Materiāls ņemts no grāmatas:Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 36. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

36.1. Aplūkosim četrciparu skaitli $\overline{abcd}$. Pirmo ciparu a var izvēlēties četros veidos; otro -- trīs veidos; trešo -- divos veidos; pēdējais ir viennozīmīgi noteikts.
Tātad var izveidot $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ šādus skaitļus.

36.2. Tā kā $\frac{3200}{200} = 16$, tad kopā jābūt 16 iekšējiem kvartālu malu nogriežņiem.

Ciema izmēri var būt šādi:

a) 1×12; tad veidojas 11 iekšējie nogriežņi;

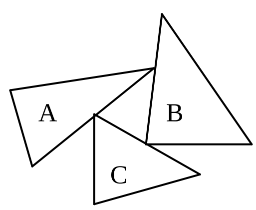
b) 2×6; tad veidojas 16 iekšējie nogriežņi;

c) 3×4; tad veidojas 17 iekšējie nogriežņi.

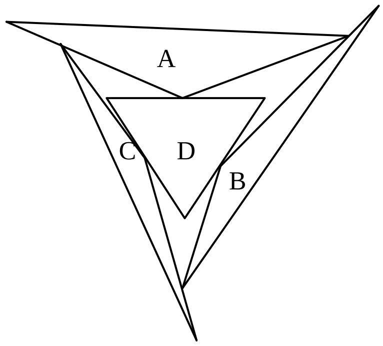
Tātad ciems sadalīts 2×6 kvartālos, un tā perimetrs sastāv no $2 \cdot (2+6) = 16$ nogriežņiem; tātad šosejas garums ir $16 \cdot 200 = 3200$ m.

36.3. a) un b) punktos to var izdarīt (skat. 36.3. un 36.4. zīm.).

c) gadījumā to nevar izdarīt, jo viens trijstūris A nevar balstīties uz vairāk kā trim trijstūriem, jo tam ir tikai 3 virsotnes.

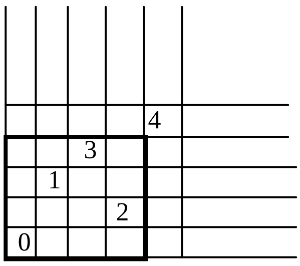


36.3. zīm.



36.4. zīm.

36.4. Pirmos četrus gājienus zirdziņš izdara tā, kā parādīts 36.5. zīm.



36.5. zīm.

Tagad katrā no pirmajām četrām rindām un kolonnām zirdziņš atradies vienu reizi un atrodas kvadrāta stūrī, kura izmēri ir 996×996. Turpinot apgaitu šādā veidā, iegūsim prasīto.

36.5. a) Dotajā izteiksmē ir pieci nepāra skaitļi; tātad kopējā summa būs nepāra skaitlis, un tas nevar būt vienāds ar 30.

b) To var izdarīt, piemēram, tā:

$$1+2-3-4+5+6+7+8+9=31.$$

36.6. a) Ja visus skaitļus (to skaits ir n) pabīdīja par 3 vienībām pa labi, tad ieguvām summu $243+3n$. Ja $243+3n=1986$, tad $n=\dfrac{1986-243}{3}=581$.

Ja izvēlēsimies 581 punktu, tad iegūsim prasīto.

b) Šajā gadījumā iegūstam vienādību $243+3n=1987$; bet tādā gadījumā $n=\dfrac{1987-243}{3}=581\frac{1}{3}$ nav vesels skaitlis; pretruna. Tātad tas nav iespējams.

36.7. No 95 bērniem, kas ir bijuši Rīgā vismaz $85-5=80$ ir bijuši Liepājā, vismaz $75-5=70$ ir bijuši Cēsīs un vismaz $65-5=60$ ir bijuši Ventspilī.

Tagad aplūkosim tikai tos 80 bērnus , kas ir bijuši Rīgā un Liepājā. No šiem 80 bērniem vismaz $70-15=55$ ir bijuši Cēsīs un vismaz $60-15=45$, kas bijuši Ventspilī.

