Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 41. OLIMPIĀDE

5. klase

41.1. Dots, ka a un b ir naturāli skaitļi. Zināms arī, ka $a+b$ ir sešciparu skaitlis, bet $a-b$ ir trīsciparu skaitlis. Cik ciparu var būt skaitļiem a un b.
Norādiet visas iespējas.

41.2. Ierakstīt tukšajās vietās pa viencipara skaitlim tā, lai visās trīs rindiņās un visās trīs kolonnās iegūtu pareizas vienādības. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

$$\begin{array}{ccccccc}
[\ ] & - & [\ ] & + & [\ ] & = 8 \\
+ & & \times & & : & \\
[\ ] & \times & [2] & + & [\ ] & = 7 \\
\times & & + & & + & \\
[\ ] & \times & [\ ] & - & [\ ] & = 4 \\
= 8 & & = 7 & & = 2 &
\end{array}$$

41.3. Katru naturālu skaitli no 1 līdz 1992 dala ar 7 ar atlikumu. Kāda ir visu iegūto atlikumu summa?

41.4. Uzzīmēt sešus taisnes nogriežņus tā, lai katrs no tiem krustotos tieši ar 4 citiem un nogriežņiem nebūtu citu kopīgu punktu bez krustpunktiem.

41.5. Kādā salā dzīvo cilvēki, kas runā tikai taisnību, un cilvēki, kas tikai melo. Kādā sapulcē, kurā piedalījās 1991 salas iedzīvotājs, katrs dalībnieks paziņoja visiem pārējiem: "Jūs visi esat meļi."
Cik meļu piedalījās šajā sapulcē.

6. klase

41.6. Uz taisnes atzīmēti 3 stari, kas šo taisni pilnībā pārklāj. Vai taisnība, no šiem stariem var izvēlēties divus tādus, kas pilnībā pārklāj taisni.

41.7. Vai uz kuba skaldnēm var uzrakstīt skaitļus no 1 līdz 6 (uz katras skaldnes -- citu skaitli) tā, lai katrās trijās skaldnēs, kam ir kopīga virsotne, ierakstīto skaitļu summa būtu nepāra skaitlis?

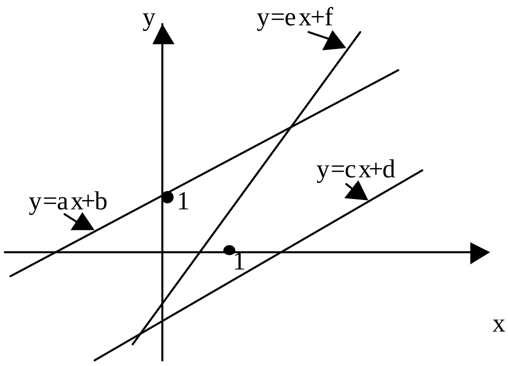
41.8. Kādā mājā dzīvo tikai ģimenes. Katrā ģimenē ir tēvs, māte un vismaz viens bērns. Zināms, ka katrai meitenei ir brālis, un meiteņu nav mazāk kā zēnu. Vai pieaugušo šajā mājā var būt vairāk nekā bērnu?

41.9. Atrodiet kaut vienu tādu naturālu skaitli n, ka n dalās ar 6, $(n+1)$ dalās ar 5, $(n+2)$ dalās ar 4, $(n+3)$ dalās ar 3, $(n+4)$ dalās ar 2.

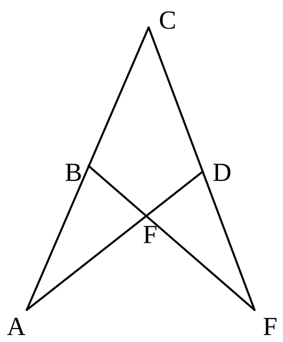
41.10. . Uz galda atrodas 20 konfekšu kaudzīte. Divi spēlētāji pēc kārtas ēd konfektes no kaudzītes. Ar katru gājienu drīkst apēst ne vairāk kā pusi kaudzītē palikušo konfekšu. Kas nevar izdarīt gājienu, zaudē.
Kas uzvar, pareizi spēlējot -- tas, kas izdara pirmo gājienu, vai viņa pretinieks? Kā jāspēlē, lai uzvarētu?

