Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 32. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

32.21. Ievietojot $y = 5 - x$ pirmajā vienādojumā, iegūstam

$$x^2 - x(5-x) + (5-x)^2 = 13 \quad \Leftrightarrow$$
$$3x^2 - 15x + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = 4 .$$

Atbilde: $\{(1, 4), (4, 1)\}$.

32.22. Acīmredzot $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$. Nevienādība $\sqrt{2} < \sqrt[5]{6}$ seko no šādiem pārveidojumiem:

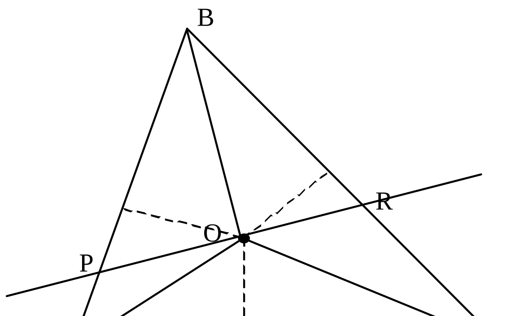
$$\sqrt{2} < \sqrt[5]{6} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{2}\right)^{10} < \left(\sqrt[5]{6}\right)^{10} \quad \Leftrightarrow \quad 2^5 < 6^2 \quad \Leftrightarrow \quad 32 < 36 .$$

Līdzīgi iegūstam

$$\sqrt[5]{6} < \sqrt[3]{3} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt[5]{6}\right)^{15} < \left(\sqrt[3]{3}\right)^{15} \quad \Leftrightarrow \quad 6^3 < 3^5 \quad \Leftrightarrow 216 < 243 .$$

Tātad $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4} < \sqrt[5]{6} < \sqrt[3]{3}$.

32.23. Aplūkosim 32.2. zīm.



32.2. zīm.

Apzīmēsim ar *r* trijstūrī *ABC* ievilktās riņķa līnijas rādiusu un ar *P* trijstūra perimetru. Tad

$$S_{PBR} = S_{OPB} + S_{OBR} = \frac{1}{2} PB \cdot r + \frac{1}{2} BR \cdot r = \frac{1}{2}(PB + BR) \cdot r = \frac{1}{4} P \cdot r .$$

$$S_{PRCA} = S_{ORC} + S_{OCA} + S_{OPA} = \frac{1}{2}(RC + CA + AP) \cdot r = \frac{1}{4} P \cdot r .$$

Apgalvojums pierādīts.

32.24. Doto izteiksmi var sadalīt reizinātājos

$$\left|x^2-8x+15\right|=\left|x-3\right|\cdot\left|x-5\right|.$$

Lai aplūkojamais skaitlis būtu pirmskaitlis nepieciešams, lai viens no reizinātājiem būtu vieninieks; tātad $x\in\{2,\ 4,\ 6\}$. Pārbaude parāda, ka der tikai x vērtības 2 un 6; ja $x=4$, tad izteiksmes vērtība ir 1 (1 nav pirmskaitlis).

32.25. Jā, tādi 10 skaitļi eksistē; piemēram, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.
11 šādi skaitļi neeksistē. Apzīmēsim meklējamos skaitļus ar $a_1,\ a_2,\ldots,a_{11}$.Tad

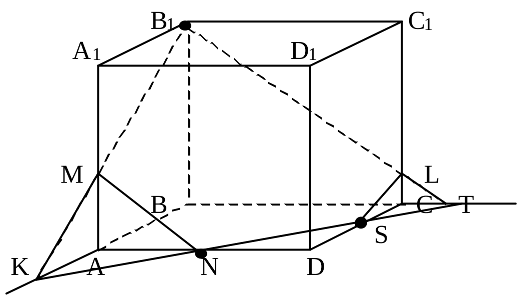
$$a_{11}-a_1=10d\le 99-10=89 \quad\Rightarrow\quad d\le\frac{89}{10};$$

tātad progresijas diference d nepārsniedz 8. Ar $S(x)$ apzīmēsim skaitļa a ciparu summu. Divciparu skaitļa ciparu summa nepārsniedz 18; tāpēc

$$S(a_{11})-S(a_1)=10t\le 18-1 \quad\Rightarrow\quad t=1,$$

kur t ir skaitļu ciparu summu veidotās aritmētiskās progresijas diference. Tātad $S(a_2)-S(a_1)=1$; tas iespējams tikai gadījumā, kad $a_2-a_1=1$ vai $a_2-a_1\ge 10$; otrais gadījums ir pretrunā ar nevienādību $d\le 8{,}9$. Tātad skaitļi a_i ir viens otram sekojoši skaitļi. Tā kā 11 skaitļi nevar atrasties vienā desmitniekā, tad virknē atradīsies skaitļi $a_k=\overline{x9}$ un $a_{k+1}=\overline{(x+1)0}$, bet skaitļa a_{k+1} ciparu summa ir mazāka par skaitļa a_k ciparu summu. Pretruna.