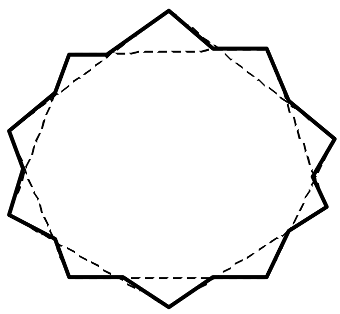
Tagad aplūkosim tos 55 bērnus, kas bijuši gan Rīgā, gan Liepājā gan Cēsīs; no tiem vismaz $45-10=35$ bērni ir bijuši visās četrās pilsētās.

36.8 Uzrakstīsim šo skaitļu virkni:

$a_1=37,\quad a_2=314,\quad a_3=318,$
$a_4=3116,\quad a_5=31112,\quad a_6=61112,$
$a_7=121112,\quad a_8=141114,\quad a_9=181118,$
$a_{10}=11611116,\quad a_{11}=1112111112,\quad a_{12}=1114111114,\quad a_{13}=1118111118,$
$a_{14}=111161111116,\quad a_{15}=11111211111112,\ldots$

Mums ir jāaprēķina cik ciparu ir skaitlim a_{1001}. Ievērosim, ka sākot ar a_{10} izpildās īpašība: skaitļu virknes indeksam palielinoties par 4, tā ciparu skaits palielinās par 4. Tā kā skaitlim a_{11} ir 10 ciparu, tad skaitlim a_{1001} ir 1000 ciparu.

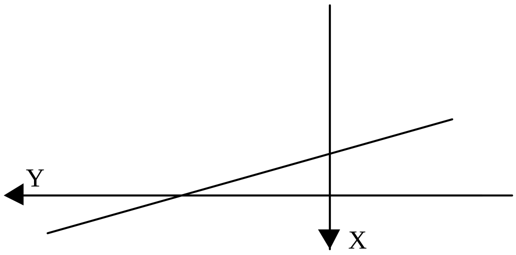
36.9. Jā, tāds divdesmitstūris eksistē; skat. 36.5. zīm.



36.5. zīm.

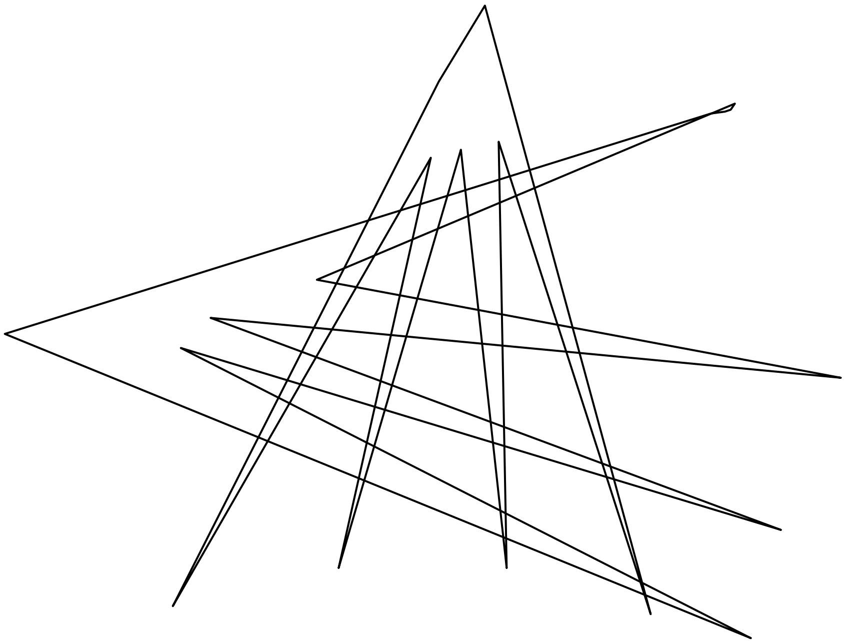
36.10. Rūtiņas iekrāsosim šahveida kārtībā; tad žirafe vienmēr pāriet uz savas krāsas lauciņu un nevar nonākt rūtiņā, kurai ir kopīga mala ar sākotnējo.