7. klase

41.11. 41.1. zīmējumā attēloti trīs lineāru funkciju $y = ax + b$, $y = cx + d$ un $y = ex + f$ grafiki. Kurš no skaitļiem $a + b$, $c + d$ un $e + f$ ir vislielākais un kurš -- vismazākais.



41.12. Dots, ka 41.2. zīmējumā attēlotie trijstūri *ABF* un *EDF* ir vienādi. Pierādīt, ka $BC = DC$.



41.2. zīm.

41.13. Uzrakstiet vienādību, kas satur burtu *x* un ir pareiza, ja *x* ir viencipara naturāls skaitlis, bet nav pareiza, ja *x* vērtība ir citādāka.

41.14. Skaitli *A* pareizinot ar 3, tā ciparu summa nemainās.
Pierādīt, ka *A* dalās ar 9.

41.15. Ilīrijas armijā ir viens ģenerālis, kam tieši pakļauti 7 pulkveži. Dažiem pulkvežiem tieši pakļauti ir katram 7 majori, dažiem majoriem -- katram 7 leitnanti, dažiem leitnantiem -- katram 7 seržanti, dažiem seržantiem -- katram 7 ierindnieki.

Neviens karavīrs nav tieši pakļauts vairāk nekā vienam citam; var būt virsnieki un seržanti, kam nav pakļauts neviens karavīrs.
Pavisam ir 100 karavīri, kam pakļauti citi. Cik pavisam karavīru ir Ilīrijas armijā.

8. klase

41.16. Dots, ka $\sqrt{a} = b, \sqrt{b} = c, \sqrt{c} = d, \sqrt{d} = e$ un e -- vesels skaitlis, $a \le 1000\,000$.
Atrast visas iespējamās a vērtības.

41.17. Izliektā četrstūrī *ABCD* trīs punkti -- malas *AB* viduspunkts un diagonāļu *AC* un *BD* viduspunkti -- atrodas uz vienas taisnes.
Pierādīt, ka arī malas *CD* viduspunkts atrodas uz šīs pašas taisnes

41.18. Kādu mazāko daudzumu pirmskaitļu var izveidot no cipariem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, katru no tiem lietojot tieši vienu reizi? Atļauts lietot viencipara vai vairākciparu skaitļus, bet nedrīkst lietot darbības zīmes.

41.19. Dots, ka a, b, c, d -- pozitīvi skaitļi un

$$\frac{a}{b+c+d} = \frac{b}{a+c+d} = \frac{c}{a+b+d} = \frac{d}{a+b+c} \quad .$$

Aprēķināt

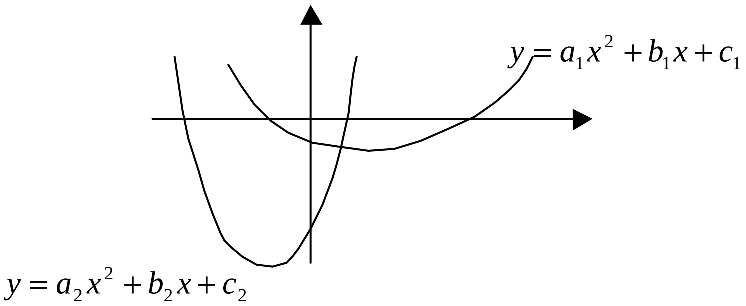
$$\frac{a+b}{c+d} + \frac{a+c}{b+d} + \frac{a+d}{b+c} + \frac{b+c}{a+d} + \frac{b+d}{a+c} + \frac{c+d}{a+b} \quad .$$

41.20. Rūtiņu lapā jāuzzīmē slēgta lauzta līnija, kas pati sevi nekrusto un kurai ir
a) 11,
b) 90,
c) 100 posmi.
Katrs posms ir viena rūtiņas mala. Sekojošie posmi ir savstarpēji perpendikulāri. Vai to var izdarīt.

9. klase

41.21. Tabula sastāv no 6×6 rūtiņām. Vai var rūtiņās ierakstīt pirmos 36 pirmskaitļus (katrā rūtiņā -- citu) tā, lai ierakstīto skaitļu summas visās rindās un kolonnās būtu vienādas savā starpā?

41.22. Doti divu kvadrāttrinomu $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ un $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ grafiki (skat. 41.1. zīm.).



