Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

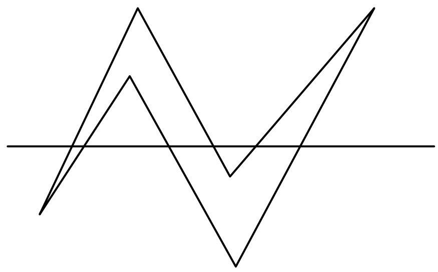
LATVIJAS RAJONU 39. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

39.1. Ir jāaprēķina 100-ais loceklis aritmētiskā progresijā, kuras pirmais loceklis ir 15 un otrais 40. Tātad diference ir 25. Tas nozīmē, ka 100-ais loceklis būs vienāds ar $15+(100-1)\cdot 25=2490$.

39.2. a) Nē, nevar. Pieņemsim pretējo, ka tas ir iespējams. Dotā piecstūra virsotnes apzīmēsim ar *ABCDE*. Taisne sadala plakni divās pusplaknēs (sauksim tās par pirmo un otro). Ja taisne krusto visas piecstūra malas un punkts *A* atrodas pirmajā pusplaknē, tad punktam *B* jāatrodas otrajā pusplaknē, punktam *C* -- pirmajā pusplaknē, punktam *D* -- otrajā pusplaknē, punktam *E* -- pirmajā pusplaknē. Bet tad taisne nekrusto malu *AE*. Pretruna.

b) Jā , var. Skat. 39.5. zīm.

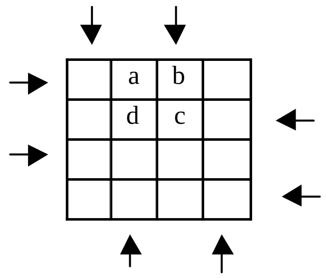


39.5. zīm.

39.3. Iegūtais skaitlis ir vienāds ar $\overline{AA}=A\cdot 101$. Ievērosim, ka skaitlis 101 ir pirmskaitlis. Tātad skaitļa $\overline{AA}$ dalītāji ir visi skaitļa *A* dalītāji un šie dalītāji, pareizināti ar 101. Tātad kopējais dalītāju skaits ir 12.

39.4. Baltus iekrāsosim taišņu (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (4, 5) krustpunktus; pārējos krustpunktus iekrāsojam melnus. Tad uz katras taisnes atradīsies 2 balti un 2 melni punkti.

39.5. Nē, nevar (skat. 39.6. zīm.).



39.6. zīm.

Aplūkosim skaitļus a, b, c, d. Tad no dotā seko, ka $a < b < c < d < a$, bet tā ir pretruna.

39.6. Punkts atrodas otrajā kvadrantā.

39.7. Ja kaut vienā no vienādībām (piemēram $|x| = |y+z|$) skaitļu zīmes ir pretējas, tad uzreiz iegūstam prasīto vienādību: $-x = y + z \Rightarrow x + y + z = 0$.
Ja visās vienādībās skaitļu zīmes ir vienādas, tad $x = y + z,\ y = x + z,\ z = x + y$; saskaitot šīs vienādības, iegūstam prasīto.

39.8. Katru reizi no jauna uzrakstīto skaitļu reizinājums ir iepriekš uzrakstīto skaitļu reizinājuma kvadrāts; tātad vienāds ar 1. Tas nozīmē, ka visu skaitļu reizinājums nemainās un visu laiku ir negatīvs.

39.9. Ja $10a + b$ dalās ar 7, tad arī
$(10a + b) - 7(a + b) = 3(a - 2b)$ dalās ar 7; līdz ar to $a - 2b$ dalās ar 7.
Ja $a - 2b$ dalās ar 7, tad
$3(a - 2b) + 7(a + b) = 10a + b$ dalās ar 7.