36.11. Atjaunotais zīmējums parādīts 36.6. zīm.



36.6. zīm.

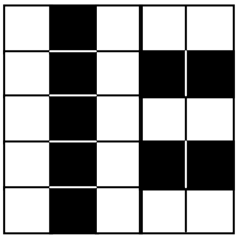
36.12. Skat. 36.7. zīmējumu,



36.7. zīm.

36.13. Atņemot no skaitļa tā ciparu summu iegūstam skaitli, kas dalās ar 9. Ja skaitlis nav viencipara, tad tā ciparu summa ir mazāka par pašu skaitli; tātad iegūt nulli var iegūt tikai no viencipara skaitļa, un rezultātā šajā virknē būs viencipara skaitlis, kas dalās ar 9 -- tātad tas būs skaitlis 9.

36.14. To var izdarīt, piemēram, kā parādīts 36.8. zīm.



36.8. zīm.

36.15. a) Jā, var iegūt skaitli 1. Ja mēs pirmo operāciju pielietojam skaitļiem *n* un $n-1$, tad iegūstam skaitļu kopu 1, 2, …, *n*-1. Atkārtojot šo operāciju ar skaitļiem $n-1$ un $n-2$, iegūstam skaitļu kopu 1, 2.,…, *n*-2. Atkārtojot šīs operācijas, iegūstam skaitli 1.

Sākot izpildīt šīs operācijas no otra gala, mēs iegūsim skaitli $n-1$. Lielāku skaitli iegūt nevar, jo nevar iegūt otru skaitli n , kas būtu vajadzīgs pēdējās operācijas izpildei..

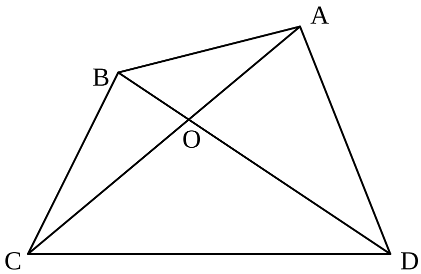
36.16. Apzīmēsim $\frac{1}{x}=u$ un $\frac{1}{y}=v$. Iegūsim lineāru vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} 3u+4v=11 \\ 4u+5v=14 \end{cases} \Rightarrow 4\cdot(3u+4v)-3\cdot(4u+5v)=4\cdot 11-3\cdot 14 \quad \Rightarrow$$

$$v=2, u=1.$$

Tātad $x=1$ un $y=\frac{1}{2}$.

36.17. Aplūkosim četrstūri *ABCD* (skat. 36.9. zīm.).



36.9. zīm.

No trijstūra malu nevienādības seko, ka

$$AC+BD=(AO+OD)+(BO+OC)>AD+BC.$$

Taču $AC+BD=9+11=8+12=BC+AD$; pretruna. Tātad šāds četrstūris neeksistē.

36.18. Nē, tā nevar būt. Kopā komandas izspēlējušas $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ spēles un saņēmušas 45 punktus. Ja četras komandas ir kopā ieguvušas *n* punktus, tad pārējās sešas $n - 4$ punktus. Tātad $n + (n-4) = 45 \quad \Rightarrow \quad 2n = 49 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{49}{2}$. Tā ir pretruna, jo *n* jābūt veselam skaitlim.

36.19. No Pitagora teorēmas seko, ka mums jāatrod cik atrisinājumu veselos skaitļos ir vienādojumam $x^2 + y^2 = 1985$. Šim vienādojumam ir 8 atrisinājumi:

$$(\pm 31, \pm 32), (\pm 32, \pm 31).$$

36.20. a) Šis skaitlis dalās ar 2; tātad nav pirmskaitlis.
b) No kongruences $2^{1986} + 1985 \equiv (-1)^{1986} + 2 \equiv 1 + 2 \equiv 0 \pmod 3$ seko, ka dotais skaitlis dalās ar 3; tātad nav pirmskaitlis.

