Materiāls ņemts no grāmatas:Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 34. OLIMPIĀDE

4. klase

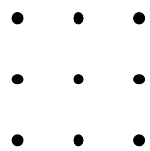
34.1. Kvadrāta laukums ir 49 cm^2 . Aprēķināt tā perimetru.

34.2. Veikalā pārdod konfektes par 3 kap. Gabalā. Jānim ir vairāk naudas nekā Jurim, Andrim -- vairāk nekā Jānim, Aivaram -- vairāk nekā Andrim.
Vai Aivars noteikti var nopirkt vairāk konfektšu nekā Juris ?
Vai Andris noteikti var nopirkt vairāk konfektšu nekā Juris ?

34.3. Atrast vidējo pēc lieluma (t.i. sešpadsmito pēc lieluma) no sekojošiem 31 skaitļiem:

52, 66, 19, 46, 28, 73, 12, 57, 34, 36, 13, 43, 64, 29, 48, 53, 17, 33, 24, 22, 51, 79, 31, 45, 21, 62, 14, 42, 26, 38, 58.

34.4. Deviņi punkti ievietoti kvadrātiskā režģī, kā parādīts 34.1. zīm.



34.1. zīm.

Uzzīmēt 5 dažādus septiņstūrus, katram no kuriem visas virsotnes atrodas šajos punktos.
Piezīme: septiņstūri, kas atšķiras tikai ar novietojumu, skaitās vienādi.

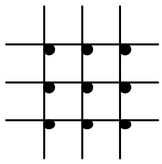
34.5. No astoņiem dažādiem cipariem, no kuriem neviens nav nulle, izveidots astoņciparu skaitlis, kurš dalās ar 9 bez atlikuma. Kurš nenulles cipars nav izmantots šī skaitļa pierakstā?
Uzrādiet visas iespējas un pierādiet, ka citu bez uzrādītajām nav.

5. klase

34.6. Vai piecu pēc kārtas ņemtu skaitļu summa var būt 24 ?. Vai tā var būt 1984 ? Vai tā var būt 1985 ?

34.7. Atrodiet tādus astoņus skaitļus *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, ka skaitļi *ab*, *cd*, *ef*, *gh* ir negatīvi, bet skaitļi *bc*, *de*, *fg*, *ha* -- negatīvi. (Pietiek atrast vienu šādu skaitļu komplektu).

34.8. Aplūkojam deviņas kvadrātiskā režģī ievietotas rūtiņu virsotnes (skat. 34.2. zīm.).



34.2. zīm.

Atzīmējiet piecas no šīm virsotnēm tā, lai iegūtajai 5 punktu sistēmai būtu simetrijas ass.
Centieties atrast iespējami daudzus veidus, kā to izdarīt. (Veidi, kas iegūstami viens no otra, pagriežot zīmējumu, skaitās vienādi.)

34.9. 64 traukos atrodas pa 1 litram šķidruma. Vienā no tiem ir inde, citos -- ūdens. Mūsu rīcībā ir neierobežots daudzums mēģeņu, kurās gatavot dažādus maisījumus, un ļoti jūtīgs reaģents, kas uzrāda vismazāko indes piejaukumu. Kā ar 6 pārbaudēm noskaidrot, kurā traukā ir inde ?

34.10. Ar naturālu skaitli atļauts izdarīt šādus pārveidojumus:

a) pieskaitīt tam 6,

b) dalīt ar 2 (ja tas ir pāra skaitlis),

c) mainīt vietām tā ciparus (skaitļa priekšā nedrīkst nonākt nulle).

Par kādu vismazāko skaitli var pārveidot 76 ? Bet 15 ?

Piemērs: $62 \to 26 \to 32 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$.

6. klase

34.11. Funkcija definēta ar formulu

$f = 3 - 0{,}2 \cdot x$.

a) Ar kādu *x* vērtību funkcijas vērtība ir 100 ?

b) Kādos kvadrantos atrodas tās grafika punkti ?

34.12. Ar kādu ciparu var beigties naturāla skaitļa sešpadsmitā pakāpe ?

34.13. Trijstūrī ABC bisektrise no virsotnes B ir arī augstums. Pierādīt, ka trijstūris ABC ir vienādsānu.

34.14. Rindā uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 1984 (ieskaitot). Divi spēlētāji pēc kārtas izsvītro pa vienam skaitlim no rindas tik ilgi, kamēr rindā paliek tikai divi skaitļi (ar katru gājienu var izsvītrot jebkuru no palikušajiem skaitļiem). Pirmais spēlētājs grib, lai šie abiem skaitļiem būtu kopīgs dalītājs, kas lielāks par 1, bet otrais grib viņam traucēt. Vai otrais spēlētājs var izjaukt pirmā nodomus, ja pirmais spēlē tik gudri, cik iespējams ?

