Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 42. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

42.1. To var izdarīt, piemēram šādi:

$$412 - 365 = 47 < 50.$$

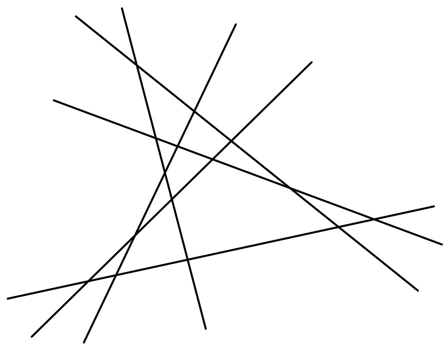
Var pierādīt, ka tas ir vienīgais piemērs.

42.2. a) Viencipara vai divciparu skaitļu ar ciparu summu 23 nav; starp trīsciparu skaitļiem, vismazākais ir skaitlis, kuram ir mazākais pirmais cipars, tātad skaitlis 599.

a) Tā kā skaitļa pierakstā nav nuļļu, tad tam ir ne vairāk par 23 cipariem; vienīgais 23-ciparu skaitlis un, tātad, arī lielākais ar dotajām īpašībām ir skaitlis $\underbrace{111\ldots11}_{23}$.

42.3. Sadalām skaitļus grupās pa 7 pēc kārtas. Vienā grupā atlikumu summa ir $1+2+3+4+5+6+0=21$. Tā kā $1992 = 7 \cdot 284 + 4$, tad meklējamā summa ir $21 \cdot 284 + (1+2+3+4) = 5974$.

42.4. Var uzzīmēt nogriežņus tā, lai katrs krustotos ar katru un visi krustpunkti būtu dažādi; piemēram, kā parādīts 42.4. zīmējumā.



42.4. zīm.

Šeit veidojas 15 krustpunkti. Tā kā divi nogriežņi nevar krustoties vairāk kā vienā punktā, tad kopējais krustpunktu skaits nevar būt lielāks par 15.

Pakāpeniski saīsinot no viena gala kādu no nogriežņiem, viens krustpunkts pazudīs. Iegūsim 14 krustpunktus. Atkārtojot šo procesu iegūsim 13, 12, 11, …, 0 krustpunktus.

Atbilde: krustpunktu skaits var būt jebkurš vesels skaitlis no 0 līdz 15.

42.5. Jau aizpildītajām rūtiņām blakus atrodas 16 citas (skat. 42.5. zīm.).

	1		2	
	4		3	

42.5. zīm.

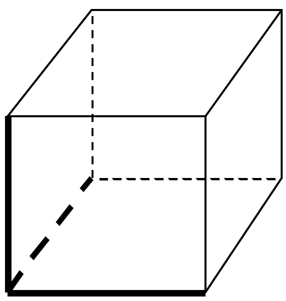
Lielākais šajā rūtiņās ierakstītais skaitlis būs vismaz $4+16=20$. Tāpēc tā starpība ar blakus esošo jau ierakstīto skaitli būs vismaz $20-4=16$.

42.6. Tā kā māja, kas Lauvam bija piektā, bet Putnubiedēklim bija divpadsmitā, tad Putnubiedēklis sāka savu ceļu 7 mājas pirms Lauvas mājas. Putnubiedēkļa piektā māja atrodas divas mājas pirms Lauvas izejas punkta. Lauvam tā bija trīsdesmitā māja. Tātad kopā ir $30+2=32$ mājas.

42.7. Nē, tā nevar būt. Trīsciparu skaitļu reizinājums ir vismaz piecciparu skaitlis; tātad kopā šiem skaitļiem ir $3+3+5=11$ cipari. No Dirihlē principa seko, ka tie visi nevar būt dažādi.

42.8. Piemēram, $50123-49876=247<250$.

42.9. Jā, var. Visas šķautnes var iedalīt trīs virzienu grupās (no katras virsotnes iziet pa vienam nogrieznim katrā virzienā; skat. 42.6. zīm.)



