Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 45. OLIMPIĀDE

5. klase

45.1. Sauksim skaitli par patīkamu, ja tā pierakstā izmantoti cipari 1; 2; 3; 4; 5; 6, katrs tieši vienu reizi.
Uzrakstiet sešus lielākos patīkamos skaitļus dilstošā kārtībā.

45.2. Istabā atrodas 5 zēni. Katrs no tiem vai nu vienmēr runā patiesību, vai vienmēr melo. Uz jautājumu "Cik starp jums ir meļu?" visas atbildes bija dažādas, tās bija naturāli skaitļi vai nulle, un neviena nepārsniedz 5. Pierādiet, ka viena no atbildēm noteikti bija 4.

45.3. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Iezīmējiet dažās rūtiņās pa krustiņam tā, lai vienlaicīgi izpildītos šādas 2 īpašības:

a) visās rindiņās ir atšķirīgs krustiņu skaits (varbūt kādā 0);

b) visās kolonās ir viens un tas pats krustiņu skaits.

Pietiek uzrādīt vienu piemēru.

45.4. Četrciparu skaitļa pēdējo ciparu pārcēla uz skaitļa sākumu. Iegūtais četrciparu skaitlis bija 6 reizes mazāks par sākotnējo. Vai tā var būt?

45.5. Kuba virsotnēs ierakstīti dažādi veseli pozitīvi skaitļi, kas nepārsniedz 12. Katrai šķautnei aprēķināja tās galos ierakstīto skaitļu starpību, no lielākā atņemot mazāko. Pierādīt, ka starp iegūtajām starpībām vismaz divas būs vienādas.

6. klase

45.6. Ar cik nullēm beidzas reizinājums

$$10\cdot11\cdot12\cdot\cdots\cdot28\cdot29\cdot30\ ?$$

45.7. Atrodiet kaut vienu tādu skaitli *a*, ka vienlaicīgi izpildās sekojošas īpašības:

1) noapaļojot *a*, 3*a*, 5*a*, 7*a* līdz veselam skaitlim, jānoapaļo uz leju;

2) noapaļojot 2*a*, 4*a*, 6*a* līdz veselam skaitlim, jānoapaļo uz augšu.

45.8. a) Vai var salikt kvadrāta kontūru no 8 stienīšiem, kuru garumi ir

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ?

b) Vai var salikt kvadrāta kontūru no 100 stienīšiem, kuru garumi ir

1, 2, 3, …, 99, 100 ?

45.9. Kvadrāts sastāv no 6×6 rūtiņām. Iezīmējiet dažās rūtiņās pa krustiņam tā, lai vienlaicīgi izpildītos šādas 2 īpašības:

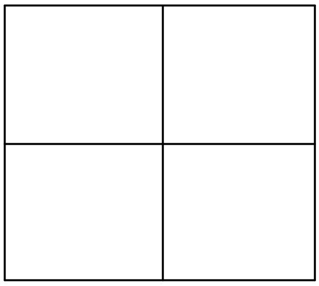
a) visās rindiņās ir atšķirīgs krustiņu skaits;

b) visās kolonnās ir viens un tas pats krustiņu skaits.

Pietiek uzrādīt vienu piemēru.

45.10. Parka celiņi veido režģi, kas sastāv no 4 kvadrātiem (skat. 45.1. zīm.). Pa celiņiem skraida Andris, Aivars un Jānis. Andra un Aivara maksimālie ātrumi ir vienādi. Jāņa maksimālais ātrums ir 3 reizes lielāks.

Vai Andris un Aivars, saskaņoti darbojoties, var noķert Jāni? (Nokāpt no celiņiem nedrīkst).



45.1. zīm.

7. klase

45.11. Noskaidrojiet

a) vai visu naturālo skaitļu reizinājums no 1 līdz 76 ieskaitot dalās ar 77;

b) vai visu naturālo skaitļu reizinājums no 1 līdz 100 ieskaitot dalās ar 101 ?

45.12. Pa apli izrakstīti 7 skaitļi; neviens no tiem nav 0. Pierādiet: var atrast divus blakus uzrakstītus skaitļus, kuru reizinājums ir pozitīvs.