39.10. Pavisam ir 21 līnija. Lai ar vienas krāsas autobusiem varētu aizbraukt no katras pilsētas uz katru, vajag vismaz 6 līnijas. Tāpēc vairāk par 3 krāsām nevar būt. Ar 3 krāsām uzdevuma nosacījumi ir realizējami:

$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \leftrightarrow D \leftrightarrow E \leftrightarrow F \leftrightarrow G \leftrightarrow A$ 1. krāsa,

$A \leftrightarrow C \leftrightarrow E \leftrightarrow G \leftrightarrow B \leftrightarrow D \leftrightarrow F \leftrightarrow A$ 2. krāsa,

$\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{D} \leftrightarrow \mathrm{G} \leftrightarrow \mathrm{C} \leftrightarrow \mathrm{F} \leftrightarrow \mathrm{B} \leftrightarrow \mathrm{E} \leftrightarrow \mathrm{A}$ 3. krāsa.

39.11. Atverot iekavas un savelkot līdzīgos locekļus, iegūstam vienādojumu

$$23x + 17 = 0.$$

Atbilde: $x = -\frac{17}{23}$.

39.12. Ja $x \geq y$, tad $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)=\frac{1}{2}(x+y+x-y)=x=\max(x,y)$.

Ja $x<y$, tad $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)=\frac{1}{2}(x+y-x+y)=y=\max(x,y)$.

Formula, kas izsaka mazāko no skaitļiem ir šāda: $\frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$. Pierādījums ir analoģisks iepriekšējam.

39.13. Tāds leņķis izveidoties nevar.

Starp novilktajiem stariem jebkurš leņķis ir vienāds ar $\frac{90°}{2^n}\cdot k, \quad k,n \in N$.

No vienādības $\frac{90°}{2^n}\cdot k=30°$ seko vienādība $3k=2^n$, bet šī vienādība nav iespējama, jo 2^n nedalās ar 3.

39.14. Veidojas šāda skaitļu virkne:

11, 2, 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4, …

Tā ir periodiska ar perioda garumu 8. Tā kā $1989=8\cdot 248+5$, tad 1989-ais skaitlis būs vienāds ar piekto skaitli, tātad ar 37.

39.15. Neatkarīgi no skaitļu izvietojuma aplūkojamā summa ir mazāka par

$$(1+3+5+7+9)\cdot(2+4+6+8)=25\cdot 20=500.$$

39.16. Ievērojam, ka $\left(10^5\right)^2=10\,000\,000\,000<10\,000*00\,0*1$.

Izpildās vienādība $\left(10^5+1\right)^2=10\,000\,200\,001$.

Ievērosim, ka skaitļu $\left(10^5+2\right)^2$, $\left(10^5+3\right)^2$, $\left(10^5+4\right)^2$ pēdējie cipari nav 1. Tālākie skaitļi ir ne mazāki par

$\left(10^5+5\right)^2=10^{10}+2\cdot 5\cdot 10^5+25>10^{10}+10^6=10\,001\,000\,000>10\,000*00\,0*1$.

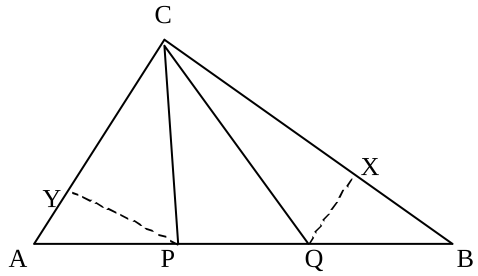
Tātad pirmās zvaigznītes vietā ir jāieraksta cipars 2, bet otrās zvaigznītes vietā -- cipars 0.

39.17. Pieņemsim, ka $\frac{a}{b}=\frac{a+1}{b+1}$. Tad iegūstam

$$\frac{a}{b}=\frac{a+1}{b+1} \quad\Rightarrow\quad a\cdot(b+1)=b(a+1) \quad\Rightarrow$$

$$ab+a=ab+b \quad\Rightarrow\quad a=b \quad\Rightarrow\quad \frac{a}{b}=1.$$

39.18. Aplūkosim 39.7. zīmējumu.



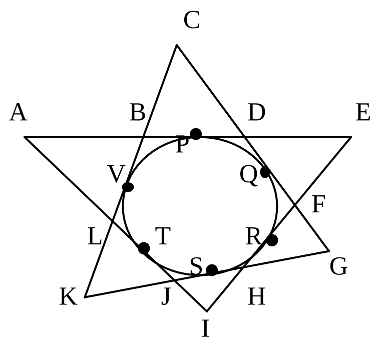
39.7. zīm.

