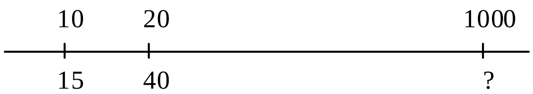
Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 40. OLIMPIĀDE

5. klase

40.1. Kopā saliktas divas skalas. Iezīmes, kas uz pirmās skalas atbilst skaitļiem 10 un 20, atrodas pretī iezīmēm, kas uz otras skalas atbilst skaitļiem 15 un 40. Kādam skaitlim atbilst tā otrās skalas iezīme, kas atrodas pretī pirmās skalas iezīmei, kura attēlo skaitli 1000? (Skat. 40.1. zīm.)



40.1. zīm.

40.2. Kādu skaitļu no 1 līdz 100 ieskaitot ir vairāk: tādu, kam ciparu summa ir pāra skaitlis, vai tādu, kam ciparu summa ir nepāra skaitlis?

40.3. Ierakstīt tukšajās vietās pa viencipara skaitlim tā, lai visās trīs rindiņās un visās trīs kolonnās iegūtu pareizas vienādības. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

$$\begin{array}{cccccc}
[\ ] & - & [\ ] & + & [\ ] & =8 \\
+ & & \times & & : & \\
[\ ] & \times & [2] & + & [\ ] & =7 \\
\times & & + & & + & \\
[\ ] & \times & [\ ] & - & [\ ] & =4 \\
=8 & & =7 & & =2 &
\end{array}$$

40.4. Uzzīmēt 5 nogriežņus tā, lai katram no tiem viens galapunkts atrastos kāda cita nogriežņa vidū, bet otrs galapunkts nepiederētu nevienam citam nogrieznim.

40.5. Glāzē atradās melna kafija. Jānis nodzēra 1 karoti un pielēja glāzē 1 karoti piena, glāzi rūpīgi samaisot. Pēc tam viņš nodzēra 2 karotes maisījuma un pielēja klāt 2 karotes piena, glāzi rūpīgi samaisot; pēc tam -- nodzēra 3 karotes maisījuma un pielēja klāt 3 karotes piena. Pēc tam Jānis izdzēra visu glāzes saturu -- 7 karotes. Ko Jānis izdzēra vairāk -- pienu vai kafiju? Par cik vairāk? Pamatojiet savu atbildi.

6. klase

40.6. Jānis izvēlējās 2 skaitļus a un b un attēloja koordinātu plaknē punktus ar koordinātēm

$(a, b), (a, -b), (-a, b), (-a, -b), (b, a), (b, -a), (-b, a), (-b, -a)$.

Cik dažādus punktus viņš ieguva?

Atbildiet uz jautājumu atkarībā no a un b vērtībām.

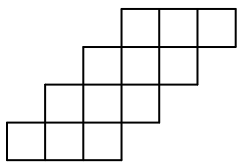
40.7. Dots, ka

$$|x| = |y+z|, |y| = |x+z|, |z| = |x+y|.$$

Pierādīt, ka $x + y + z = 0$.

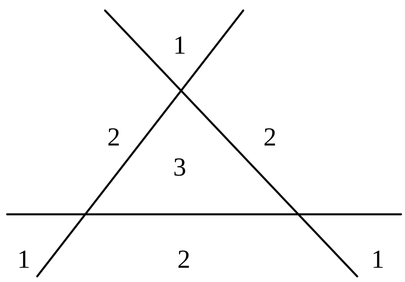
40.8. Kādā mājā dzīvo tikai ģimenes. Katrā ģimenē ir tēvs, māte un vismaz viens bērns. Zināms, ka katrai meitenei ir brālis, un meiteņu nav mazāk kā zēnu. Vai pieaugušo šajā mājā var būt vairāk nekā bērnu?

40.9. Atrodiet, pa kādām līnijām var salocīt 40.2. zīmējumā attēloto figūru, lai iegūtu kuba virsmu. Salokot daļas nedrīkst pārklāties. Locījuma līnijām nav noteikti jāsakrīt ar zīmējumā redzamajām.



40.2. zīm.

40.10. Plaknē novilktas 5 taisnes. Katras divas no tām krustojas, un nekādas trīs neiet caur vienu punktu. Katrā no apgabaliem, kuros taisnes sadala plakni, ierakstām naturālu skaitli -- šī apgabala stūru skaitu. (Piemēram, 40.3. zīmējumā parādīts, kādi skaitļi būtu jāieraksta 3 taišņu gadījumā.)



40.3. zīm.

Vai var gadīties, ka, dažādos veidos izvēloties šīs 5 taisnes, visu ierakstīto skaitļu summas atšķiras viena no otras?

7. klase

40.11. Dots, ka $a^2 = b^2(b-c)$. Zināms, ka no skaitļiem *a*, *b* un *c* viens ir pozitīvs, viens negatīvs, bet viens -- nulle. Kurš skaitlis ir pozitīvs, kurš -- negatīvs, bet kurš -- nulle?