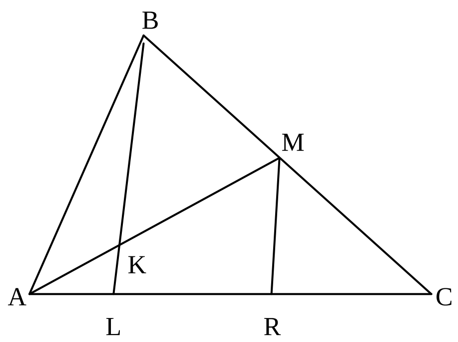
36.21. Šī ir funkcija $y = x^2 + px + q$. Tā kā tās grafiks iet caur punktiem (1, 1) un $(2, 2)$, tad iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 1 = 1 + p + q \\ 2 = 4 + 2p + q. \end{cases}$$

No šejienes iegūstam $p = -2$, $q = 2$.

36.22. Katru divu doto skaitļu summa lielāka par jebkuru citu. Tāpēc *a*, *b*, *c* var uzskatīt par viena trijstūra malu garumiem, bet *d*, *e*, *f* -- par otra trijstūra malu garumiem.
Tad apskatāmās izteiksmes ir abu trijstūru leņķu divkāršoti kosīnusi. Ja viena trijstūra visu leņķu kosīnusi būtu lielāki par otra trijstūra visu leņķu kosīnusiem, tad pirmā trijstūra visi leņķi būtu mazāki par otrā trijstūra visiem leņķiem, kas nav iespējams, jo katra trijstūra leņķu summa ir $180°$.

36.23. Aplūkosim 36.2. zīmējumu.



36.2.zīm.

Novelkam $MR||BL$. No Talesa teorēmas seko vienādības

$$\frac{AL}{LR}=\frac{AK}{KM}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{LR}{RC}=\frac{BM}{MC}=1 \quad \Rightarrow \quad LC=2\cdot LR \quad \Rightarrow$$

$$\frac{AL}{LC}=\frac{AL}{2\cdot LR}=\frac{1}{4}.$$

36.24. Pakāpeniski pārveidojot, iegūstam

$$\frac{x^2+y^2+2}{1+x^2+y^2+x^2+x^2y^2}=\frac{2}{1+xy} \quad \Rightarrow$$

$$2+2x^2+2y^2+2x^2y^2=x^2+y^2+2+x^3y+xy^3+2xy \quad \Rightarrow$$

$$x^3y+xy^3-x^2-y^2=2x^2y^2-2xy \quad \Rightarrow$$

$$xy\left(x^2+y^2\right)-\left(x^2+y^2\right)=2xy(xy-1) \quad \Rightarrow$$

$$(x-y)^2(xy-1)=0.$$

Tā kā $x \neq y$, tad $xy=1$.

36.25. Pakāpeniski atrodam

$$a_2=a_{a_1}=2\cdot 1+1=3$$

$$a_3=a_{a_2}=2\cdot 2+1=5$$

$$a_5=a_{a_3}=2\cdot 3+1=7$$

$$a_7=a_{a_5}=2\cdot 5+1=11$$

$$a_{11}=a_{a_7}=2\cdot 7+1=15$$

$$a_{15}=a_{a_{11}}=2\cdot 11+1=23$$

$$a_{23}=a_{a_{15}}=2\cdot 15+1=31$$

$$a_{31}=a_{a_{23}}=2\cdot 23+1=47$$

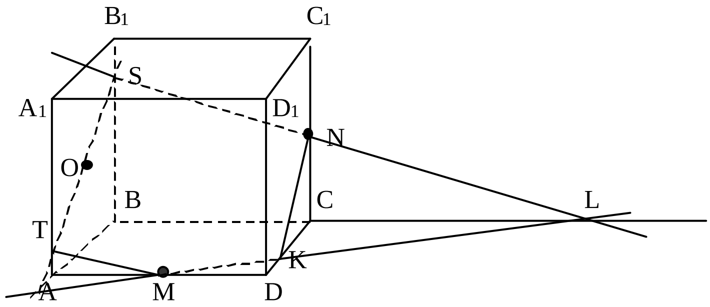
$$a_{47}=a_{a_{31}}=2\cdot 31+1=63.$$

Starp a_{31} un a_{47} atrodas 15 virknes locekļi. Starp 47 un 63 atrodas 15 naturāli skaitļi.