Novilksim perpendikulus PY un QX pret trijstūra katešu malām . Tad no Talesa teorēmas seko, ka $CY = \frac{2}{3} \cdot CA = \frac{2}{3} \cdot b$, $YP = \frac{1}{3} \cdot CB = \frac{1}{3} \cdot a$, $CX = \frac{2}{3} \cdot CB = \frac{2}{3} \cdot a$, $QX = \frac{1}{3} \cdot AC = \frac{1}{3} \cdot b$.

Tālāk, izmantojot Pitagora teorēmu, iegūstam:

$$CP^2 + PQ^2 + CQ^2 = \left(\tfrac{2}{3} \cdot a\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3} \cdot b\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3} \cdot c\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3} \cdot a\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3} \cdot b\right)^2 =$$
$$\tfrac{5}{9} \cdot \left(a^2 + b^2\right) + \tfrac{1}{9} \cdot c^2 = \tfrac{2}{3} \cdot c^2.$$

39.19. Aplūkosim 39.8. zīmējumu.



39.8. zīm

Pieskaršanās punktus apzīmēsim ar P, Q, R, S, T, V.

No teorēmas par pieskaru vienādību iegūstam:

$$AP = AT \quad \Rightarrow \quad AB + BP = AL + LT,$$
$$CF = CV \quad \Rightarrow \quad CD + DQ = CB + BV,$$
$$ER = EP \quad \Rightarrow \quad EF + FR = ED + DP,$$
$$GS = GQ \quad \Rightarrow \quad GH + HS = GF + FQ,$$
$$IT = TR \quad \Rightarrow \quad IJ + JT = IH + HR,$$
$$KV = KS \quad \Rightarrow KL + LV = KJ + JS.$$

Saskaitot šīs vienādības iegūstam

$$\left(AB+CD+EF+GH+IJ+KL\right)+\left(BP+DQ+FR+HS+JT+LV\right)=$$
$$\left(AL+CB+ED+GF+IH+KJ\right)+\left(LT+BV+DP+FQ+HR+JS\right)$$

Izmantojot vēlreiz teorēmu par pieskaru vienādību, iegūstam

$$BV=BP,\ DP=DQ,\ FQ=FR,\ HR=HS,\ JS=JT,\ LT=LV\ /$$

Saskaitot šīs vienādības, iegūstam

$$\left(BP+DQ+FR+HS+JT+LV\right)=$$
$$\left(LT+BV+DP+FQ+HR+JS\right)$$

Atņemot šo vienādību no iepriekšējās vienādības, iegūstam prasīto vienādību

$$\left(AB+CD+EF+GH+IJ+KL\right)=$$
$$\left(AL+CB+ED+GF+IH+KJ\right)$$

39.20. Ja starp doto skaitļu atlikumiem pēc moduļa 7 ir sastopami visi atlikumi no 0 līdz 6, tad šo skaitļu summa pēc moduļa 7 ir vienāda ar

$$0+1+2+3+4+5+6\equiv 0 \pmod 7;$$

tātad dalās ar 7.

Pretējā gadījumā atlikumu skaits nepārsniedz 6. Tā kā $37=6\cdot 6+1$, tad no Dirihlē principa seko, ka atradīsies vismaz 7 skaitļi, kas ir kongruenti pēc moduļa 7. Protams, ka to summa dalīsies ar 7.

39.21. Pieņemsim, ka skaitlis s ir abu vienādojumu kopīgā sakne; tad

$$1989s^2+as+9891=0$$
$$9891s^2+as+1898=0.$$

Atņemot no otrās vienādības otro un izdalot ar $9891-1989$, iegūstam vienādību

$$s^2-1=0\,.$$

Tātad $s=\pm 1$.