40.12. Pierādīt, ka formula $\frac{1}{2}\left(x+y+|x-y|\right)$ izsaka lielāko no skaitļiem *x* un *y*. Uzrakstīt formulu, kura izsaka mazāko no skaitļiem *x* un *y*.

40.13. Vai kādam desmitstūrim 6 diagonāles var krustoties vienā punktā?

40.14. Skaitli *A* pareizinot ar 3, tā ciparu summa nemainās.
Pierādīt, ka *A* dalās ar 9.

40.15. Kvadrāts sastāv no 13×13 rūtiņām. Sagriezt to 5 taisnstūros tā, lai iegūto taisnstūru visu 10 malu garumi būtu dažādi. Griezumiem jāiet pa rūtiņu līnijām.
Pietiek paradīt vienu veidu, kā to izdarīt.

8. klase

40.16. Dots četrstūris *ABCD*, kura diagonāles krustojas punktā *O*. Dots, ka trijstūri *AOB* un *COD* ir vienādi (pirmā virsotne atbilst pirmajai, otrā -- otrajai, trešā -- trešajai).
Pierādīt, ka trijstūri *BOC* un *DOA* ir vienādi.

40.17. Vai no 12 divniekiem, 14 trijniekiem un 16 pieciniekiem var izveidot vairākus reizinājumus, katrs no kuriem ir vesela skaitļa kvadrāts?
Bet ja trijnieku būtu 13?
Reizinājumos jāizmanto visi skaitļi.

40.18. Taisnleņķa trijstūrī *ABC* punkti *P* un *Q* dala hipotenūzu *AB* trijās vienādās daļās. Pierādīt, ka

$$CP^2 + PQ^2 + CQ^2 = \frac{2}{3}AB^2.$$

40.19. Kādu mazāko daudzumu pirmskaitļu var izveidot no cipariem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, katru no tiem lietojot tieši vienu reizi? Atļauts lietot viencipara vai vairākciparu skaitļus, bet nedrīkst lietot darbības zīmes.

40.20. Uz tāfeles uzrakstīti 10 skaitļi. Ar vienu gājienu atļauts nodzēst jebkurus 3 no tiem (apzīmēsim nodzēstos skaitļus ar a, b un c) un to vietā uzrakstīt skaitļus $2a-b+1$, $2b-c-1$, $2c-a+1$.
Vai, daudzkārt atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai uz tāfeles būtu uzrakstīti tādi paši skaitļi kā sākumā?

9. klase

40.21. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=50 \\ x^2+y^2+2x+3y=64. \end{cases}$$

40.22. Izliekta četrstūra diagonāles sadala to četros trijstūros. Trijiem no tiem laukumi ir vienādi. Pierādīt, ka četrstūris ir paralelograms.

40.23. Trīs pirmskaitļi veido aritmētisku progresiju ar diferenci 20. Atrast šos pirmskaitļus.

40.24. Doti 69 dažādi naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 100. Pierādīt, ka vienādojumam

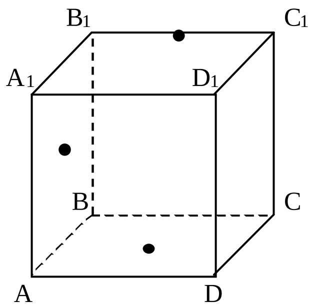
$$x+y+z=t$$

eksistē tāds atrisinājums, kura visu mainīgo vērtības ir dotie skaitļi.
(Divu vai vairāku mainīgo vērtības var būt arī vienādas).

40.25. Šaurleņķa trijstūrī ABC punkts O ir apvilktās riņķa līnijas centrs, bet AA_1 un CC_1 -- augstumi. Pierādiet, ka nogriežņi OB un A_1C_1 ir savstarpēji perpendikulāri.

10. klase

40.26. Konstruēt zīmējumā 40.1. kuba $ABCDA_1B_1C_1D_1$ šķēlumu ar plakni, kas iet caur skaldņu AA_1B_1B un $ABCD$ centriem un šķautnes B_1C_1 viduspunktu. Konstrukcijas gaitu pamatot.



40.1. zīm.

40.27. Dots, ka $\sin 17x = 0$ un $\sin 3x = 0$.

a) Pierādīt, ka $\sin 4x = 0$;

b) Pierādīt, ka $\sin 1990x = 0$.

40.28. Skaitļu virkne (a_i) tiek definēta šādi:

$$a_1 = 19,\ a_2 = 90;\quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1},\ \text{ja } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Atrast skaitļu a_{1989} un a_{1990} lielāko kopīgo dalītāju.

40.29. Trijstūra *ABC* iekšpusē ņemts punkts *P*. Taišņu *AP*, *BP* un *C* krustpunkti ar malām *BC*, *AC* un *AB* ir attiecīgi *M*, *N* un *K*.

Dots, ka punkti *A*, *K*, *M* un *C* atrodas uz vienas riņķa līnijas, un punkti *B*, *K*, *N* un *C* arī atrodas uz vienas riņķa līnijas. Pierādīt, ka *AM*, *BN* un *CK* ir trijstūra *ABC* augstumi.