42.6. zīm.

Visas pirmajā virzienā ejošās virsotnes numurēsim ar skaitļiem 1, 4, 7, 10 (šie skaitļi, dalot ar 3, dod atlikumā 1; tos var pierakstīt kā $3a+1$). Visas otrajā virzienā ejošās virsotnes numurēsim ar skaitļiem 2, 5, 8, 11 (šie skaitļi, dalot ar 3, dod atlikumā 2; tos var pierakstīt kā $3b+2$). Visas trešajā virzienā ejošās virsotnes numurēsim ar skaitļiem 3, 6, 9, 12 (šie skaitļi, dalot ar 3, dod atlikumā 0; tos var pierakstīt kā $3c$). Tad katrā virsotnē ieejošo šķautņu numuru summa ir

$$(3a+1)+(3b+1)+3c=3(a+b+1).$$

Šī summa dalās ar 3.

42.10. Pareizi spēlējot var uzvarēt pirmais spēlētājs. Pirmajā gājienā tas apēd 5 konfektes un kaudzītē paliek 15 konfektes. Otrais spēlētājs var apēst ne vairāk kā 7 konfektes; tas nozīmē, ka kaudzītē paliks no 8 līdz 14 konfektēm. Tad pirmais apēd tik konfektes, lai kaudzītē atliktu 7 konfektes (tas ir iespējams).

Otrais spēlētājs var apēst ne vairāk kā 3 konfektes; tas nozīmē, ka kaudzītē paliks no 4 līdz 6 konfektēm. Tad pirmais apēd tik konfektes, lai kaudzītē atliktu 3 konfektes (tas ir iespējams).

Tagad otrajam ir jāēd 1 konfekte, paliek divas. Vienu noēd pirmais spēlētājs, paliek 1 konfekte, kuru otrs spēlētājs ēst nedrīkst -- līdz ar to viņš ir zaudējis.

42.11. a) Pirmās zvaigznītes vietā Andris ieraksta skaitli 1, iegūstot vienādojumu

$$1\cdot x+*=*,$$

kuram neatkarīgi, no tā kādi skaitļi tiks ierakstīti zvaigznīšu vietā ir tieši viens atrisinājums.

b) Andris ieraksta pirmās zvaigznītes vietā skaitli 0, bet otrajā gājienā skaitli, kas atšķirīgs no Bruno ierakstītā skaitļa. Iegūts vienādojums

$$0\cdot x+a=b,$$

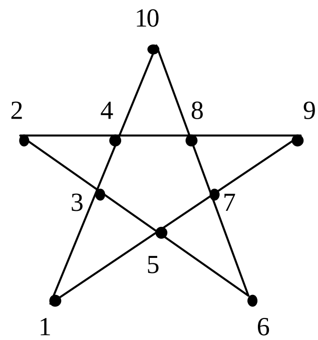
kuram nav atrisinājumu.

c) Andris ieraksta pirmās zvaigznītes vietā skaitli 0, bet otrajā gājienā skaitli, kas sakrīt ar Bruno ierakstīto skaitli. Iegūts vienādojums

$$0\cdot x+a=a,$$

kuram ir bezgalīgi daudz atrisinājumu.

42.12. To var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 42.7. zīm.



42.7. zīm.

42.13. Vispirms pierāda formulu $2 \cdot (1+2+3+\cdots+n) = n \cdot (n+1)$.

No nevienādībām

$$199 \cdot 200 = 39800 < 39860 = 2 \cdot 19920 < 40200 = 200 \cdot 201$$

seko, ka mazākais nepieciešamais naturālo skaitļu daudzums ir 200.