Ja $s=1$, tad $1989+a+9891=0 \quad\Rightarrow\quad a=-11880$.

Ja $s=-1$, tad $1989-a+9891=0 \quad\Rightarrow\quad a=11880$.

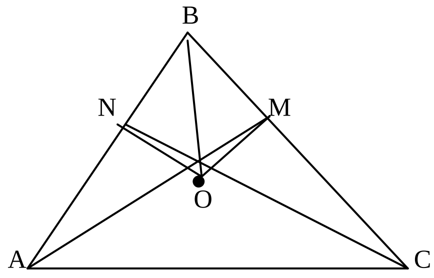
39.22. Tabulu var aizpildīt tā kā parādīts 39.5. zīmējumā.

15	**27**	39	51
10	19	29	**37**
5	11	**17**	23
0	3	6	9

39.5. zīm.

Tabulas augšējā labajā stūrī jāieraksta skaitlis 51.

39.23. Apskatīsim 39.6. zīmējumu.



39.6. zīm.

Ar O apzīmēsim ievilktās riņķa līnijas centru; tad ON un OM ir perpendikuli pret atbilstošajām malām. Taisnleņķa trijstūri ONB un OMB ir vienādi, jo $ON = OM$ un OB kopīga hipotenūza. Tātad $BN = BM$; no dotā $AM = CN$. No šejienes seko trijstūru AMB un CNB vienādība (leņķis B tiem ir kopīgs). Tātad $AB = BC$.

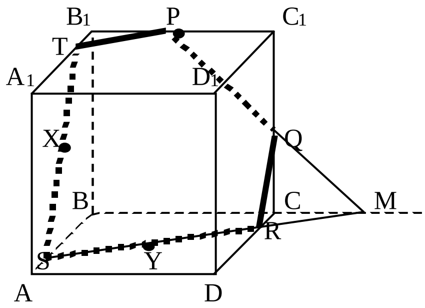
39.24. Pieņemsim, ka ir tikai divu garumu nogriežņi. Septiņus punktus savieno 21 nogrieznis; tātad ir vismaz 11 viena garuma nogriežņi. Tiem ir 22 galapunkti. Tā kā punktu ir 7, tad no kāda punkta *O* iziet vismaz 4 vienāda garuma nogriežņi. To galapunkti *A*, *B*, *C*, *D* atrodas uz riņķa līnijas ar centru punktā *O*. Tā kā starp tiem attālumi var pieņemt tikai divas vērtības, tad tiem jāatrodas kvadrāta virsotnēs. Bet tādā gadījumā attālums *AO* pieņem trešo vērtību. Iegūta pretruna.

39.25. Apzīmēsim dotos skaitļus ar $x_1 < x_2 < \cdots < x_{69}$. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka $x_1 \le 32$. (Ja $x_1 \ge 33$, tad $x_2 \ge 34, x_3 \ge 35, \ldots, x_{69} \ge 101$; tā ir pretruna).

Apskatīsim 67 savā starpā atšķirīgus skaitļus $x_1 + x_2, x_1 + x_3, \ldots, x_1 + x_{68}$ un 67 savā starpā atšķirīgus skaitļus $x_{69} - x_1, x_{69} - x_2, \ldots, x_{69} - x_{68}$.

Tie visi atrodas intervālā no 1 līdz 132. Tā kā aplūkojamo skaitļu kopskaits ir 134, tad kaut kādi divi no tiem ir vienādi; t.i. $x_1 + x_i = x_{69} - x_j$. No šejienes iegūstam prasīto atrisinājumu $x_1 + x_i + x_j = x_{69}$.

39.26. Skat. 39.7. zīm.



39.7. zīm.

Viegli redzēt, ka taisne XY paralēla plaknei BB_1C_1C. Tātad šķēluma līnija PQ Jāvelk paralēli XY (t.i. paralēli CB_1). Apzīmējam $M = PQ \cap BC$. Velkam taisni MY. Tā pieder šķēluma plaknei. Tās krustpunktus ar nogriežņiem AB un CD apzīmējam atbilstoši ar S un R. Velkam taisni SX. Tās krustpunktu ar nogriezni A_1B_1 Apzīmējam ar T.