45.13. Plaknē uzzīmētas 10 riņķa līnijas. Andris atrada 91 dažādu, katrs no kuriem pieder divām riņķa līnijām.
Pierādiet, ka vismaz divas no šīm 10 riņķa līnijām sakrīt.

45.14. Mežā dzīvo 10 rūķīši. Katru vakaru daži no viņiem sēž mājās, bet pārējie apciemo visus mājās sēdētājus.
Pierādīt: pietiek ar piecām dienām, lai katrs rūķītis būtu apciemojis katru citu.

45.15. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Vai var dažās rūtiņās iezīmēt pa krustiņam tā, lai visās rindiņās krustiņu skaits būtu dažāds, bet katrā kolonnā būtu atzīmēti

a) trīs krustiņi;

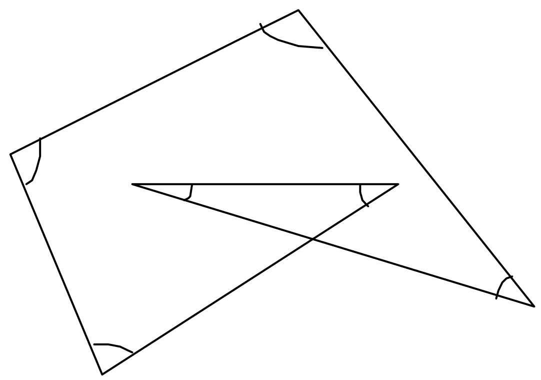
b) četri krustiņi ?

8. klase

45.16. Dots, ka *a*, *b*, *c* -- dažādi naturāli skaitļi. Kāds lielākais daudzums no skaitļiem $a+b$, $a+c$, $b+c$ var būt pirmskaitļi.

45.17. Dots, ka $x^2 + x - 1 = 0$. Pierādīt, ka $x^4 + x^3 + x - 1 = 0$.

45.18. Aprēķināt 45.2. zīm. atzīmēto leņķu lielumu summu.



45.2. zīm.

45.19. Konferencē piedalās 10 cilvēki; katrs ir pazīstams ar vismaz 5 citiem. Pierādiet, ka var izvēlēties 4 cilvēkus un nosēdināt viņus ap apaļu galdu tā, lai katram abās pusēs sēdētu paziņas.
(Uzskatām: ja *A* pazīstams ar *B*, tad *B* pazīstams ar *A*).

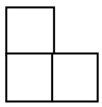
45.20. Jānis uzzīmēja astoņstūri. Pierādiet: var atrast taisni, kura satur tieši vienu (ne vairāk un ne mazāk) astoņstūra malu.

9. klase

45.21. Dots, ka katram no vienādojumiem $x^2 + px + q = 0$ un $x^2 + ax + b = 0$ ir saknes. Pierādiet, ka arī vienādojumam $x^2 + apx + bq = 0$ ir sakne. Visi vienādojumu koeficienti ir pozitīvi.

45.22. Trijstūra malu garumi ir *a*, *b*, *c* ($a > b > c$); viens no trijstūra leņķiem ir $60°$ liels. Pierādīt, ka eksistē trijstūris, kura malu garumi ir *a*, *b*, $a - c$ un viens no leņķiem arī ir $60°$ liels.

45.23. Kvadrāts sastāv no 6×6 rūtiņām. Kādu mazāko daudzumu tādu "stūrīšu", kāds redzams 45.1. zīmējumā, var no tā izgriezt, lai no atlikušās kvadrāta daļas vairs nevarētu izgriezt nevienu stūrīti ?



45.1. zīm.

45.24. Par trisektoru sauc ierīci, kas jebkuru nogriezni ļauj sadalīt 3 vienādās daļās. Kā, izmantojot lineālu un trisektoru, bet neizmantojot cirkuli, var atrast nogriežņa viduspunktu?

45.25. Pierādiet, ka katram naturālam *n* reizinājums

$$n \cdot (13n + 1) \cdot (19n + 2)$$

a) dalās ar 2,

b) dalās ar 6.