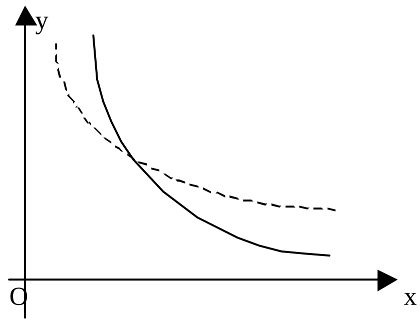
42.14. Apzīmēsim $3 \cdot A = B$, bet skaitļa x ciparu summu ar $S(x)$. Tad B dalās ar 3; $S(B)$ dalās ar 3; $S(A)$ dalās ar 3. No tā seko, ka A dalās ar 3 un B dalās ar 9; Tātad $S(B)$ dalās ar 9; $S(A)$ dalās ar 9 un A dalās ar 9.

42.15. Taisnstūri 9×15 var sadalīt 9 taisnstūros ar izmēriem 3×5 rūtiņas. Katrā no tiem jābūt vismaz vienai iekrāsotai rūtiņai, tāpēc iekrāsoto rūtiņu skaits nav mazāks par 9. Tas, ka pietiek iekrāsot 9 rūtiņas, redzams 42.8. zīm.

		X					X				X			
				X			X			X				
		X					X				X			

42.8. zīm.

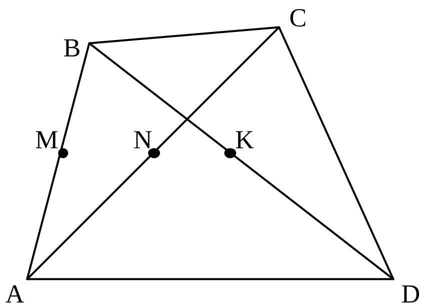
42.16. Nē, nevar būt.



42.9. zīm.

Šādi divi grafiki nevar krustoties: ja krustpunkta abscisa ir x un ordināta ir y, tad $a = x \cdot y = b$, bet tad grafikiem būtu pilnībā jāsakrīt.

42.17. Aplūkosim 42.10. zīm.



42.10. zīm.

$MK \parallel AD$ ka trijstūra ABD viduslīnija. Tātad aplūkojama taisne iet caur AC viduspunktu N paralēli trijstūra ACD pamatam AD, tātad tā ir trijstūra ACD viduslīnija un tāpēc krusto malu CD tās viduspunktā.

42.18. Pareizināsim otro vienādojumu ar z un atņemsim pirmo, pareizinātu ar t.

$$z \cdot (xt + 2yz) - t \cdot (xz - yt) = z - t \quad \Leftrightarrow y \cdot \left(2z^2 + t^2\right) = z - t \text{.}$$

Taču dots, ka neviens no skaitļiem nav 0, un tāpēc

$$\left| y \cdot \left(2z^2 + t^2\right)\right| \geq 2z^2 + t^2 > |z - t| \text{.}$$

Tātad šādi veseli skaitļi neeksistē.

42.19. Ievērosim, ka $1992 = 498 \cdot 4$. Visus punktus sadalīsim 498 četriniekos; vienā četriniekā iekļausim punktus ar kārtas numuriem

$$\begin{array}{llll} 1, & 498+1, & 2\cdot 498+1, & 3\cdot 498+1; \\ 2, & 498+2, & 2\cdot 498+2, & 3\cdot 498+2; \\ \dots & & & \\ 498 & 498+498, & 2\cdot 498+498, & 3\cdot 498+498. \end{array}$$

Šie četrinieki ir visu iespējamo kvadrātu virsotņu komplekti. Tā kā četrinieku ir 498, bet melno punktu ir tikai 492, tad ir vismaz $498-492=6$ četrinieki, kuriem visas virsotnes ir baltas. Ja visi melnie punkti pieder dažādiem četriniekiem, tad "balto" kvadrātu skaits ir tieši seši.

42.20. Apzīmēsim sudraba monētu masas ar $s_1 < s_2 < s_3 < s_4$, bet zelta monētu masas ar $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$.