Prasītais šķēlums ir piecstūris $PQRST$.

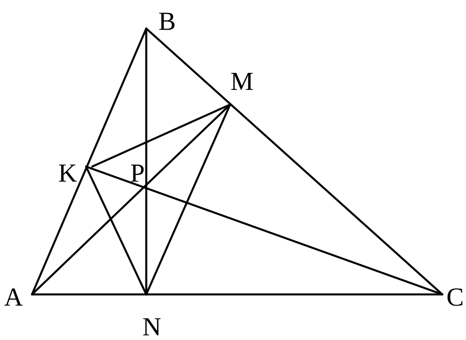
39.27. Jā, var. Ņemsim skaitļus 2, 2^3, $2^5, \ldots, 2^{2\cdot 1989+1}$. Aplūkosim jebkuru šo skaitļu summu $2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_r}$, $k_1<k_2<\cdots<k_r$. Šī summa dalās ar 2^{k_1}, bet nedalās ar lielāku divnieka pakāpi; tātad pirmskaitlis 2 ieiet šajā summā kā reizinātājs nepāra pakāpē, un šī summa nav naturāla skaitļa kvadrāts.

39.28. Aplūkosim vienības vektorus ar koordinātēm

$$(\sin x, \cos x), (\sin y, \cos y), (\sin z, \cos z).$$

To summa ir nulles vektors; tātad šie vektori veido regulāra trijstūra kontūru, un leņķi starp tiem ir $120°$.

39.29. Aplūkosim 39.8. zīmējumu.



39.8. zīm.

Tā kā $AKMC$ -- ievilkts četrstūris, tad $\angle BKM = 180° - \angle AKM = \angle ACM$. Līdzīgi pierāda, ka $\angle AKN = \angle ACM$. No ievilkto leņķu īpašības seko, ka $\angle NKC = \angle NBC$ un $\angle MKC = \angle MAC$.

No teorēmas par krustojošos hordu nogriežņu reizinājumiem seko vienādības

$$AP \cdot PM = CP \cdot PK \text{ un } CP \cdot PK = BP \cdot PN.$$

Tātad $AP \cdot PM = BP \cdot PN$ un $\frac{AP}{PN} = \frac{BP}{PM}$; tāpēc trijstūri APN un BPM ir līdzīgi un $\angle PAN = \angle PBM$. No šejienes $\angle AKC = \angle BKC = 90°$ un CK ir augstums.

Tā kā $\angle PAN = \angle PKN$, tad ap četrstūri $AKPN$ var apvilkt riņķa līniju; tāpēc $\angle ANP = 180° - \angle AKP = 90°$ un arī BN ir augstums.

Līdzīgi pierāda, ka AM ir augstums.

39.30. Ar a_n apzīmēsim, cik komandas var izveidot, ja rindā stāv n studenti (ieskaitot tukšu komandu). Tad redzam, ka $a_1 = 2, a_2 = 3$.

Pieņemsim, ka rindā stāv n studenti: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Aplūkosim komandas, kurās nepiedalās x_n. Tā kā atlikuši $n-1$ studenti, tad šādu komandu skaits ir a_{n-1}. Komandas, kurās iekļauts x_n, nevar piedalīties x_{n-1}; tātad šādu komandu skaits ir a_{n-2}. No šejienes iegūstam rekurentu sakarību

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Tālāk pakāpeniski izrēķinām:

$$a_3 = 2+3 = 5,\ a_4 = 3+5 = 8,\ a_5 = 5+8 = 13, \ldots,\ a_{12} = 144 + 233 = 377.$$

Tā kā tukšo komandu mēs neieskaitām, tad atbilde ir 376.

39.31. Dotās funkcijas atvasinājums ir funkcija $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Ja $a \neq 0$, tad tai ir ne vairāk kā divas saknes; tātad $a = 0$. Iegūstam funkciju

$$y' = 2bx + c.$$

Ja $b \neq 0$, tad tai ir tikai viena sakne; tātad $b = 0$.