32.26. Skat. 32.3. zīm.



32.3. zīm.

Konstrukcijas gaita:

1) $K=(NS)\cap(AB)$;

punkts K pieder šķēluma plaknei, jo punkti N un S pieder šķēluma plaknei;

2) $M=(KB_1)\cap(AA_1)$;

punkts M pieder šķēluma plaknei, jo punkti K un B_1 pieder šķēluma plaknei;

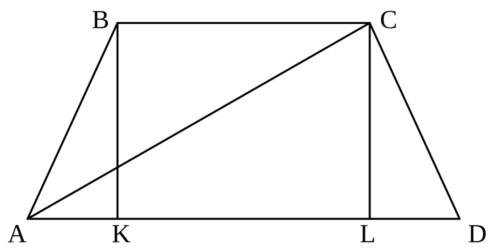
3) $T = (NS) \cap (BC)$;

punkts T pieder šķēluma plaknei, jo punkti N un S pieder šķēluma plaknei;

4) $L = (TB_1) \cap (CC_1)$;

punkts L pieder šķēluma plaknei, jo punkti T un B_1 pieder šķēluma plaknei. Meklētais šķēlums ir piecstūris B_1LSNM .

32.27. Vienādsānu trapecē $ABCD$ novilksim perpendikulus BK un CL pret pamatu AD (skat. 32.3. zīm.).



32.3. zīm.

Taisnleņķa ACL hipotenūza AC ir garāka par kateti AL. No vienādībām

$$2AL = AL + KD = AD + KL = AD + BC$$

seko, ka AL garums vienāds ar trapeces viduslīnijas garumu. Tātad trapeces diagonāle AC ir garāka par tās viduslīniju.

32.28. Apzīmēsim skaitļu virkni 010 ar A un virkni 01010 -- ar B. Uzrakstīsim patvaļīgu bezgalīgu neperiodisku virkni no burtiem A un B. Tad skaitlis $0, x_1 x_2 x_3 \ldots$, $x_k \in \{A, B\}$ ir iracionāls, jo ciparu virkne nav periodiska; nekur blakus nestāv divi vieninieki un trīs nulles. Tātad eksistē bezgalīgi daudz prasītā veida skaitļi.

32.29. Viegli pierādīt, ka naturāliem skaitļiem izpildās nevienādības

$$(n+1)^2 \geq n^2 + n + 2 \quad \text{un} \quad n^3 + 2n \geq n^2 + 2 \,.$$

Tātad aplūkojamā nevienādība ir ekvivalenta nevienādībai

$$(n+1)^2 > n^3 + n \quad \Leftrightarrow \quad n^3 < n^2 + n + 1 .$$

Ja $n = 1$, tad nevienādība izpildās; ja $n = 2$, tad neizpildās. Ja $n \geq 3$, tad

$$n^3 \geq 3n^2 > n^2 + n + 1$$

un prasītā nevienādība neizpildās.

Atbilde: $n = 1$.

32.30. Ar x_n apzīmēts sulas daudzums traukā A pēc n divkāršām pārliešanām. Tātad traukā A ir x_n litri sulas un $1 - x_n$ litri ūdens, bet traukā B -- litri sulas un x_n litri ūdens. Pēc pārliešanas no trauka *A* traukā *B* traukā *A* paliks $\frac{2}{3}x_n$ litri sulas, bet traukā *B* būs $(1-x_n)+\frac{1}{3}x_n = 1-\frac{2}{3}x_n$ litri sulas. Otrajā pārliešanā no trauka *B* paņem $\frac{1}{4}$ no tā satura, tātad arī $\frac{1}{4}$ no sulas daudzuma. Tātad

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{3}x_n\right) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}x_n \ .$$

Ar matemātisko indukciju pierāda, ka $x_n < \frac{1}{2}$, un virkne ir augoša. Tātad eksistē virknes robeža *c*. Pārejot vienādībā $x_{n+1} = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}x_n$ uz robežu, iegūstam

$$c = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}.$$

Tas nozīmē, ka $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

32.31. Pārveidojam vienādības kreisās puses izteiksmi

$$\begin{aligned}
&\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha+120°) + \cos(\alpha+240°) = \\
&\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + 1) + \frac{1}{2}(\cos(2a+240°)+1) + \frac{1}{2}(\cos(2\alpha+120°)+1) = \\
&\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos(2\alpha+240°) + \cos(2\alpha+120°)) = \\
&\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + 2\cdot\cos(2\alpha+180°)\cdot\cos 60°) = \\
&\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha - 2\cdot\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Identitāte pierādīta