Ar pirmo svēršanu salīdzinām s_1 ar z_1. Vieglāko no tām iekļaujam kopīgajā sarakstā kā vieglāko vispār. Katrā kārtējā solī salīdzinām vieglāko vēl kopējā sarakstā neiekļauto sudraba un vieglāko vēl kopējā sarakstā neiekļauto zelta monētu; vieglāko no tām iekļaujam kā kārtējo kopējā sarakstā. Vēlākais pēc 7 svēršanām vai nu sudraba, vai zelta minētu saraksts būs izsmelts, un atlikušas monētas no otra saraksta pievienosim kopējā saraksta galā jau zināmajā secībā.

Tagad pierādīsim, ka ar 6 svēršanām nepietiek. Apskatīsim 7 monētu pārus

$$(s_1, z_1),\ (s_2, z_2), (s_3, z_3), (s_4, z_4), (s_2, z_1), (s_3, z_2), (s_4, z_3).$$

Pieņemsim, ka izdarītas jau 6 svēršanas, kas visas beigušās ar rezultātiem

$s_i < z_k$, ja $i \le k$, un

$s_i > z_k$, ja $i > k$.

Svēršanas stratēģijai jābūt gatavai sakārtot monētas arī šādā situācijā. Vismaz viena minētā pāra monētas nav salīdzinātas savā starpā. Ja tas ir pāris (s_i, z_i), tad nav iespējams atšķirt sakārtojumu

$$s_1 < z_1 < \dots < s_i < z_i < s_{i+1} < z_{i+1} < \dots < s_4 < z_4$$

no sakārtojuma

$$s_1 < z_1 < \dots < s_{i-1} < z_{i-1} < z_i < s_i < s_{i+1} < \dots < s_4 < z_4 \quad .$$

Ja tas ir pāris (s_{i+1}, z_i), tad nav iespējams atšķirt sakārtojumu

$$s_1 < z_1 < \dots < s_i < z_i < s_{i+1} < z_{i+1} < \dots < s_4 < z_4$$

no sakārtojuma

$$s_1 < z_1 < \dots < s_{i-1} < z_{i-1} < s_i < s_{i+1} < z_i < z_{i+1} < \dots < s_4 < z_4 \quad .$$

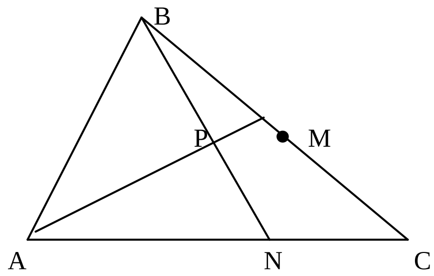
Tātad noteikti vajadzīga vēl viena svēršana.

42.21. Izsakot no otrā vienādojuma $y = 4 - x$ un ievietojot pirmajā vienādojumā, iegūsim vienādojumu

$$2x^2 - 8x + 9 = 0 .$$

Tā kā vienādojuma diskriminants $D = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9$ mazāks par 0, tad vienādojumam un arī sākotnējai vienādojumu sistēmai nav atrisinājumu.

42.22. Pieņemsim, ka $c < b$. Pagarināsim BP līdz krustpunktam N ar AC (skat. 42.3. zīm.).



42.3. zīm.

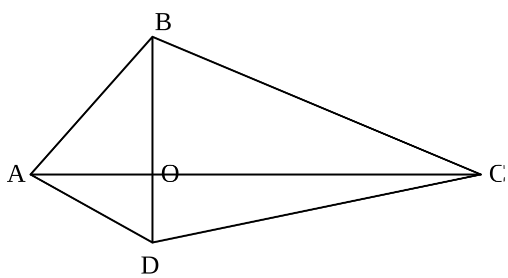
Tad trijstūrī *BAN* nogrieznis *AP* ir reizē augstums un bisektrise. Tāpēc $AN = AB = c$, $NC = b - c$ un $BP = PN$. Tātad PM kā trijstūra *NBC* viduslīnijas garums ir $\frac{b-c}{2}$.