10. klase

45.26. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x + y = 3\,. \end{cases}$$

45.27 Daudzstūris ievilkts riņķī. Visi tā leņķi savā starpā vienādi, bet starp tā malām ir arī dažādas. Pierādīt, ka daudzstūrim ir pāra skaits virsotņu.

45.28. Dots, ka *x*, *y*, *z*, *t* ir nepāra skaitļi. Pierādīt, ka reizinājums

$$(x-y)\cdot(x-z)\cdot(x-t)\cdot(y-z)\cdot(y-t)\cdot(z-t)$$

a) dalās ar 64,

b) dalās ar 256,

c) dalās ar 768.

45.29. Rindā nostādīti 10 zēni un 10 meitenes. Divus bērnus var mainīt vietām tad, ja starp tiem stāv ne vairāk kā 9 citi.

a) Pierādīt, ka ar 10 maiņām noteikti pietiek, lai panāktu, ka vispirms stāv 10 zēni, bet pēc tam -- 10 meitenes.

b) Pierādīt, ka sākuma situācija var būt tāda, ka ar 9 maiņām to izdarīt nevar.

45.30. Dotā trijstūra malu garumi ir *a*, *b*, *c*. Pierādīt nevienādību

$$(a+b+c)^2 < 4\cdot(ab+ac+bc).$$

11. klase

45.31. Dots, ka a un b -- naturāli skaitļi un gan $3a+4b$, gan $2a+3b$ dalās ar 7. Pierādīt, ka gan *a*, gan *b* dalās ar 7.

45.32. Uz tāfeles uzrakstīja 2 naturālus skaitļus (varbūt vienādus). Pēc tam rakstīja trešo, ceturto, … skaitli pēc šāda likuma: katrs nākošais skaitlis vienāds ar abu iepriekšējo summu. Zināms, ka kādreiz uz tāfeles parādījās skaitlis 81. Kāds lielākais daudzums skaitļu varēja tikt uzrakstīts pirms tam ?

45.33. Uzzīmēt kaut vienu 9-stūri ar īpašību: katra no 9 taisnēm, kas satur kādu no 9-stūra malām, krusto 9-stūra iekšpusi.

45.34. Divas riņķa līnijas krustojas punktos *M* un *N*. Uz vienas no tām ārpus otras ņemts punkts *K*. Taisnes *KM* un *KN* krusto otru riņķa līniju atbilstoši punktos *A* un *B* tā, ka *M* atrodas starp *A* un *K*, bet *N* -- starp *B* un *K*. Pierādīt, ka taisne *AB* paralēla pirmās riņķa līnijas pieskarei punktā *K*.

45.35. Kādā valstī ir n pilsētas ($n \geq 2$). Katras divas no tām savieno tieši viens vienvirziena ceļš. Ceļu krustpunktu ārpus pilsētām nav (izmantoti viadukti). Pierādīt, ka atradīsies tāda pilsēta, no kuras var pakāpeniski apceļot visas pārējās pilsētas, braucot tikai pa ceļiem un katrā pilsētā nonākot tieši vienu reizi (beigās nav jāatgriežas sākuma pilsētā).

12. klase

45.36. Vai var atrast tādu *x*, ka

$$\operatorname{ctg} x < \sin x < \cos x < \operatorname{tg} x \quad ?$$

45.37. Dots, ka *n* ir pirmskaitlis, $n > 5$. Pierādīt, ka

$n^4 - 5n^2 + 4$ dalās ar 45.

45.38. Divas riņķa līnijas krustojas punktos *M* un *N*. Tām novilktas kopējās ārējās pieskares; pieskaršanās punkti ir trapeces virsotnes.
Pierādīt, ka *M* un *N* atrodas uz šīs trapeces viduslīnijas.

45.39. Kuba šķautnes garums ir 1. Tā iekšpusē atrodas 9 figūras, kuru tilpumu summa pārsniedz 8. Pierādīt, ka ir tāds punkts, kas vienlaicīgi pieder visām figūrām.