Ja $c \neq 0$, tad funkcijai $y' = c$ vispār nav sakņu; tātad $c = 0$. Iegūstam, ka $y = d$, un tātad tā ir konstanta funkcija.

39.32. Pieņemsim pretējo, ka tādus 3 skaitļus izvēlēties nevar. Sakārtosim dotos skaitļus augošā secībā $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$.

Skaidrs, ka $a_1 \geq 1,\ a_2 \geq 2$ un $a_3 \geq 3$.

Ja $a_4 < 2 \cdot 3 = 6$, tad skaitļu trijnieks a_2, a_3, a_4 apmierinātu uzdevuma nosacījumus; tātad $a_4 \geq a_2 \cdot a_3 \geq 6$.

Līdzīgi iegūstam $a_5 \geq a_3 \cdot a_4 \geq 3 \cdot 6 = 18$, $a_6 \geq a_4 \cdot a_5 \geq 6 \cdot 18 = 108$. Iegūta pretruna ar uzdevuma nosacījumiem; apgalvojums pierādīts.

39.33. Aplūkosim 3 vienības vektorus $e_1 = (a, b)$, $e_2 = (c, d)$, $e_3 = (e, f)$. No skalārā reizinājuma formulas seko, ka

$$(e_1, e_2) = |e_1| \cdot |e_2| \cdot \cos(e_1, e_2) = \cos(e_1, e_2) = ac + bd \ .$$

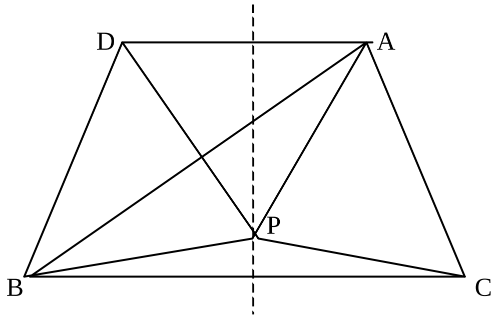
Līdzīgi iegūstam, ka

$$\cos(e_1, e_2) = ae + bf \quad \text{un} \quad \cos(e_2, e_3) = ce + df \ .$$

Starp vektoriem e_1, e_2, e_3 vismaz viens leņķis nepārsniedz $120°$. Pretējā gadījumā leņķi summā pārsniegtu $360°$. Šī leņķa kosīnuss nav mazāks par $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Apgalvojums pierādīts.

39.34. Papildinām trijstūri *ABC* līdz vienādsānu trapecei *ABCD*; tad *P* atrodas uz tās simetrijas ass (skat. 39.9. zīm.).



39.9. zīm.

Apzīmējam $\angle ABC = \alpha$; tad $\angle BCA = 2\alpha$, $\angle DAC = 180° - 2\alpha$. Tā kā $\angle DAB = \angle ABC = \alpha$, tad $\angle BAC = 180° - 3\alpha$.

No vienādības $\angle DBA = \angle DBC - \angle ABC = \angle ACB - \angle ABC = 2\alpha - \alpha = \alpha = \angle DAB$ seko, ka trijstūris *BDA* ir vienādsānu; tātad $BD = DA$. No šejienes seko, ka trijstūris *PDA* ir regulārs ($PA = PD$ no simetrijas; $PA = AC = BD = DA$); tātad $\angle BAP = 60° - \alpha = \frac{1}{3}\angle BAC$, ko arī vajadzēja pierādīt.

39.35. Aplūkosim patvaļīgu nepāra skaitli *n* un skaitļu grupu $n, 2n, 2^2 n, \ldots, 2^k n$, kas nepārsniedz 100. Katrā šādā grupā drīkst izvēlēties katru otro skaitli.

Tātad skaitļu grupā 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 var maksimāli izvēlēties četrus skaitļus: 1, 4, 16, 64.