Ja $c \geq b$, tad līdzīgi iegūstam, ka $PM = \frac{c-b}{2}$. Vispārīgajā gadījumā var atbildi pierakstīt šādi: $PM = \left|\frac{c-b}{2}\right|$.

42.23. Tādu skaitļu ir bezgalīgi daudz; piemēram, der skaitļi

$$\frac{59}{2} = 29.5 ; \frac{599}{2} = 299.5 ; \ldots .$$

42.24. Pieņemsim, ka diagonāles ir perpendikulāras (skat. 42.4. zīm.).

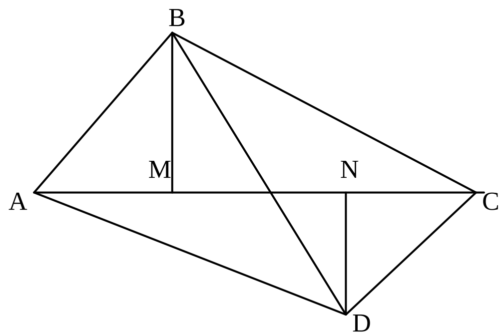


42.4. zīm.

Tad pēc Pitagora teorēmas

$$AB^2 + CD^2 = \left(AO^2 + OB^2\right) + \left(CO^2 + OD^2\right)$$
$$= \left(AO^2 + OD^2\right) + \left(BO^2 + OC^2\right) = AD^2 + BC^2.$$

Apgrieztais apgalvojums. Pieņemsim pretējo, ka $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$, bet diagonāles nav savstarpēji perpendikulāras (skat. 42.5. zīm.).



42.5. zīm.

Novilksim perpendikulus *BM* un *DN* pret diagonāli *AC*. Tā kā *AC* un *BD* nav perpendikulāri, tad $MN > 0$. Tad

$$AB^2 + CD^2 = AN^2 + MB^2 + CN^2 + ND^2,\ \text{bet}$$
$$AD^2 + BC^2 = AN^2 + ND^2 + BM^2 + MC^2.$$

No šejienes seko, ka

$$AM^2 + CN^2 = AN^2 + CM^2.$$

Bet tā nevar būt, jo $AM < AN$ un $CN < CM$ (vai otrādi). Iegūta pretruna.

42.25. To var izdarīt, piemēram, tā kā parādīts 42.6. zīm.

7	$2\cdot 11$	$3\cdot 13$	$5\cdot 17$
$2\cdot 17$	3	$5\cdot 11$	$3\cdot 7$
$3\cdot 11$	$5\cdot 7$	17	$2\cdot 13$
$5\cdot 13$	$3\cdot 17$	$2\cdot 7$	11

42.6. zīm.

42.26. Aplūkosim aritmētisko progresiju, kuras pirmais loceklis ir *a*, bet diference ir *d*. Tad desmit pirmo locekļu summa ir

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = s_1..$$

Nākošo desmit locekļu summa ir

$$a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{20} = \left(a_1 + 10d\right) + \left(a_2 + 10d\right) + \cdots + \left(a_{10} + 10d\right) =$$
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} + 100d = s_1 + 100d\ .$$

Līdzīgi pierāda, ka katru nākošo 10 locekļu summa ir par 100*d* lielāka par iepriekšējo; tātad šīs summas veido aritmētisku progresiju.