Tā kā virknes locekļi ir naturāli skaitļi, un virkne ir augoša, tad

$$a_{32}=48,\ a_{33}=49,\ldots,\ a_{40}=56.$$

36.26. . Skat. 36.3. zīm.



36.3. zīm.

Apzīmēsim šķēlējplakni ar α, bet plakni, kas iet caur AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 viduspunktiem -- ar β. Tā kā $\beta // ABCD$, tad α šķēluma līnijas ar β un *ABCD* ir paralēlas. Bet α šķēluma līnija ar β ir taisne *ON*. Tātad taisne *t*, kas vilkta caur *M* paralēli *ON*, ir α šķēluma līnija ar *ABCD*. Tālākā konstrukcijas gaita:

$K = t \cap CD,$

$L = t \cap BC,$

$S = LN \cap BB_1$

$T = SO \cap AA_1.$

Meklējamais šķēlums ir *MKNST*.

36.27. Nevienādību pārveidojam formā

$$\frac{(x+1)(x-3)^3\sqrt{5-x}}{(x-2)(x-3)} \geq 0.$$

Ievērosim, ka $x \leq 5$ un $x \neq 3$. Tālāk nevienādību pārveidojam šādi:

$$\frac{(x+1)(x-3)^2}{x-2} \geq 0.$$

Risinot ar intervālu metodi un ievērojot iepriekšējās nevienādības, iegūstam:

$$x \in (-\infty, -1] \cup (2, 3) \cup (3, 5].$$

36.28. No dotā seko, ka

$$f(x, y, z) = 2f(z, x, y) = 4f(y, z, x) = 8f(x, y, z) \quad \Rightarrow$$

$$7f(x, y, z) = 0.$$

Pārbaude parāde, ka funkcija $f(x, y, z) = 0$ apmierina uzdevuma nosacījumus, un citu šādu funkciju nav.

36.29. Ievērosim, ka

$$f(x)' = \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^n\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}.$$ Tātad

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}. = \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^n\right)' = \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)' =$$

$$\frac{(n+1)x^n(x-1) - \left(x^{n+1} - 1\right)}{(x-1)^2}.$$

36.30. Sešas summas var būt vienādas ar 0; piemēram, ja $a = 2$, bet $b = c = d = e = 0$, tad

$$a + b + c = a + b + d = a + b + e = a + c + d = a + c + e = a + d + e = 0.$$

Pieņemsim, ka septiņas summas ir 0. Tās pavisam satur 21 saskaitāmo. Tātad vismaz viens saskaitāmais --, piemēram, a sastopams vismaz piecās no šīm summām. Apskatīsim visas sešas summas, kas satur a.

$$a + b + c \qquad a + c + d$$
$$a + b + d \qquad a + c + e$$
$$a + b + e \qquad a + d + e.$$

Piecas no tām ir vienādas ar 0. Acīmredzami visi varianti ir līdzvērtīgi. Pieņemsim, ka

$$a + b + c = a + b + d = a + b + e = a + c + d = a + c + e = 0.$$

No pirmo triju summu vienādības seko, ka $c = d = e$; tālāk no vienādības $a + b + e = a + c + d$ seko, ka $c = d = e = b$. Apzīmēsim $c = d = e = b = x$; tad $a = -2x$. Tādā gadījumā sešu summu vērtība ir 0, bet četru summu vērtība ir 3*x*. Lai septiņas summas būtu nulle, jābūt $x = 0$; bet tad visi skaitļi ir nulles. Tā ir pretruna; tātad septiņas no apskatāmajām summām nevar būt vienādas ar nulli.