34.15. Uz galda atrodas sviras svari un 8 atsvari, kuru masas ir 1g, 2 g, 3 g, 4 g, 5 g, 6 g, 7 g un 8 g . Atsvarus pēc kārtas liek uz saru kausiem (ar vienu gājienu no galda paņem jebkuru atsvaru un uzliek uz viena no kausiem; pēc tam atsvarus no kausiem vairs nenoņem).

a) Pierādīt, ka atsvarus var likt uz kausiem tādā kārtībā, lai vispirms uz leju nosvētos kreisais kauss, tad labais, tad kreisais, tad labais, tad kreisais, tad labais, tad kreisais, tad labais.

b) Vai var atrast tādu kārtību lai šī virkne izskatītos tāda:
kreisais, kreisais, labais, kreisais, labais, labais, kreisais, labais ?

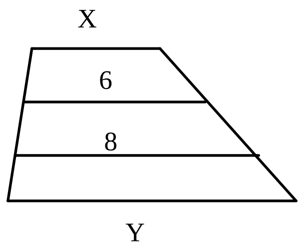
7. klase

36.16. Atrisināt vienādojumu

$$\frac{4x+2}{3x+1}=\frac{8x+4}{6x+3}.$$

36.17. Trapeces sānu mala sadalīta 3 vienādās daļās. No dalījuma punktiem līdz otrajai sānu malai novilkti nogriežņi, kas paralēli trapeces pamatiem; šo nogriežņu garumi ir 6 cm un 8 cm.

Atrast trapeces pamatu garumus . Skat. 34.3. zīm.



34.3. zīm.

36.18. Konstruēt taisnleņķa trijstūri, ja zināma tā hipotenūza, kā arī abu katešu summa.

36.19. Dota sekojoša skaitļu tabula:

11	17	25	19	16
24	10	13	15	3
12	5	14	2	18
23	4	1	8	22
6	20	7	21	9

34.4. zīm.

Izvēlēties no tās 5 skaitļus tā, lai nekādi divi no izvēlētajiem skaitļiem neatrastos ne vienā rindā, ne vienā kolonnā, un pie tam mazākais no izvēlētajiem skaitļiem būtu tik liels, cik vien iespējams. Pamatojiet savu izvēli.

36.20. Racionālu skaitli $x=\frac{p}{q}$ pārveido par $\frac{x-1}{2}$, ja $x\geq 1$, un par $\frac{2x}{1-x}$, ja $0\leq x<1$. Ar iegūto rezultātu dara to pašu, utt.

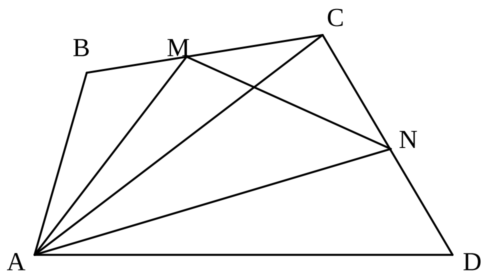
Pierādiet: ja $\frac{p}{q}>0$, tad šādā ceļā no $\frac{p}{q}$ var iegūt tikai galīgu skaitu dažādu skaitļu.

8. klase

34.21. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x^2 + 3xy + y^2 = 79. \end{cases}$$

34.22. Izliektā četrstūrī *ABCD* punkts *M* ir malas *CD* viduspunkts, bet punkts *N* ir malas *CD* viduspunkts. Pierādīt, ka trijstūra *AMN* laukums mazāks par pusi no *ABCD* laukuma. (Skat. 34.2. zīm.).



34.1. zīm.

34.23. *ABCD* -- taisnstūris, *P* -- punkts tā iekšpusē. Pierādīt, ka

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2.$$

34.24. Dots, ka $a > b > 0$ un $a^2 + b^2 = 14ab$.
Izsacīt $\sqrt{3}$ ar naturālu skaitļu *a* un *b* palīdzību, izmantojot jebkurā Jums vajadzīgajā daudzumā četru aritmētisko darbību zīmes un iekavas.

34.25. Augoša ģeometriska progresija sastāv no 10 locekļiem. Zināms, ka visi tās locekļi ir lielāki par 500, mazāki par 20000 un ir veseli skaitļi.

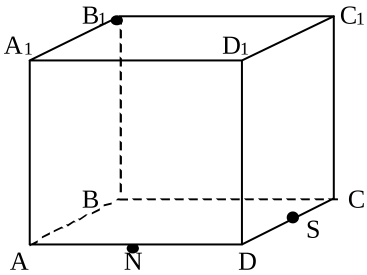
a) pierādīt, ka kvocients nav vesels skaitlis,

b) atrast kaut vienu tādu progresiju,

c) noskaidrot, cik tādu progresiju ir.

9. klase

34.26. Kuba $ABCDA_1B_1C_1D_1$ šķautnes AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 ir paralēlas; *ABCD* ir kuba skaldne. Konstruēt šķēlumu, kas iet caur B_1 un šķautņu AA_1 un *CD* viduspunktiem. Skat. 34.2. zīm.



34.2. zīm.