42.27. Atzīmēsim lielākā kopīgā dalītāja pamatīpašību:

$$(a, b) = (a, b + ka),$$

kur k -- patvaļīgs vesels skaitlis. Tātad

$$(a_{1991}, a_{1992}) = (a_{1991}, a_{1992} - a_{1991}) = (a_{1991}, a_{1990}) = (a_{1991} - a_{1990}, a_{1990}) =$$
$$(a_{1989}, a_{1990}) = \cdots = (a_1, a_2) = (19, 32) = 1.$$

42.28. Tā kā $x^2 \geq 0$, tad dotais vienādojums ekvivalents apgalvojumam

$$x^2 = x - a \quad \text{vai} \quad x^2 = a - x \ .$$

Tātad uzrādītajiem vienādojumiem kopā jābūt trim saknēm. Tas iespējams trīs gadījumos:

1) Pirmajam vienādojumam ir divas saknes, otrajam -- viena, atšķirīga no pirmā vienādojuma saknēm. Tātad otrā vienādojuma $x^2 + x - a = 0$ diskriminants $D = 1 - 4a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{4}$.

2) Otrajam vienādojumam ir divas saknes, pirmajam -- viena, atšķirīga no otrā vienādojuma saknēm. Līdzīgi iegūstam, ka $a = -\frac{1}{4}$.

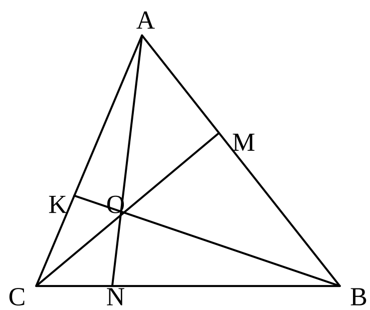
3) Abiem vienādojumiem ir divas saknes, bet viena ir kopīga. Apzīmēsim kopīgo sakni ar c. Iegūstam divas vienādības

$$\begin{cases} c^2 = c - a \\ c^2 = a - c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c - a = a - c \quad \Rightarrow \quad c = a .$$

Ievietojot pirmajā vienādībā $c = a$, iegūstam $a^2 = a - a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$.

Pārbaude parāda, ka visas trīs iegūtās a vērtības der.

42.29. Aplūkosim 42.7. zīm.

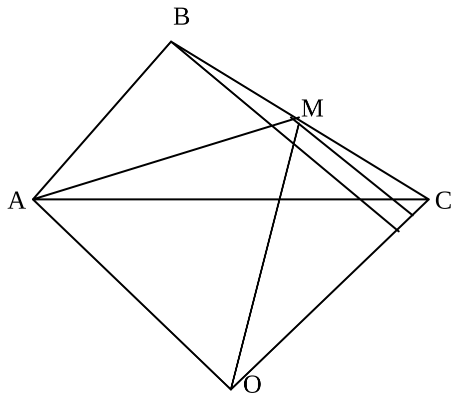


42.7. zīm.

Trijstūra *CAB* augstums pret malu *CB* attiecas pret trijstūra *COB* augstumu pret malu *CB* tāpat kā *AN* pret *ON*. No šejienes seko, ka $\dfrac{ON}{AN}=\dfrac{S_{COB}}{S_{CAB}}$. Līdzīgi pierāda vienādības $\dfrac{OK}{BK}=\dfrac{S_{AOB}}{S_{ACB}}$ un $\dfrac{OM}{CM}=\dfrac{S_{BOC}}{S_{ABC}}$. Tātad

$$\frac{ON}{OM}+\frac{OK}{BK}+\frac{OM}{CM}=\frac{S_{COB}}{S_{CAB}}+\frac{S_{AOB}}{S_{ACB}}+\frac{S_{BOC}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1.$$

42.30. Aplūkosim zīm. 42.8.



42.8. zīm.

Apzīmēsim ap trijstūri *AMC* apvilktās riņķa līnijas ω centru ar *O*, bet rādiusu ar *R*. Tad $\angle MOC=2\angle MAC=30°$ (kā centra leņķis un ievilktais leņķis, kas balstās uz vienu loku).

Tā kā $\angle MCA$ ir ievilkts leņķis un $\angle MCA=\angle MAB$, tad $\angle MAB$ ir hordas pieskares leņķis un *AB* ir riņķa līnijas ω pieskare; tātad $\angle OAB=90°$.