36.31. Kāpinot doto vienādību kvadrātā, iegūstam

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha + 2\sin\beta\cos\beta + \cos^2\beta \quad \Rightarrow$$
$$1 + \sin 2\alpha = 1 + \sin 2\beta \quad \Rightarrow \quad \sin 2\alpha = \sin 2\beta.$$

36.32. Ja $n = 2$, tad $n^3 + 9 = 17$ arī ir pirmskaitlis.

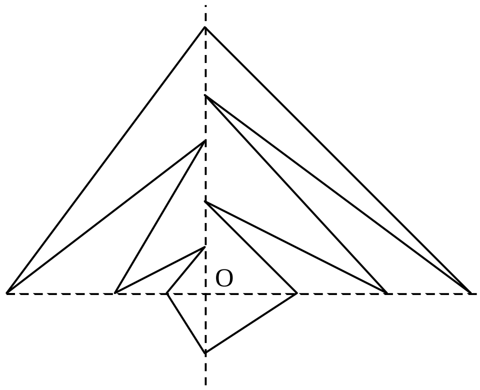
Ja $n > 2$, tad *n* ir nepāra skaitlis ; bet tādā gadījumā $n^3 + 9$ ir pāra skaitlis, kas lielāks par 2, tātad nav pirmskaitlis.

36.33. Novelkam caur *t* un *s* paralēlas plaknes α un β; ar OO_1 apzīmējam *t* un *s* kopīgā perpendikula galapunktus, ar A_1 un B_1 -- punktu *A* un *B* ortogonālās projekcijas plaknē β, ar A_2 un B_2 -- punktu *A* un *B* ortogonālās projekcijas uz taisnes *s*.

Pēc triju perpendikulu teorēmas $A_1A_2 \perp s$ un $B_1B_2 \perp s$. Taisnleņķa trijstūros AA_1A_2 un BB_1B_2 ir vienādas hipotenūzas AA_2 un BB_2, kā arī katetes AA_1 un BB_1; tāpēc arī

$A_1A_2 = B_1B_2$. Tāpēc taisnleņķa trijstūri $O_1A_2A_1$ un $O_1B_2B_1$ ir kongruenti (pēc katetes un šaurā leņķa). Tāpēc $O_1A_1 = O_1B_1$, bet tad arī $OA = OB$.

36.34. Jā, var atrast. Tādas lauztas līnijas konstruēšanas shēmu skat. 36.4. zīmējumā; te katrai taisnei ir tieši 6 kopīgi punkti ar lauzto līniju.



36.4. zīm.

36.35. Ja a -- patvaļīgs skaitlis, tad

$$\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 * \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+1}{2}+\frac{a-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+1}{2}*\frac{a-1}{2}\right) =$$

$$a\cdot\left(\left(1+\frac{a-1}{2}\right)*\left(0+\frac{a-1}{2}\right)\right) = a\cdot(1*0) = a\cdot 1 = a.$$

Tātad

$$\left(\frac{a^2+1}{4}+\frac{a}{2}\right)*\left(\frac{a^2+1}{4}-\frac{a}{2}\right) = a.$$

jeb, pēc b) īpašības

$$x*y = \left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)*\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right) =$$

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)*\left(-\frac{x-y}{2}\right) = x-y,$$

ko arī vajadzēja aprēķināt.

36.36. Skaidrs, ka plakne var šķelt 6 kuba šķautnes. Ja tā krustotu vairāk par 6 šķautnēm, tad krustojumā veidotos daudzstūris ar vairāk kā 6 malām, jo katrā vietā, kur plakne krusto šķautni, daudzstūrim ir virsotne.

Bet kubam ir tikai 6 skaldnes; uz katras no tām var būt tikai viena šķēluma daudzstūra mala. Tātad daudzstūrim nevar būt vairāk par 6 malām.

