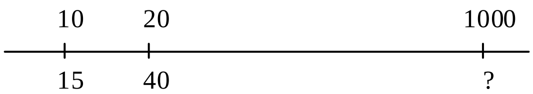
Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 39. OLIMPIĀDE

4. klase

39.1. Kopā saliktas divas skalas. Iezīmes, kas uz pirmās skalas atbilst skaitļiem 10 un 20, atrodas pretī iezīmēm, kas uz otras skalas atbilst skaitļiem 15 un 40. Kādam skaitlim atbilst tā otrās skalas iezīme, kas atrodas pretī pirmās skalas iezīmei, kura attēlo skaitli 1000? (Skat. 39.1. zīm.)



39.1. zīm.

39.2. Vai taisne var krustot

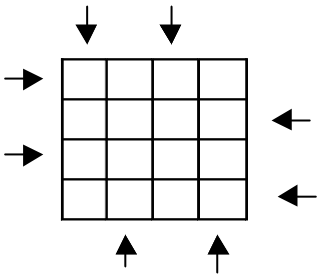
a) visas piecstūra malas,

b) visas sešstūra malas ?

39.3. Skaitlis *A* ir divciparu skaitlis, un tam ir tieši 6 dalītāji. Cik dalītāju ir četrciparu skaitlim, kuru iegūst, divas reizes pēc kārtas uzrakstot skaitli *A* ?

39.4. Plaknē novilktas 5 taisnes, starp kurām nav paralēlu; tās krustojas 10 dažādos punktos. Pierādīt, ka šos 10 punktus noteikti var nokrāsot baltā un melnā krāsā tā, ka uz katras taisnes atrodas 2 balti un 2 melni punkti.

39.5. Vai 39.2. zīm. parādītās tabulas rūtiņās var ierakstīt dažādus skaitļus tā, lai katrā rindā un katrā kolonnā skaitļi pieaugtu tādā virzienā, kādu norāda bultiņas ?



39.2. zīm.

5. klase

39.6. Punkts ar koordinātām (a, b) atrodas tajā koordinātu plaknes ceturtdaļā, kuru ierobežo Ox un Oy asu pozitīvie virzieni. Kurā plaknes ceturtdaļā atrodas punkts ar koordinātēm $(-b, a)$?

39.7. Dots, ka

$$|x| = |y + z|, |y| = |x + z|, |z| = |x + y|.$$

Pierādīt, ka $x + y + z = 0$.

39.8. Pa apli izrakstīti 10 skaitļi: trīs "-1" un septiņi "1". Ar vienu gājienu starp katriem diviem blakus uzrakstītiem skaitļiem ieraksta to reizinājumu. Vai, daudzkārt atkārtojot šādus gājienus, var gadīties, ka visu uzrakstīto skaitļu reizinājums būs "+1"?

39.9. Pierādīt, ka $10a + b$ dalās ar 7 tad un tikai tad, ja $a - 2b$ dalās ar 7 (a un b -- naturāli skaitļi).

39.10. Starp katrām divām no dotām septiņām pilsētām nodibināta ekspresautobusa līnija, pa kuru var braukt abos virzienos, neiegriežoties citās pilsētās. Katru līniju apkalpo tikai vienas krāsas autobusi. Zināms, ka ar katras krāsas autobusiem var aizbraukt no katras pilsētas uz katru (varbūt pārsēžoties). Kāds ir lielākais iespējamais krāsu skaits.

6. klase

39.11. Atrisināt vienādojumu

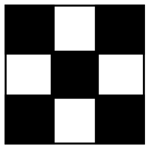
$$4(3(2x + 1) + 1) + 1 = x.$$

39.12. Pierādīt, ka formula $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ izsaka lielāko no skaitļiem x un y. Uzrakstīt formulu, kura izsaka mazāko no skaitļiem x un y.

39.13. Taisnā leņķī ievilkta bisektrise. Pēc tam bisektrises ievilktas katrā no radušies leņķiem, pēc tam -- katrā no četriem radušies leņķiem, utt. Vai starp šādi konstruētiem stariem ir tādi, kas veido $30°$ lielu leņķi.

39.14. Pirmais skaitlis ir 11, bet katrs nākošais -- iepriekšējā skaitļa ciparu kvadrātu summa : otrais skaitlis ir $1^2 + 1^2 = 2$, trešais ir $2^2 = 4$, ceturtais ir $4^2 = 16$, piektais ir $1^2 + 6^2 = 37$, utt. Kāds ir 1989 skaitlis.