45. 40. Kādā valstī ir n pilsētas ($n \geq 2$). Katras divas no tām savieno abpusēja aviolīnija (bez nolaišanās citās pilsētās). Katra aviolīnija pieder vienai no divām kompānijām.
Pieradīt: vismaz ar vienas kompānijas aviolīnijām (neizmantojot otras pakalpojumus) var no katras pilsētas nokļūt katrā citā.

Materiālā izmantota izstrādne: A. Andžāns, L. Eglīte, I. Jēkabsone, K. Lomanovska, E. Broka, A. Cauka "Matemātikas sacensības 5. - 9. klasēm 1994./95. mācību gadā". Zīmējumu numerācija saglabāta kā minētajā izstrādnē.
Materiāls satur 5.-9. klašu rajona matemātikas olimpiādes uzdevumus, atrisinājumus, kā arī ievaduzdevumus un to atrisinājumus.

Rajona 1994./95.m.g. matemātikas olimpiādes

IEVADUZDEVUMI (5. - 8. klase)

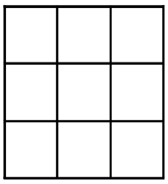
1. uzdevums. No cipariem 1; 2; 3 izveidot 3 vislielākos trīsciparu skaitļus, ja katra skaitļa pierakstā katrs cipars izmantots tieši vienu reizi.

3. uzdevums. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām (skat. 48. zīm.). Iezīmējiet dažās rūtiņās pa krustiņam tā, lai vienlaicīgi izpildītos šādas 2 īpašības:

a) visās rindiņās ir atšķirīgs krustiņu skaits (varbūt kādā 0);

b) visās kolonās ir viens un tas pats krustiņu skaits!

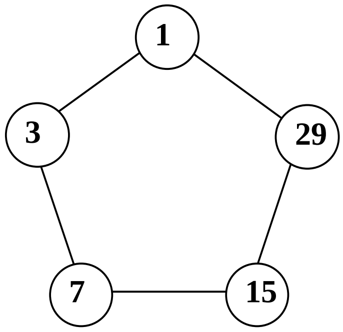
Pietiek uzrādīt vienu piemēru.



48. zīm.

4. uzdevums. Sešciparu skaitlim pirmo ciparu uzrakstīja kā pēdējo. Iegūtais skaitlis bija 5 reizes mazāks par sākotnējo. Kāds bija sākuma skaitlis?

5. uzdevums. Piecstūra virsotnēs ierakstīti skaitļi (skat. 49. zīm). Aprēķināt šķautņu galos ierakstīto skaitļu starpību, no lielākā atņemot mazāko (šķautne – līnija, kas savieno blakus esošās piecstūra virsotnes). Vai starp iegūtajām starpībām ir vienādas?



49. zīm.

<u>6. uzdevums</u>. Kādus divus naturālus skaitļus sareizinot, reizinājuma pēdējais cipars ir 0?

<u>7. uzdevums</u>. Dots skaitlis a=1,67.

a) Noapaļot to līdz veselam skaitlim.

b) Atrast skaitļus 2a un 3a un arī tos noapaļot līdz veseliem skaitļiem.

<u>8. uzdevums</u>. Vai var salikt vienādmalu trijstūra kontūru no 5 stienīšiem, kuru garumi ir:

a) 1; 2; 3; 4; 5;

b) 1; 2; 3; 4; 6?

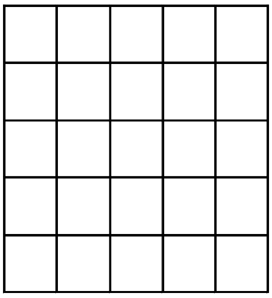
Katrā gadījumā jāizmanto visi stienīši.

<u>9. uzdevums</u>. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām (skat. 50. zīm.). Iezīmējiet dažās rūtiņās pa krustiņam tā, lai vienlaicīgi izpildītos šādas 2 īpašības:

a) visās rindiņās ir atšķirīgs krustiņu skaits (varbūt kādā 0);

b) visās kolonās ir viens un tas pats krustiņu skaits!

Pietiek uzrādīt vienu piemēru.



