Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 42. OLIMPIĀDE

5. klase

42.1. No cipariem 1, 2, 3, 4, 5, 6, katru no tiem izmantojot tieši vienu reizi, sastādīt divus naturālus skaitļus, kas savā starpā atšķiras mazāk nekā par 50. Pietiek parādīt vienu veidu, ka to izdarīt.

42.2. Naturāla skaitļa ciparu summa ir 23, un tā pierakstā nav nuļļu. Kāds ir

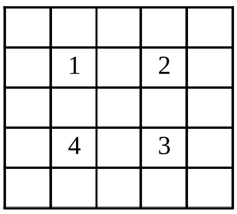
a) mazākais,

b) lielākais skaitlis ar šādām īpašībām?

42.3. Katru naturālu skaitli no 1 līdz 1992 dala ar 7 ar atlikumu. Kāda ir visu iegūto atlikumu summa?

42.4. Cik dažādu krustpunktu var būt 6 taisnes nogriežņiem? Uzrādiet visas iespējas un pierādiet, ka citu bez uzrādītajām nav.

42.5. Tukšajās rūtiņās (42.1. zīm.) ierakstīti naturāli skaitļi no 5 līdz 36 (katrā rūtiņā - cits skaitlis). Pierādīt, ka atradīsies divas rūtiņas ar kopēju malu, kurās ierakstītie skaitļi atšķiras viens no otra vismaz par 16.



42.1. zīm.

6. klase

42.6. Visapkārt Smaragda pilsētas galvenajam laukumam uzceltas mājas. Lauva un Putnubiedēklis iet apkārt laukumam, skaitīdami mājas. Viņi iet vienā virzienā, bet kustības dažādās vietās. Tā māja, kas Lauvam bija piektā, Putnubiedēklim bija divpadsmitā; tā māja, kas Putnubiedēklim bija piektā, Lauvam bija trīsdesmitā. Cik māju atrodas apkārt laukumam?

42.7. Jānis sareizināja divus trīsciparu skaitļus. Vai var gadīties, ka visi cipari, kas ietilpst reizinātajos un reizinājuma, ir dažādi?

42.8. No visiem 10 cipariem, izmantojot katru tieši vienu reizi, sastādīt divus naturālus skaitļus, kas savā starpā atšķiras mazāk nekā par 250. Pietiek pierādīt vienu veidu, ka to izdarīt.

42.9. Vai kuba šķautnes var sanumurēt ar skaitļiem no 1 līdz 12 (katru šķautni -- ar citu skaitli) tā, lai katru tādu triju šķautņu numuru summa, kuras iziet no vienas virsotnes, dalītos ar 3?

42.10. Uz galda atrodas 20 konfekšu kaudzīte. Divi spēlētāji pēc kārtas ēd konfektes no kaudzītes. Ar katru gājienu drīkst apēst ne vairāk kā pusi kaudzītē palikušo konfekšu. Kas nevar izdarīt gājienu, zaudē.

Kas uzvar, pareizi spēlējot -- tas, kas izdara pirmo gājienu, vai viņa pretinieks? Kā jāspēlē, lai uzvarētu?

7. klase

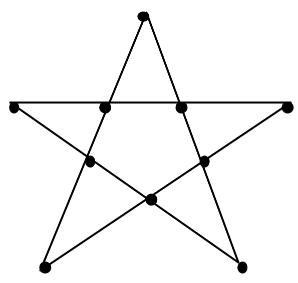
42.11. Andris ieraksta skaitli vienas (jebkuras) zvaigznītes vietā (skat. 42.2. zīm.); pēc tam Bruno -- otras, pēc tam Andris -- palikušās zvaigznītes vietā:

$$* x + * = * .$$

Pierādīt, ka Andris var panākt jebkuru no trim situācijām:

a) vienādojumam ir tieši viens atrisinājums,
b) vienādojumam nav atrisinājumu,
c) vienādojumam ir bezgalīgi daudz atrisinājumu.

42.12. Pierādīt, ka piecstūra zvaigznes 10 virsotnes (skat. 42.2. zīm.) var tā sanumurēt ar skaitļiem no 1 līdz 10, lai uz katras no 5 taisnēm esošie 4 skaitļi būtu izvietoti augošā vai dilstošā secībā.



42.2. zīm.