34.27. Kādam trīsciparu veselam skaitlim vienlaicīgi piemīt trīs sekojošas īpašības?

a) tas nesatur ciparu 9,

b) tas ir vesela skaitļa kvadrāts,

c) palielinot katru ciparu par 1, atkal iegūst trīsciparu skaitli, kas ir vesela skaitļa kvadrāts.

34.28. Vai eksistē tāds ķermenis, kuru ar paralēliem stariem var projicēt plaknē gan par četrstūri, gan par sešstūri, bet nevar projicēt par piecstūri? Pamatojiet savus apgalvojumus.

34.29. Funkcija $f(t)$ definēta visiem $t \geq 0$, un katram $x \geq 0$ un katram $y \geq 0$ pastāv vienādība

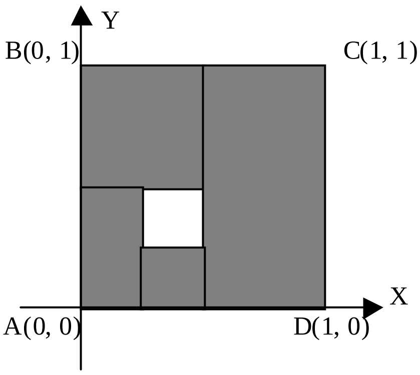
$$f(x) \cdot f(y) = f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

a) Kādas vērtības var pieņemt $f(x)$?

b) Kādas nepārtrauktas funkcijas $f(x)$ apmierina uzdevuma nosacījumus?

c) Vai eksistē kaut viena funkcija, kas kaut vienā punktā ir pārtraukta un apmierina uzdevuma nosacījumus?

34.30. Koordinātu sistēmā *Oxy* aplūkojam kvadrātu, kura virsotņu koordinātes ir $(0;0), (0;1), (1;0), (1;1)$. Novelkam kvadrātam vertikālo simetrijas asi un kvadrāta daļu pa labi no tās nokrāsojam melnu. Atlikušajai nenokrāsotajai daļai novelkam horizontālo simetrijas asi un daļu virs tās nokrāsojam melnu. Atlikušajai nenokrāsotajai daļai novelkam vertikālo simetrijas asi un daļu pa kreisi no tās nokrāsojam melnu. Atlikušajai nenokrāsotajai daļai novelkam horizontālo simetrijas asi un daļu virs tās nokrāsojam melnu. (Skat.34.3. zīm.) Ar atlikušo balto kvadrātu izdara tādu pašu operāciju, ar atlikušo -- atkal, utt. Atrast tā punkta koordinātas, ap kuru "savelkas" pakāpeniski iegūstamo kvadrātu virkne.



34.3. zīm.

10. klase

34.31. Pierādīt, ka visiem α un β pastāv vienādība

$$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta .$$

34.32. a) Vai var būt, ka $\mathrm{tg}\alpha$ ir racionāls, bet $\mathrm{tg}2\alpha$ -- iracionāls skaitlis?

b) Vai var būt, ka $\mathrm{tg}\alpha$ ir iracionāls, bet $\mathrm{tg}2\alpha$ -- racionāls skaitlis?

34.33. Kvadrāta *ABCD* virsotnes atrodas vienā pusē no plaknes π; *ABCD* ortogonāla projekcija plaknē π ir kvadrāts.

Pierādīt, ka virsotnes *A, B, C* un *D* atrodas vienādos attālumos no plaknes π.

34.34. *M* ir punkts uz parabolas -- funkcijas $y=x^2$ grafika. *N* ir punkts uz taisnes -- funkcijas $y=x-4$ grafika. Atrast *MN* mazāko iespējamo vērtību.

34.35. Pierādīt, ka eksistē

a) divciparu,

b) trīsciparu,

c) desmitciparu,

d) *n*-ciparu $(n\ge 1)$ skaitlis *A* ar īpašību: skaitļu *A* un 2*A* ciparu summas ir vienādas.

11. klase

34.36. Vai eksistē tāds x, ka $0 < \sin x < \frac{1}{10}$ un $\sin 3x > \frac{1}{3}$?

34.37. Izliektam daudzskaldnim ir n skaldnes, un tās visas ir trijstūri. Kāda var būt n vērtība?

34.38. Izliektā četrstūrī $ABCD$ diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras.

a) pierādīt, ka malu viduspunkti atrodas uz vienas riņķa līnijas,

b) pierādīt, ka uz šīs pašas riņķa līnijas atrodas arī katras malas viduspunkta ortogonālā projekcija uz pretējās malas.

34.39. Dots, ka p, q, $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ ir racionāli skaitļi. Pierādīt, ka arī $\sqrt{p}$ un $\sqrt{q}$ ir racionāli skaitļi.

34.40. Ar $[a]$ apzīmējam skaitļa a veselo daļu. Definējam skaitļu virkni a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ ar formulu

$$a_n = \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] + n.$$

a) Vai skaitlis 10 ir šīs virknes loceklis?

b) Vai skaitlis 100 ir šīs virknes loceklis?

c) Uzrādīt bezgalīgi daudzus naturālus skaitļus, kas nav šīs virknes locekļi.