32.32. . Pareizinām $f(x)$ ar $(x-1)$. Iegūstam vienādību

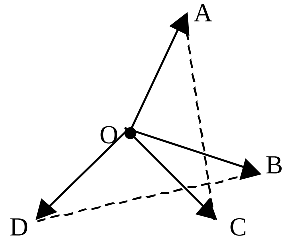
$$\begin{aligned}
&(x-1)\cdot f(x) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)\cdot(x^4+1)\cdot(x^8+1)\cdot(x^{16}+1) = \\
&(x^2-1)\cdot(x^2+1)\cdot(x^4+1)\cdot(x^8+1)\cdot(x^{16}+1) = \\
&(x^4-1)\cdot(x^4+1)\cdot(x^8+1)\cdot(x^{16}+1) = \\
&(x^8-1)\cdot(x^8+1)\cdot(x^{16}+1) = \\
&(x^{16}-1)\cdot(x^{16}+1) = \\
&(x^{32}-1).
\end{aligned}$$

Izmantojot atvasinājuma formulas, iegūstam

$$f'(x) = \frac{32x^{31}(x-1)-(x^{32}-1)}{(x-1)^2} \ .$$

32.33. Aplūkosim trijstūra piramīdu *ABCD*. Izvēlēsimies plakni α, kas ir paralēla taisnēm *AB* un *CD*. Aplūkosim arī plakni β, kas ir paralēla taisnēm *AC* un *BD*. Plakņu α un β šķēluma taisni apzīmēsim ar *t*. Plakni, kas ir perpendikulāra taisnei t, apzīmēsim ar π. Trijstūra piramīdas ortogonālā projekcija (tātad projekcija taisnes t virzienā) būs paralelograms.

32.34. No punkta *O* atliksim vektorus $\overrightarrow{OA} = (a, b)$, $\overrightarrow{OB} = (c, d)$, $\overrightarrow{OC} = (e, f)$, $\overrightarrow{OD} = (g, h)$. Pirmās vienādības apgalvo, ka šo četru vektoru garumi ir 1. Nākošā vienādība apgalvo, ka vektoru $\overrightarrow{OA}$ un $\overrightarrow{OB}$ skalārais reizinājums ir 0; tātad $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$. Līdzīgi $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OD}$. Skat. 32.4. zīm.

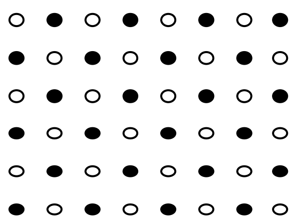


32.4. zīm.

Leņķi $\angle DOA$ un $\angle BOC$ ir leņķi ar savstarpēji perpendikulārām malām; tātad tie ir vai nu vienādi, vai summā dod $180°$. To kosinusi pēc moduļa ir vienādi. Atliek atzīmēt, ka

$$|ce + df| = \left|\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OC}\right| \cdot |\cos \angle BOC| =$$
$$|\cos \angle DOA| \cdot \left|\overrightarrow{OD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}\right)\right| = |ag + bh|.$$

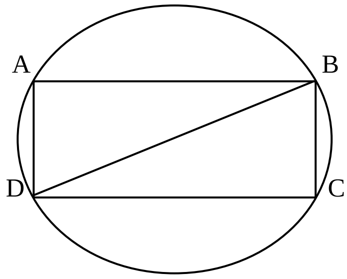
32.35. Iekrāsosim visus rūtiņu stūrus šahveida kārtībā (skat. 32.5. zīm.).



32.5. zīm.

Skudra katrā sekundē pāriet uz pretējās krāsas virsotni; tātad pēc 1982 gājieniem tā atradīsies uz sākotnējās krāsas lauciņa, bet *A* un *B* ir dažādu krāsu virsotnes. Tātad skudra 1982 gājienos nevarēs nokļūt no punkta *A* punktā *B*.

32.36. Aplūkosim taisnstūri $ABCD$, kas ievilkts riņķī ar rādiusu R (skat. 32.6. zīm.).



32.6. zīm.

Apzīmēsim $AD = BC = a$ un $AB = DC = b$. Tad taisnstūra laukums ir vienāds ar $a \cdot b$. No Pitagora teorēmas seko, ka $a^2 + b^2 = 4R^2$. Tātad

$$S_{ABCD} = ab \le \frac{a^2 + b^2}{2} = 2R^2.$$

Vērtību $2R^2$ var iegūt, izvēloties par taisnstūri $ABCD$ kvadrātu.

