrais spēlētājs domās sadala visus uzrakstītos skaitļus 15 pāros: (1, 2), (3, 4), ..., (29, 30). Ja pirmais spēlētājs ar savu gājienu pieliek zīmi priekšā kādam skaitlim *x* no pirmajiem 28 skaitļiem, otrais spēlētājs ar savu sekojošo gājienu pieliek pretēju zīmi priekšā tam skaitlim, kas atrodas vienā pārī ar *x*. Ja pirmais spēlētājs ar savu gājienu pieliek zīmi priekšā kādam no skaitļiem 29 un 30, otrais spēlētājs ar savu sekojošu gājienu pieliek otram no šiem skaitļiem priekšā tādu pašu zīmi.

Kad visas zīmes uzrakstītas, katrā no pirmajiem 14 pāriem ieejošo skaitļu summa ir ± 1, bet pēdējā pārī ieejošo skaitļu summa ir ± 59. Tāpēc visu skaitļu summas modulis nav mazāks par 59 – 14 = 45.

B. Pierādīsim, ka pirmais spēlētājs var panākt, lai summas modulis pēc visu zīmju uzrakstīšanas nepārsniegtu 45, neatkarīgi no tā, kā spēlē otrais spēlētājs.

Pirmais spēlētājs rīkojas šādi: ar katru savu gājienu viņš apskata vislielāko skaitli, kuram priekšā vēl nav pielikta zīme, un raksta šī skaitļa priekšā zīmi, kas pretēja līdz šim izveidotās summas zīmei. Ja līdz šim izveidotā summa ir 0, pirmais spēlētājs liek zīmi "+", tāpēc viņa pirmais gājiens ir "+30".

Pierādīsim, ka rīkojoties pēc šādas stratēģijas, pirmais spēlētājs panāk, lai pēc visu zīmju uzrakstīšanas summas modulis nepārsniedz 45.

Aplūkosim patvaļīgu partiju. Sadalīsim tajā izdarītos gājienus pa pāriem: pirmā spēlētāja pirmais gājiens – otrā spēlētāja pirmais gājiens, pirmā spēlētāja otrais gājiens – otrā spēlētāja otrais gājiens, ..., pirmā spēlētāja piecpadsmitais gājiens – otrā spēlētājs piecpadsmitais gājiens. Apskatīsim izveidotās summas pirms katra gājienu pāra. Sauksim gājienu pāri par sevišķu, ja vai nu summas, kas izveidotas pirms un pēc tā, ir ar pretējām zīmēm, vai arī pirms tā izveidotā summa ir 0 (tad pēc tā izveidotā summa nav 0).

Apskatīsim pēdējo sevišķo pāri; pieņemsim, ka tas ir *k*-tais (*k* = 1, 2, ... 15). Pirms šī pāra katrs spēlētājs izdarījis (*k* - 1) gājienu; tāpēc (pamatojoties uz pirmā spēlētāja stratēģiju) vismaz *k* – 1 lielāko skaitļu 30, 30 –1 , ... , 30 – (*k* –2) priekšā jau pierakstītas zīmes. Tātad abi lielākie vēl brīvie skaitļi ir ne lielāki par 30 – (*k* –1) un 30 – *k*. Tā kā *k*-tais pāris ir sevišķs, tad pēc *k*-tā pāra gājienu izdarīšanas izveidotās summas modulis nepārsniedz

$$(30-(k-1))+(30-k)=61-2k.$$

Nākošo gājienu pāru rezultātā summas zīme nemainās (jo *k*-tais bija pēdējais sevišķais pāris). Ievērojot pirmā spēlētāja stratēģiju, katrs no nākošajiem 15-*k* gājienu pāriem pamazina izveidotās summas moduli vismaz par 1, tāpēc pēc visu gājienu izdarīšanas summas modulis nepārsniedz

$$61-2k-(15-k)=46-k\le 45, \quad \text{jo} \quad \mathrm{k}\ge 1.$$