41.1. zīm.

Kas ir lielāks:

a) a_1 vai a_2,

b) b_1 vai b_2,

c) c_1 vai c_2?

41.23. Trijstūrī *ABC* no virsotnes *B* novilkts perpendikuls pret leņķa *A* bisektrisi. Perpendikula pamatu apzīmējam ar *P*, bet malas *BC* viduspunktu ar *M*. Dots, ka $AB = c$ un $AC = b$. Aprēķināt *MP*.

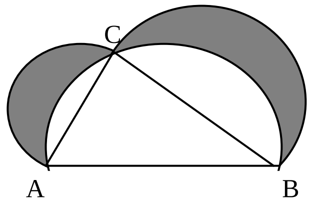
41.24. Smaragda karaļvalsts šahisti spēlē tikai savā starpā. Par uzvaru piešķir 1 punktu, par neizšķirtu 0,5 punktus, par zaudējumu -- 0 punktus. Gada laikā neviens šahists neizcīnīja vairāk par 10 punktiem. Pierādiet, ka vismaz viens šahists šajā gadā neizspēlēja vairāk par 20 partijām.

41.25. Šaurleņķa trijstūrī *ABC* punkts *O* ir apvilktās riņķa līnijas centrs, bet AA_1 un CC_1 -- augstumi. Pierādiet, ka nogriežņi *OB* un A_1C_1 ir savstarpēji perpendikulāri.

10. klase

41.26. Dots, ka $\sin\alpha + \sin\beta = 0$. Pierādiet, ka $\cos 2\alpha = \cos 2\beta$.

41.27. Uz taisnleņķa trijstūra *ABC* malām kā uz diametriem konstruētas pusriņķa līnijas (skat. 41.2. zīm.). Pierādiet, ka iekrāsoto laukumu summa ir vienāda ar trijstūra *ABC* laukumu.



41.2. zīm.

41.28. Skaitļu virkne (a_i) tiek definēta šādi:

$$a_1 = 19,\ a_2 = 32; \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1},\ \text{ja } n = 1, 2, 3, \ldots\ .$$

Atrast skaitļu a_{1991} un a_{1992} lielāko kopīgo dalītāju.

41.29. Zināms, ka funkcija $f(x)$ definēta visām reālām argumenta vērtībām, un visiem *x* pastāv vienādība

$$2f(x) + f(1-x) = 2x\ .$$

Aprēķināt $f(1991)$.

41.30. Kādā valstī ir 29 pilsētas. No katras pilsētas iziet tieši 11 vienvirziena autostrādes, un katrā pilsētā ieiet tieši 11 vienvirziena autostrādes; katra autostrāde savieno divas pilsētas, neiegriežoties citās. Katras divas pilsētas savieno ne vairāk kā viena autostrāde.

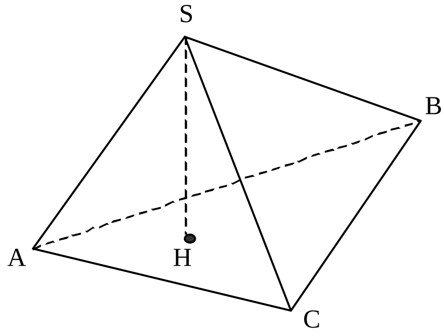
Pierādīt, ka no katras pilsētas uz katru citu var atbraukt, braucot augstākais pa trim autostrādēm.

11. klase

41.31. Vai eksistē tādi polinomi $P(x)$, $G(x)$ un $F(x)$, kas nav konstantes un kas apmierina sakarības

$$P'(x) = G(x),\ G'(x) = F(x)\ ,\ F'(x) = P(x)?$$

41.32. Trijstūra piramīdā *SABC* katras divas pretējās šķautnes ir savstarpēji perpendikulāras; *SH* ir piramīdas augstums (skat. 41.3. zīm.).



41.3. zīm.

Kā zīmējumā konstruēt piramīdas sānu skaldņu augstumus no virsotnes S ? Konstrukciju pamatot.

41.33. Taisnleņķa trijstūrī hipotenūza un mediāna pret vienu no katetēm veido leņķi α. Pierādiet, ka $\sin\alpha \le \frac{1}{3}$.