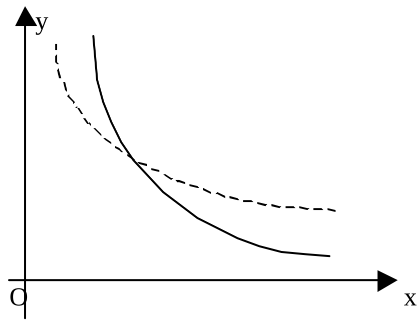
42.13. . Kāds mazākais daudzums pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu, sākot ar 1, jāsaskaita, lai iegūtā summa pārsniegtu 19920 ?

42.14. Skaitli *A* pareizinot ar 3, tā ciparu summa nemainās.
Pierādīt, ka *A* dalās ar 9.

42. 15. Kādu mazāko skaitu rūtiņu jānokrāso melnas taisnstūrī ar izmēriem 9×15 rūtiņas, lai katrā taisnstūrī ar izmēriem 3×5 rūtiņas atrastos vismaz viena melna rūtiņa?

8. klase

42.16. Vai 42.3. zīm. attēlotie grafiki var būt funkciju $y=\frac{a}{x}$ un $y=\frac{b}{x}$ grafiki pie $x>0$. Mērogi uz asīm var būt atlikti ļoti neprecīzi.



42.3. zīm.

42.17. Izliektā četrstūrī *ABCD* trīs punkti -- malas *AB* viduspunkts un diagonāļu *AC* un *BD* viduspunkti -- atrodas uz vienas taisnes.
Pierādīt, ka arī malas *CD* viduspunkts atrodas uz šīs pašas taisnes

42.18. Vai pastāv tādi veseli skaitļi *x*, *y*, *z* un *t*, starp kuriem neviens nav 0, ka abas vienādības

$xz-yt=1$ un $xt+2yz=1$

ir pareizas.

42.19. Uz riņķa līnijas atzīmēti 1992 punkti, kas to sadala 1992 vienādos lokos. No šiem punktiem 1500 nokrāsoti balti, bet 492 -- melni.

a) Pierādīt, ka ir vismaz 6 kvadrāti, kam visas virsotnes atrodas atzīmētajos baltajos punktos.

b) Pierādīt, ka var gadīties, ka vairāk par 6 šādiem kvadrātiem nav.

42.20. Par četrām sudraba monētām zināma to masu secība: kura ir visvieglākā, kura -- otra vieglākā utt. Tas pats zināms par četrām zelta monētām. Par zelta un sudraba monētu masu attiecībām zināms tikai tas, ka nav divu monētu ar vienādu masu. Doti sviru svari bez atsvariem; uz katra to kausa vienlaicīgi var atrasties augstākais viena monēta.

a) Pierādīt, ka ar 7 svēršanām var noskaidrot visu 8 monētu secību

b) Pierādīt, ka 7 ir mazākais svēršanu skaits, kas garantē šīs secības atrašanu.

9. klase

42.21. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ x + y = 4 . \end{cases}$$

42.22. Trijstūrī *ABC* no virsotnes *B* novilkts perpendikuls pret leņķa *A* bisektrisi. Perpendikula pamatu apzīmējam ar *P*, bet malas *BC* viduspunktu ar *M*. Dots, ka $AB = c$ un $AC = b$. Aprēķināt *MP*.

42.23. Pārveidojot daļu $\frac{5}{2}$ decimāldaļskaitlī, tās pierakstā izmanto tos pašus ciparus tai pašā daudzumā, ko sākotnējās daļas pierakstā: $\frac{5}{2} = 2{,}5$. Cik ir daļu ar šādu īpašību? (Skaitītājam un saucējam jābūt naturāliem skaitļiem, kas nedalās ar 10; nulles decimāldaļas beigās netiek rakstītas.)

42.24. Pierādīt, ka izliektā četrstūrī *ABCD* diagonāles *AC* un *BD* ir savstarpēji perpendikulāras tad un tikai tad, kad

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 .$$

42.25. Tabula sastāv no 4×4 rūtiņām. Vai var rūtiņās ierakstīt naturālus skaitļus (tiem visiem jābūt dažādiem), kas nepārsniedz 100, lai visās rindiņās un visās kolonnās četru ierakstīto skaitļu reizinājumi būtu vienādi.

10. klase

42.26. Bezgalīgas aritmētiskas progresijas locekļi sadalīti grupās pa desmit: pirmie desmit locekli, otrie desmit locekļi, utt. Pierādīt, ka šo grupu skaitļu summas arī veido arī veido aritmētisku progresiju.

42.27. Skaitļu virkne (a_i) tiek definēta šādi:

$$a_1 = 19,\ a_2 = 32;\quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1},\ \text{ja } n = 1, 2, 3, \dots\ .$$

Atrast skaitļu a_{1991} un a_{1992} lielāko kopīgo dalītāju.