36.37. Ievērosim, ka $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)=x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2$. Tāpēc

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\int_{x_1}^{x_2} x^2dx-(x_1+x_2)\int_{x_1}^{x_2} xdx+x_1x_2\int_{x_1}^{x_2} dx=$$

$$\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x_1}^{x_2}-(x_1+x_2)\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x_1}^{x_2}+x_1x_2\cdot x\Bigg|_{x_1}^{x_2}=$$

$$\frac{x_2^3-x_1^3}{3}-(x_1+x_2)\frac{x_2^2-x_1^2}{2}+x_1x_2(x_2-x_1)=$$

$$\frac{1}{6}(x_1-x_2)^3.$$

36.38. Ja $n=1$, tad iegūstam

$\cos x-\sin^2 x=1$

$\cos x-(1-\cos^2 x)=1$

$\cos^2+\cos x-2=0$

$a)$ $\cos x=1;\quad x=2\pi k\ (x\in Z)$

$b)$ $\cos x=-2;$ neder.

Ja $n\geq 2$, pārrakstām vienādojumu formā

$\cos^n x-\sin^n x=\cos^2 x+\sin^2 x$

$(\cos^2-\cos^n x)+(\sin^2 x+\sin^n x)=0.$ (*)

Tā kā $0\leq|\cos x|\leq 1$ un $0\leq|\sin x|\leq 1$, tad

$\cos^2 x\geq\cos^n x$ un $\sin^2 x\geq-\sin^n x$.

Vienādība (*) iespējama tikai tad, ja

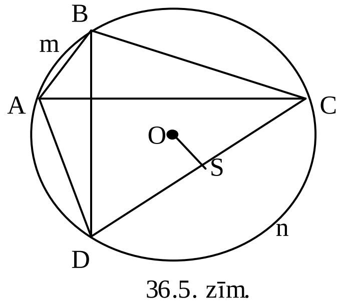
$\cos^2 x=\cos^n x$ un $\sin^2 x+\sin^n x=0$;

t.i. tikai tad, ja $\sin x=0$ vai $\sin x=\pm 1$. Analizējot visas iespējas, iegūstam atbildi:

$x=2\pi k\ (k\in Z)$, ja n ir nepāra skaitlis;

$x=\pi k\ (k\in Z)$, $x=2\pi k+\dfrac{3\pi}{2}\ (k\in Z)$, ja n -- nepāra skaitlis.

36.39. Apzīmēsim riņķa rādiusu ar R , bet $\angle ACB=\alpha$.



36.5. zīm.

No sīnusu teorēmas $AB = 2R\sin\alpha$. Tā kā $AC \perp BD$, tad $\angle DBC = 90° - \alpha$. Tad loka *DnC* leņķiskais lielums ir $\angle COD = 180° - 2\alpha$; tāpēc $\angle COS = 90° - \alpha$. Bet tad $OS = OC \cdot \cos(90° - \alpha) = R\sin\alpha = \frac{1}{2}AB$, ko arī vajadzēja pierādīt.

36.40. Doto vienādību var pārveidot formā

$$a_{n+1}^2 = \frac{a_n^2 + a_{n+2}^2}{2}.$$

Tātad naturālu skaitļu kvadrāti $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots$ veido aritmētisku progresiju. Tā kā kvadrāti nav negatīvi, tad progresija ir konstanta vai augoša. Pierādīsim, ka tā nav augoša. Tad tā ir konstanta, tātad $a_{1986} = a_1 = 1$.

Pieņemsim pretējo, ka progresija $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots$ ir augoša ar diferenci *d*. Atradīsies tāds a_k, ka $a_k > d$. Tāpēc

$$a_{k+1}^2 - a_k^2 \geq (a_k + 1) - a_k^2 = 2a_k + 1 > d.$$

Bet jābūt $a_{k+1}^2 - a_k^2 = d$. Iegūtā pretruna pierāda, ka progresija nevar būt augoša.