Punkta *M* attālums līdz *OC* ir $OM\cdot\sin\angle MOC=\dfrac{R}{2}$, tāpēc *B* attālums līdz *OC* ir $2\cdot\dfrac{R}{2}=R=OA$. Tāpēc

$$AB\parallel OC;\ \angle AOC=90° \text{ un } \angle CAO=\angle ACO=45°.$$

No šejienes seko, ka

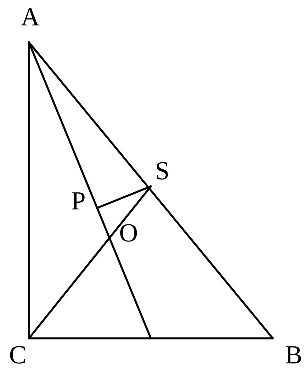
$$\angle ACB=\angle MAB=\angle BAC-\angle MAC=45°-15°=30°.$$

42.31. Ja $P(x)$ vai $Q(x)$ ir nulles polinoms, tad otrs var būt jebkāds polinoms (to var viegli pārbaudīt).

Ja viens no polinomiem ir konstante, piemēram, $P(x)=a$, $a\neq 0$. Tad $P'(x)=0$ un $(a\cdot Q(x))'=0\cdot Q'(x)=0$; tātad $Q'(x)=0$ un $Q(x)=b$. Tātad otrs variants ir, ka abi polinomi ir patvaļīgas konstantes.

Ja neviens no polinomiem nav konstante un $P(x)$ pakāpe ir *n*, bet $Q(x)$ pakāpe ir *m*, tad $(P(x)Q(x))'$ pakāpe ir $m+n-1$, bet $P'(x)Q'(x)$ pakāpe ir $m+n-2$. Tātad šajā gadījumā vienādība nav iespējama.

42.32. Aplūkosim 42.9. zīm.



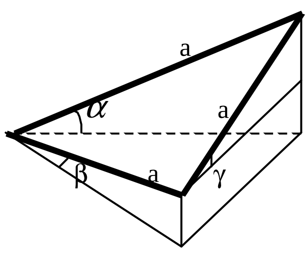
42.9. zīm.

Pret trijstūra *ABC* hipotenūzu *AB* novelkam mediānu *CS*. Tad $CS = \frac{1}{2}AB = AS$. Apzīmēsim mediānu krustpunktu ar *O*. Tad $OS = \frac{1}{3}CS = \frac{1}{3}AS$. No šejienes seko prasītais:

$$\sin\alpha = \frac{SP}{AS} \le \frac{OS}{AS} = \frac{1}{3} .$$

42.33. Novelkam caur plaknei π tuvāko virsotni plakni π_1, kas paralēla π. Leņķi ar plakni π_1 ir tādi paši kā ar plakni π.

Tālākās virsotnes "augstums" virs π_1 ir $a\sin\alpha$ (skat. 43.4. zīm.)



43.4. zīm.

Tas sastāv no diviem nogriežņiem, kuru garumi ir $a\sin\beta$ un $a\sin\gamma$. Tātad $\sin\alpha = \sin\beta + \sin\gamma$.

42.34. a) Nē, tādu daļu nav. Sadalīsim skaitli 1992 pirmreizinātājos:

$$1992 = 2^3 \cdot 3 \cdot 8;$$

Nesaīsināma racionāla daļa pārveidojas par galīgu decimālskaitli tad un tikai tad, kad tās skaitītājs satur tikai pirmreizinātājus 2 un 5; šajā gadījumā ir arī pirmreizinātājs 3, tātad rezultātā iegūsim bezgalīgu periodisku decimāldaļu, un prasītā vienādība nav iespējama.

b) Tas ir iespējams; piemēram, $\frac{22514}{8} = 2814{,}25$.

c) Nē, tādu daļu nav. Šāda vienādība dod pretrunu pēc moduļa 9.