40.30. Uz tāfeles uzrakstīti vairāki skaitļi, kas nav nulle. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkurus divus uzrakstītos skaitļus (apzīmēsim tos ar *a* un *b*), tos nodzēst un to vietā uzrakstīt skaitļus $a + \frac{b}{2}$ un $b - \frac{a}{2}$.

Vai var gadīties, ka pēc vairākkārtējas šādu gājienu izpildes uz tāfeles ir uzrakstīti tie paši skaitļi, kas sākumā?

11. klase

40.31. Vai eksistē tādi polinomi $P(x)$, $G(x)$ un $F(x)$, kas nav konstantes un kas apmierina sakarības

$$P'(x) = G(x),\ G'(x) = F(x),\ F'(x) = P(x)?$$

40.32. Plaknes α un β šķeļas pa taisni *t*. Plaknē α dots trijstūris $A_1B_1C_1$, tā malas A_1B_1 iekšējs punkts Q_1 un trijstūra iekšējs punkts P_1; plaknē β dots trijstūris $A_2B_2C_2$. Ir zināms, ka šie trijstūri iegūti, ortogonāli projicējot plaknēs α un β kādu telpā esošu trijstūri ABC, bet Q_1 un P_1 iegūti, ortogonāli projicējot plaknē α malas AB iekšēju punktu *Q* un trijstūra *ABC* iekšēju punktu *P*.

Kā ar cirkuli un lineālu konstruēt

a) *Q* ortogonālo projekciju Q_2 plaknē β,

b) *P* ortogonālo projekciju P_2 plaknē β?

Ne trijstūris *ABC*, ne punkti *Q* un *P* nav mums pieejami. Visas konstrukcijas drīkst izdarīt tikai plaknēs α un β; tajās drīkst izmantot taisni t. Doto trijstūru malas nav perpendikulāras taisnei *t*.

40.33. Trijstūra *ABC* iekšpusē ņemts punkts *P*. Dots, ka $AC = AP$, $PB = PC$ un $\angle ACB = 2\angle ABC$. Pierādīt, ka stars *AP* dala leņķi $\angle BAC$ divās daļās, no kurām viena ir divas reizes lielāka par otru.

40.34. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^3 \\ y^{x+y} = x^6 \cdot y^3. \end{cases}$$

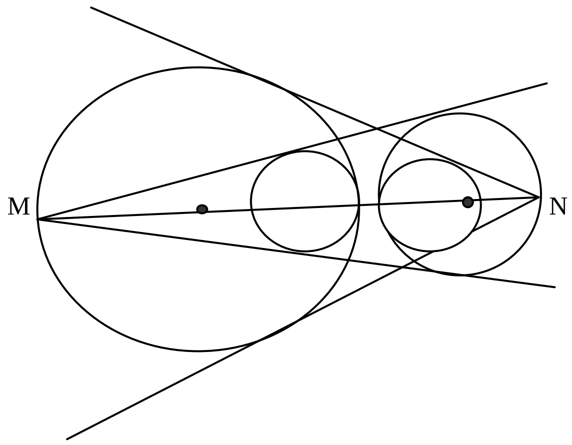
40.35. Pierādīt, ka starp četriem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem vismaz viens nav ne vesela skaitļa kvadrāts, ne kubs, ne cita pakāpe, augstāka par pirmo.

12. klase

40.36. Dots, ka $\sin x + \cos x < 0$.
Pierādīt, ka $\sin^3 x + \cos^3 x < 0$.

40.37. Dots, ka $a + b = c + d$ un $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.
Pierādīt, ka $a^{1990} + b^{1990} = c^{1990} + d^{1990}$.

40.38. . Divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2 atrodas viena ārpus otras. Novilkta taisne caur to centriem; tās krustpunktus ar ω_1 un ω_2, kas atrodas vistālāk viens no otra, apzīmējam attiecīgi ar M un N. No M novilktas divas pieskares riņķa līnijai ω_2, no N -- divas pieskares riņķa līnijai ω_1. Riņķa līnijas ω_1 iekšpusē konstruēta riņķa līnija ω_3, kas pieskaras ω_1 un abām no M novilktajām pieskarēm; līdzīgi ω_2 iekšpusē konstruēta riņķa līnija ω_4, kas pieskaras ω_2 un abām no N novilktajām pieskarēm. Pierādīt, ka ω_3 un ω_4 rādiusi ir vienādi (skat. 40.2. zīm.).



40.2. zīm.

40.39. Dots, ka $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, n -- naturāls skaitlis. Pierādīt, ka

$$\frac{\alpha}{n} \cdot \left(\sin\frac{\alpha}{n} + \sin\frac{2\alpha}{n} + \sin\frac{3\alpha}{n} + \cdots + \sin\frac{n\alpha}{n} \right) > 1 - \cos\alpha .$$

40.40. Trijstūra piramīdas visas šķautnes ir vienāda garuma. Katra šķautne ar 2 punktiem sadalīta 3 vienādās daļās. Caur katru dalījuma punktu novilktas 2 plaknes, paralēlas tām piramīdas skaldnēm, kuras šo punktu nesatur.
Cik daļās šīs plaknes sadala piramīdu? Kas tās ir par daļām?