41.34. Dotas divas funkcijas $f(x)$ un $g(x)$ un pozitīva konstante *c*. Zināms, ka

1) $f(x)$ -- pāra funkcija,
2) $g(x)$ -- nepāra funkcija,
3) visiem *x* pastāv vienādība $g(x) = f(x-c)$.

Jūsu uzdevums:

a) uzrādīt kaut vienu šādu funkciju piemēru,
b) pierādīt: ja f nav konstanta funkcija, tad tā ir periodiska, un viens tās periods ir 4*c*.

41.35. Mežā dzīvo 12 rūķīši; daži no tiem savā starpā draudzējas (visas draudzības ir abpusējas). Katram rūķītim ir nepāra skaits draugu. Katrs rūķītis dzīvo baltā vai sarkanā mājiņā. Katra gada *i*-tajā mēnesī *i*-tais rūķītis apmeklē visus savus draugus; ($i = 1, 2, \ldots, 12$). Ja vairums no tiem dzīvo citas krāsas mājiņā nekā viņš pats, tad rūķītis pēc atgriešanās mājās pārkrāso savu mājiņu tādā krāsā, kāda ir viņa draugu vairuma mājiņas.

Pierādīt, ka agri vai vēlu pārkrāsošana beigsies. (Rūķīši savas simpātijas vai antipātijas nemaina un dzīvo mūžīgi).

12. klase

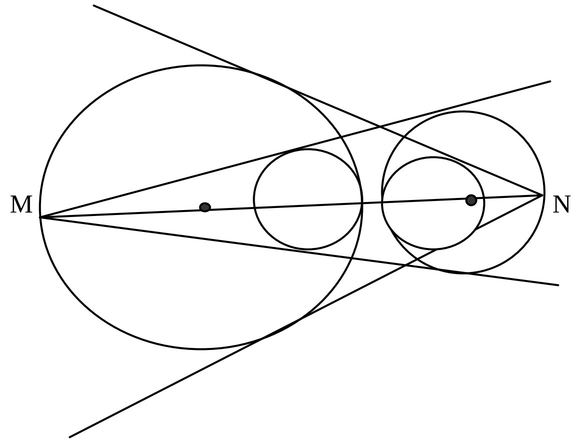
41.36. Dots, ka a un n -- naturāli skaitļi, $n>1$.

a) Pierādīt, ka a^4-1 nav pirmskaitlis.

b) Pierādīt: ja a^n-1 ir pirmskaitlis, tad $a=2$ un n ir pirmskaitlis.

41.37. Dots, ka $x>1$ un $y>1$. Pierādīt, ka $\log_x y+\log_y x\geq 2$.

41.38. Divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2 atrodas viena ārpus otras. Novilkta taisne caur to centriem; tās krustpunktus ar ω_1 un ω_2, kas atrodas vistālāk viens no otra, apzīmējam attiecīgi ar M un N. No M novilktas divas pieskares riņķa līnijai ω_2, no N -- divas pieskares riņķa līnijai ω_1. Riņķa līnijas ω_1 iekšpusē konstruēta riņķa līnija ω_3, kas pieskaras ω_1 un abām no M novilktajām pieskarēm; līdzīgi ω_2 iekšpusē konstruēta riņķa līnija ω_4, kas pieskaras ω_2 un abām no N novilktajām pieskarēm. Pierādīt, ka ω_3 un ω_4 rādiusi ir vienādi (skat. 41.4. zīm.).



41.4. zīm.

41.39. Pierādīt identitāti

$$\sin\frac{3\alpha}{3}+3\sin\frac{3\alpha}{3^2}+3^2\sin\frac{3\alpha}{3^3}+\cdots+3^{n-1}\sin\frac{3\alpha}{3^n}=$$
$$\frac{1}{4}\left(3^n\sin\frac{\alpha}{3^n}-\sin\alpha\right).$$

41.40. Jānis uz vienas sarkanas un 100 zilām kartiņām uzrakstījis dažādus naturālus skaitļus. Ar vienu jautājumu Andris var norādīt uz jebkurām 15 kartiņām un uzzināt no Jāņa, vai uz tām uzrakstīto skaitļu summa ir pāra vai nepāra skaitlis.

Kāds ir mazākais jautājumu skaits, ar kuru Andris var uzzināt, vai sarkanās kartiņas uzrakstīts pāra vai nepāra skaitlis.