42.28. Kādām *a* vērtībām vienādojumam

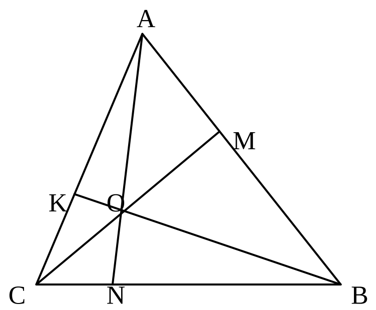
$$x^2 = |x - a|$$

ir tieši trīs dažādas saknes?

42.29. Uz trijstūra *ABC* malām *AB*, *BC*, *CA* ņemti atbilstoši punkti *M*, *N*, *K*; Nogriežņi *AN*, *BK*, *CM* krustojas punktā *C*. Pierādīt, ka

$$\frac{ON}{AN} + \frac{OK}{BK} + \frac{OM}{ON} = 1.$$

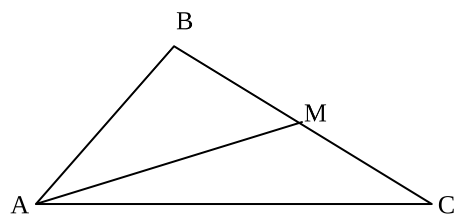
Skat. 42.1. zīm.



42.1. zīm.

42.30. Trijstūrī *ABC* punkts *M* ir malas *BC* viduspunkts. Zināms, ka $\angle MAC = 15°$ un $\angle BAM = \angle ACB$ (skat. 42.2. zīm.).

Aprēķināt leņķi $\angle ACB$.



42.2. zīm.

11. klase

42.31. Atrast visus tādus polinomus $P(x)$ un $Q(x)$, ka

$$(P(x)\cdot Q(x))' = P'(x)\cdot Q'(x).$$

42.32. Taisnleņķa trijstūrī hipotenūza un mediāna pret vienu no katetēm veido leņķi α. Pierādiet, ka $\sin\alpha \le \frac{1}{3}$.

42.33. Regulārs trijstūris atrodas vienā pusē no plaknes π; tā malas veido ar plakni leņķus α, β un γ; pie tam $\alpha > \beta$ un $\alpha > \gamma$.

Pierādīt, ka

$$\sin\alpha = \sin\beta + \sin\gamma .$$

42.34. Pārveidojot daļu $\frac{5}{2}$ decimāldaļskaitlī, tās pierakstā izmanto tos pašus ciparus tai pašā daudzumā, ko sākotnējās daļas pierakstā: $\frac{5}{2} = 2{,}5$. Vai pastāv tāds naturāls *m*, ka tāda pati īpašība piemīt daļai

a) $\frac{m}{1992}$,

b) $\frac{m}{8}$,

c) $\frac{m}{16384}$?

(Skaitītājam *m* jābūt naturālam skaitlim, kas nedalās ar 10; nulles decimāldaļas beigās netiek rakstītas.)

42.35. Funkcija $f(n)$ definēta naturālām *n* vērtībām, un tās vērtības ir naturāli skaitļi. Visiem naturāliem *a* un *b* pastāv vienādība

$$f\left(f(a) + f(b)\right) = a + b .$$

Atrast visas tādas funkcijas $f(n)$.

12. klase

42.36. Atrisināt vienādojumu

$$\sin x \cdot \sin 2x = 1 .$$

42.37. Dots, ka $x > 1$ un $y > 1$. Pierādīt, ka $\log_x y + \log_y x \ge 2$.

42.38. Trijstūra piramīdas iekšpusē atrodas punkts P. Caur to novilktas četras dažādas plaknes, kas katra paralēla vienai no piramīdas skaldnēm. Cik daļās šīs plaknes sadala piramīdu?

42.39. Dots, ka $0 \le x, y, z \le 1$. Atrast izteiksmes

$$S = x^3 + y^3 + z^3 - x^2 y - y^2 z - z^2 x$$

lielāko iespējamo vērtību.

42.40. Kvadrāts sastāv no 12×12 rūtiņām. Figūra "tīģeris" ar vienu gājienu pārvietojas vienlaicīgi par 2 rūtiņām horizontālā un 3 rūtiņām vertikālā virzienā vai par 3 rūtiņām horizontālā un 2 rūtiņām vertikālā virzienā, protams, neizejot ārpus kvadrāta robežām.

Vai "tīģeris" var apstaigāt visas rūtiņas, katrā nonākot tieši vienu reizi, un ar pēdējo gājienu atgriezties sākotnējā rūtiņā.