42.35. Patvaļīgiem naturāliem *a* un *b* izpildās vienādība

$$f\left(f(1)+a+b\right)= f\left(f(1)\right)+ f\left(f(a)+ f(a)\right)=1+ f(a)+ f(b).$$

Tātad $f(a)+ f(b)$ vērtība ir atkarīga tikai no skaitļu *a* un *b* summas. Tas nozīmē, ka

$$f(n+1)+ f(1)= f(n)+ f(2) \quad \Rightarrow$$

$$f(n+1)- f(n)= f(2)- f(1)= a .$$

Tātad $f(n)$ ir aritmētiska progresija: $f(n)= an+b$.

Tālāk, ievietojot pamatidentitātē vērtības $a=1, b=1$ un $a = 2, b=1$, iegūstam

$$f\left(f(1)+ f(1)\right)=1+1=2= f\left((a+b)+(a+b)\right)= f(2a+2b)= a\cdot(2a+2b)+b,$$

$$f\left(f(2)+ f(1)\right)=2+1=3= f\left((2a+b)+(a+b)\right)= f(3a+2b)= a\cdot(3a+2b)+b.$$

Risinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2a^2+2ab+b=2 \\ 3a^2+2ab+b=3 . \end{cases}$$

iegūstam $a^2=1$ (tātad $a=1$, jo funkcijas vērtības ir naturāli skaitļi) un $b=0$.

Tātad $f(n)=n$.

42.36. Ievērosim, ka $\log_x y\cdot\log_y x=\log_x x=1$. Apzīmēsim $\log_x y=a$. Tad mums ir jāpierāda nevienādība

$$a+\frac{1}{a}\ge 2, \quad \text{kur } a \text{ pozitīvs skaitlis.}$$

Tā seko no nevienādības starp skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko. Tiešām

$$a+\frac{1}{a}\ge 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2 .$$

42.37. No nevienādībām $|\sin x|\le 1$ un $|\sin 2x|\le 1$ seko, ka prasītā vienādība var izpildīties tikai, ja $\sin x=\sin 2x=\pm 1$. Taču tas nav iespējams; jo no vienādības $\sin x=\pm 1$ seko, ka $\cos x=\sqrt{\sin^2 x-1}=0$ un $\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x=0$.

Tātad vienādojumam nav atrisinājumu.

42.38. Piramīda sadalās 14 daļās.

42.39. Ja $0 \le x \le y \le z \le 1$, tad

$$1 - S = \left(1 - z^3\right) + x^2\left(y - x\right) + y^2\left(z - y\right) + z^2 x \ge 0.$$

Ja $0 \le y \le x \le z \le 1$, tad

$$1 - S = \left(1 - z^3\right) + x\left(z^2 - x^2\right) + y\left(x^2 - y^2\right) + y^2 z \ge 0.$$

Citi gadījumi reducējas uz vienu no apskatītajiem. Tātad $S \le 1$. Ja, piemēram, $x = 1$ un $y = z = 0$, tad $S = 1$. Tātad meklējamais minimums ir 1.

42.40. Nē nevar. Iekrāsosim rūtiņas šaha galdiņa kārtībā. Skaidrs, ka katrā gājienā tīģeris pāriet uz pretējās krāsas lauciņu.

No otras puses, sauksim 1., 2., 6., 7., 11., 12 horizontāles par labām, bet citas -- par sliktām. Labo un slikto rūtiņu skaits ir vienāds. No katras labās rūtiņas tīģeris var aiziet tikai uz slikto rūtiņu. Tas nozīmē, ka arī no sliktās rūtiņas viņam jāatgriežas labā rūtiņā. Bet, tātad, viņam jāmaina labās un sliktās rūtiņas tādā pašā kārtībā kā baltās un melnās; tas nozīmē, ka visas labās rūtiņas ir vienas krāsas, bet tā ir pretruna.