32.37. Izmantojot formulas, iegūstam

$$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x =$$
$$2\sin x \cdot \cos^2 x + \sin x \cdot (1 - 2\sin^2 x) =$$
$$2\sin x \cdot (1 - \sin^2 x) + \sin x \cdot (1 - 2\sin^2 x) =$$
$$3\sin x - 4\sin^3 x.$$

Ja $0 < \sin x < \frac{1}{10}$, tad $\sin 3x < 3\sin x$. Tāpēc $\sin 3x < \frac{3}{10}$, un nevar izpildīties nevienādība $\sin 3x > \frac{1}{3}$.

32.38. Visi pieci dotie skaitļi ir dažādi pēc moduļa 5. Tātad viens no tiem dalās ar 5. Tas var būt pirmskaitlis tikai, ja ir vienāds ar 5. No dotajiem skaitļiem tikai skaitlis n var būt vienāds ar 5. Ja $n = 5$, tad visi noradītie skaitļi ir pirmskaitļi.

32.9. No dotā viegli secināt, ka trijstūra piramīdas visas skaldnes ir vienādi trijstūri. No šejienes seko uzdevuma apgalvojums.

32.40. No pirmā šifra redzams, ka 7 burti lietoti katrs 1 reizi, bet 2 burti -- katrs 2 reizes. Ja katrs burts būtu izmantots vienu reizi, tad otrais šifrs saturētu 13 vieniniekus un 7 nulles, taču tajā ir 15 vieninieki un 9 nulles. Tātad burtos, kas atkārtojas 2 reizes, abos kopā otrajā šifrā ir 2 vieninieki un 2 nulles, t. i., šie burti var būt *E* un *Ī*, *E* un *N*, *I* un *Z*, *I* un *S*. No pirmā šifra redzams, ka viens no divreiz lietotajiem burtiem ir pēdējais burts: no otrā šifra redzams, ka tas nevar būt neviens no burtiem E, *N*, *Z*,*I*.

Tātad divi pēdējie burti (priekšpēdējais arī atkārtojas 2 reizes) var būt vai nu *EĪ*, vai *IS*.

Pieņemsim, ka divi pēdējie burti ir *EĪ*. Tad burts *I* var novietoties tikai šādi:

$$111011011\underbrace{00}_{I}1011101100\underbrace{0}_{E}\underbrace{11}_{\bar{I}}.$$

Kurā vietā var atrasties otrs burts *E*, kas otrajā šifrā aizstāts ar 0?

Otrs burts *E* nevar atrasties pirms burta *I*, jo tādā gadījumā nepietiktu ciparu, lai atšifrētu 4 burtus, kas atrodas **pirms** šī burta *E*; tas nevar būt šifrēts ar pirmo nulli aiz burta *I*, jo tad burts *Ī* var novietoties tikai tā kā parādīts pierakstā (1) un starp *Ī* no abām pārējām atlikušajām nullēm, jo tad otrajam burtam *Ī* jāatrodas pirms šī burta *E*, bet tas (pēc pirmā šifra) nav iespējams.

$$111011011\underbrace{00}_{I}1\underbrace{0}_{E}111\underbrace{011}_{\bar{I}}0\underbrace{0}_{E}\underbrace{011}_{\bar{I}}.$$

Tātad abi pēdējie burti nav *EĪ*, bet ir *IS*, un iegūstam šādu pierakstu:

$$111011011\underbrace{00}_{I}101110110\underbrace{00}_{I}\underbrace{11}_{S}.$$

Otrajam burtam *S* jāatrodas starp abiem burtiem *I*. Tas nevar būt pēdējais vieninieku pāris aiz pirmā *I*, jo starp burtu *S* un pēdējo burtu *I* atrodas 2 citi burti; tas nevar būt pirmais vieninieku pāris triju vieninieku virknē aiz pirmā *I*, jo starp apskatāmo burtu *S* un tam priekšā stāvošo burtu *I* atrodas viens cits burts, kas pirmajā šifra aizstāts ar 2, bet nav tāda burta, kas otrajā šifrā būtu apzīmēts ar cipariem 10. Tāpēc iegūstam šādu pierakstu:

$$\underbrace{111}_{D}011011\underbrace{00}_{I}\underbrace{101}_{N}\underbrace{11}_{S}0110\underbrace{00}_{I}\underbrace{11}_{S}\ .$$

Burts *N* ir vienīgais, kas var atrasties starp *I* un *S*; burta *D* vieta noteikta viennozīmīgi.

Aplūkojot atlikušos burtus, redzam, ka vienīgā iespēja ir šāda:

$$\underbrace{111}_{D}\underbrace{011}_{\bar{I}}\underbrace{01}_{V}\underbrace{1}_{A}\underbrace{00}_{I}\underbrace{101}_{N}\underbrace{11}_{S}\underbrace{0}_{E}\underbrace{110}_{Z}\underbrace{00}_{I}\underbrace{11}_{S}\ .$$