39.15. Melnajās rūtiņās ierakstīti nepāra cipari 1, 3, 5, 7, 9. Baltajās rūtiņās ierakstīti pāra cipari 2, 4, 6, 8 (skat. 39.3. zīm.); katrs cipars vienu reizi. Pēc tam sareizināti visi tie ciparu pāri, kas ierakstīti blakus rūtiņās (kam ir kopīga mala). Pierādīt, ka visu 12 reizinājumu summa ir mazāka par 500.



39.3. zīm.

7. klase.

39.16. Kādi cipari ir jāieraksta dotajā skaitlī zvaigznīšu vietā, lai iegūtu naturāla skaitļa kvadrātu ?

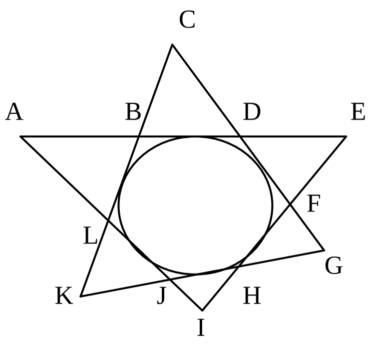
$$10000*000*1.$$

39.17. Daļas skaitītājam un saucējam pieskaitot vieninieku, tās vērtība nemainās. Atrast šīs daļas vērtību.

39.18. Taisnleņķa trijstūrī *ABC* punkti *P* un *Q* dala hipotenūzu *AB* trijās vienādās daļās. Pierādīt, ka

$$CP^2 + PQ^2 + CQ^2 = \frac{2}{3} AB^2 .$$

39.19. Trijstūriem *AEI* un *KCG* ir vien un tā pati ievilktā riņķa līnija (skat. 39.4. zīm.).



39.4. zīm

Pierādīt, ka

$$AB + CD + EF + GH + IJ + KL =$$
$$BC + DE + FG + HI + JK + LA\,.$$

39.20. Doti 37 veseli skaitļi. Pierādīt, ka no tiem var atrast septiņus skaitļus, kuru summa dalās ar 7.

8. klase

39.21. Kādas ir tās burta *a* vērtības, pie kurām vienādojumiem

$$1989x^2 + ax + 9891 = 0 \quad \text{un} \quad 9891x^2 + ax + 1989 = 0$$

ir kopīga sakne?

39.22. Apskatām 39.1. zīm. doto tabulu.

	27		
			37
		17	
0			

39.1. zīm.

a) Pierādīt, ka tukšajās rūtiņās var ierakstīt skaitļus tā, lai katrā rindiņā un katrā kolonnā ierakstītie skaitļi veidotu aritmētisku progresiju.

b) Pierādīt, ka to var izdarīt tikai vienā veidā.

c) Kāds skaitlis jāieraksta labajā augšējā stūrī?

39.23. Šaurleņķa trijstūrī *ABC* ievilktā riņķa līnija pieskaras malām *AB* un *CB* attiecīgi punktos *N* un *M*. Zināms, ka $AM = NC$. Pierādīt, ka ABC ir vienādsānu trijstūris.

39.24. Plaknē doti 7 punkti. Novelkam visus nogriežņus, kam galapunkti ir divi no šiem septiņiem punktiem. Pierādīt, ka starp šiem nogriežņiem ir vismaz 3 dažāda garuma nogriežņi.

39.25. Doti 69 dažādi naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 100. Pierādīt, ka vienādojumam

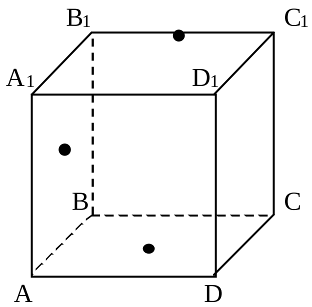
$$x + y + z = t$$

eksistē tāds atrisinājums, kura visu mainīgo vērtības ir dotie skaitļi.

(Divu vai vairāku mainīgo vērtības var būt arī vienādas).

9. klase

39.26. Konstruēt zīmējumā 39.2. kuba $ABCDA_1B_1C_1D_1$ šķēlumu ar plakni, kas iet caur skaldņu AA_1B_1B un $ABCD$ centriem un šķautnes B_1C_1 viduspunktu. Konstrukcijas gaitu pamatot.