Skaitļu grupā 3, 6, 12, 24, 48, 96 var maksimāli izvēlēties 3 skaitļus : 3, 12, 48.

Skaitļu grupā 5, 10, 20, 40, 80 -- 3 skaitļus: 5, 20, 80.

Skaitļu grupā 7, 14, 28, 56 -- 2 skaitļus: 7, 28.

Skaitļu grupā 9, 18, 36, 72 -- 2 skaitļus: 9, 36.

Skaitļu grupā 11, 22, 44, 88 -- 2 skaitļus: 11, 44.

Skaitļu grupā 13, 26, 52 -- 2 skaitļus: 13, 52.

Skaitļu grupā 15, 30, 60 -- 2 skaitļus: 15, 60.

Skaitļu grupā 17, 34, 68 -- 2 skaitļus: 17, 68.

Skaitļu grupā 19, 38, 76 -- 2 skaitļus: 19, 76.

Skaitļu grupā 21, 42, 84 -- 2 skaitļus: 21, 84.

Skaitļu grupā 23, 46, 92 -- 2 skaitļus: 23, 92.

Skaitļu grupā 25, 50, 100 -- 2 skaitļus: 25, 96.

Grupās, kas atbilst pārējiem nepāra skaitļiem no 27 līdz 99 (tādu ir 37) ir ne vairāk kā divi skaitļi; no tiem var izvēlēties tikai vienu. Kopā iznāk, ka var izvēlēties 67 skaitļus.

39.36. Skaitļu kvadrāti pēc moduļa 3 pieņem vērtības 0 un 1. Tātad no kongruences

$$a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 3$$

seko, ka $a \equiv b \equiv 0 \pmod 3$. Tā kā *a* un *b* dalās ar 3, tad a^2 un b^2 dalās ar 9; līdz ar to arī $a^2 + b^2$ dalās ar 9.

39.37. Vienādojumu pārveidojam:

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 2x - \cos^2 x = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$4\sin^2 x \cdot \cos^2 x - \cos^2 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x \cdot \left(4\sin^2 x - 1\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\cos^2 x \cdot \left(2 - 2\cos 2x - 1\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x \cdot \left(1 - 2\cos 2x\right) = 0 \,.$$

Atbilde: $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2} + \pi k\right\}, k \in Z$.

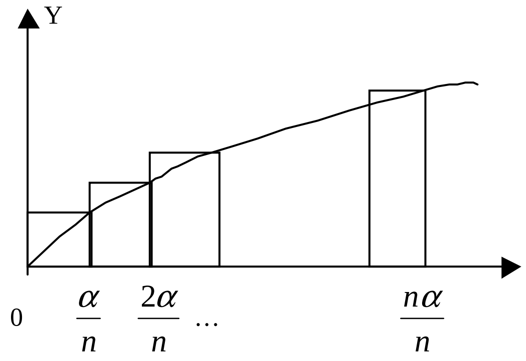
39.38. Nē, tāds daudzskaldnis neeksistē.

Pieņemsim pretējo, ka katrai skaldnei ir vismaz 6 malas. Aplūkosim visu daudzskaldņa skaldņu leņķu vidējo lielumu *S*.

Katrai skaldnei leņķu vidējais lielums ir ne mazāks par $120°$; tātad $S \geq 120°$.

Leņķu summa pie izliekta daudzskaldņa virsotnes ir mazāka par $360°$; tā kā leņķu ir vismaz 3, tad leņķu vidējais lielums pie virsotnes ir mazāks par $120°$. No šejienes seko, ka $S < 120°$. Iegūta pretruna.

39.40. Apskatām funkcijas $y = \sin t$ grafiku intervālā $t \in [0, \alpha]$.



40.8. zīm.

Pierādāmā nevienādība izsaka faktu, ka pakāpienveida figūras laukums lielāks par laukumu zem funkcijas grafika, kas ir vienāds ar $\int_0^{\alpha} \sin t \cdot dt = 1 - \cos\alpha$. Protams šeit tiek izmantots fakts, ka funkcija $y = \sin t$ dotajā intervālā ir augoša.