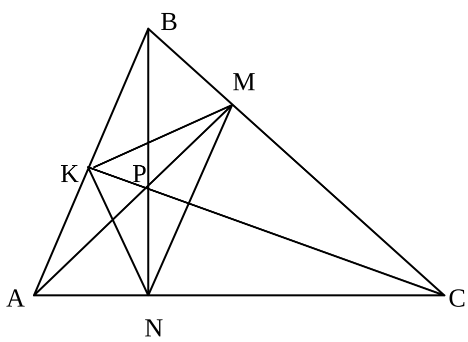


39.2. zīm.

39.27. Vai var atrast 1989 dažādus naturālus skaitļus tā, lai neviens no šiem skaitļiem, ne arī to summas pa 2, pa 3, … , pa 1989 nebūtu vesela skaitļa kvadrāts?

39.28. Dots, ka $\sin x + \sin y + \sin z = \cos x + \cos y + \cos z = 0$.
Pierādīt, ka nevar pastāvēt vienādība $x - y = 121°$.

39.29. Trijstūra ABC iekšpusē ņemts punkts P. Taišņu AP, BP un C krustpunkti ar malām BC, AC un AB ir attiecīgi M, N un K.
Dots, ka punkti A, K, M un C atrodas uz vienas riņķa līnijas, un punkti B, K, N un C arī atrodas uz vienas riņķa līnijas. Pierādīt, ka AM, BN un CK ir trijstūra ABC augstumi. (Skat. 39.3. zīm.).



39.3. zīm.

39.30. Rindā stāv 12 studenti. No tiem jāizveido komanda (tajā jābūt vismaz vienam dalībniekam) tā, lai komandā nebūtu iekļauti tādi studenti, kas stāv blakus. Cik dažādas komandas var izveidot?

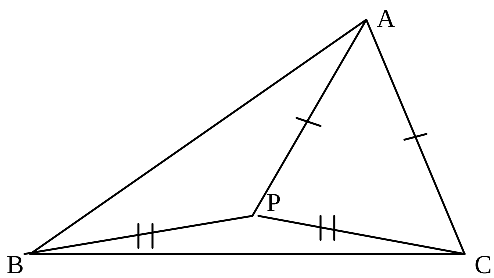
10.klase

39.31. Funkcijas $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ atvasinājums ir nulle pie trim dažādām x vērtībām. Pierādīt, ka $f(x)$ ir konstante.

39.32. Doti 6 dažādi naturāli skaitļi; neviens no tiem nepārsniedz 107. Pierādīt, ka no šiem skaitļiem var izvēlēties 3 skaitļus tā, lai katru divu izvēlēto skaitļu reizinājums būtu lielāks par trešo.

39.33. Dots, ka $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = e^2 + f^2 = 1$. Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem $ac + bd$, $ae + bf$, $ce + df$ nav mazāks par $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

39.34. Trijstūra ABC iekšpusē ņemts punkts P. Dots, ka $AC = AP$, $PB = PC$ un $\angle ACB = 2\angle ABC$. Pierādīt, ka stars AP dala leņķi $\angle BAC$ divās daļās, no kurām viena ir divas reizes lielāka par otru. Skat. 39.4. zīm.



39.4. zīm.

39.35. Kādu lielāko daudzumu naturālu skaitļu, kas nepārsniedz 100 var izvēlēties tā, lai neviens no izvēlētajiem skaitļiem nebūtu 2 reizes lielāks par citu izvēlēto skaitli?

11. klase

39.36. Dots, ka a un b -- naturāli skaitļi un a^2+b^2 dalās ar 3. Pierādīt, ka a^2+b^2 dalās ar 9.

39.37. Atrisināt vienādojumu

$$\sin^2 x+\sin^2 2x=1.$$

39.38. Vai eksistē tāds izliekts daudzskaldnis, kura katrai skaldnei ir vismaz sešas malas ?

39.39. Plaknē novilktas vairākas taisnes, kurām pavisam kopā ir n krustpunktu. Pierādīt, ka krustpunktus var sanumurēt ar skaitļiem no 1 līdz n tā, ka uz katras taisnes numuri izvietojas monotonā kārtībā.

39.40. Dots, ka $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, n -- naturāls skaitlis. Pierādīt, ka

$$\frac{\alpha}{n}\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{n}+\sin\frac{2\alpha}{n}+\sin\frac{3\alpha}{n}+\cdots+\sin\frac{n\alpha}{n}\right)>1-\cos\alpha.$$