50. zīm.

<u>11. uzdevums</u>. 1. Ar kādiem naturāliem skaitļiem dalās visu naturālo skaitļu reizinājums no 1 līdz 5 ieskaitot?

2. Noskaidrojiet, vai visu naturālo skaitļu reizinājums no 1 līdz 20 ieskaitot dalās ar

a) 21;

b) 23?

<u>12. uzdevums</u>. 1. Pa apli uzrakstīti 7 skaitļi; neviens no tiem nav 0. Vai var būt tā, ka jebkuru divu blakus uzrakstītu skaitļu reizinājums ir negatīvs?

2. Doti veseli skaitļi, starp kuriem ir

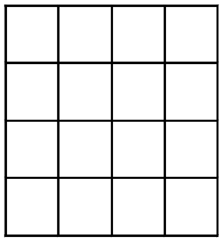
a) nepāra skaits negatīvu skaitļu,

b) pāra skaits negatīvu skaitļu.

Vai visu šo skaitļu reizinājums ir pozitīvs vai negatīvs?

<u>13. uzdevums</u>. Plaknē uzzīmētas 5 riņķa līnijas. Kāds var būt lielākais kopīgo punktu skaits šīm riņķa līnijām?

<u>15. uzdevums</u>. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām (skat. 51. zīm.). Vai var dažās rūtiņās iezīmēt pa krustiņam tā, lai visās rindiņās krustiņu skaits ir dažāds (tas nevar būt 0), bet katrā kolonā būtu atzīmēti 2 krustiņi?



51. zīm.

<u>16. uzdevums</u>. Doti divi dažādi naturāli skaitļi a un b. Vai skaitlis a+b var būt pirmskaitlis, ja

a) a un b abi ir pāra skaitļi,

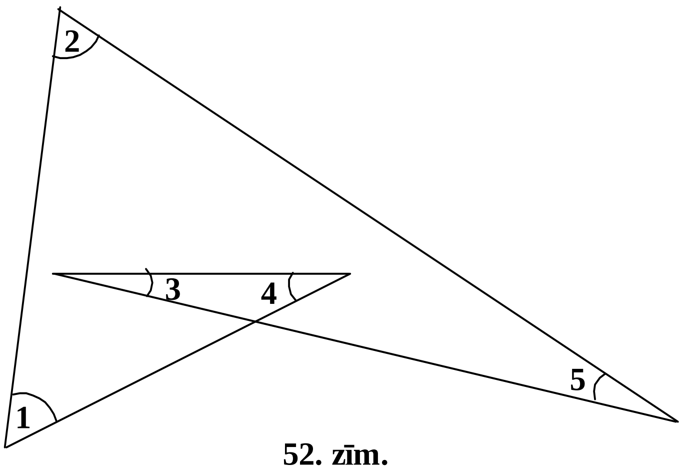
b) a un b abi ir nepāra skaitļi,

c) viens ir pāra skaitlis un otrs – nepāra skaitlis?

<u>17. uzdevums</u>. Sadalīt reizinātājos izteiksmi

$$x^4+x^3+x-1.$$

<u>18. uzdevums</u>. Aprēķināt 52. zīmējumā atzīmēto leņķu lielumu summu (tie ne noteikti ir vienādi).



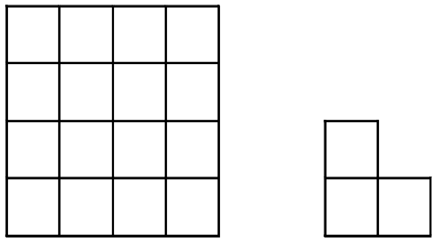
52. zīm.

<u>19. uzdevums</u>. Matemātikas pulciņā ir 5 dalībnieki. Ziemassvētkos katrs no viņiem nosūtīja 3 apsveikuma kartītes citiem pulciņa dalībniekiem. Pierādīt, ka atradīsies tādi divi dalībnieki, kas nosūtījuši apsveikuma kartītes viens otram.

<u>20. uzdevums</u>. Uzzīmēt astoņstūri, lai divas tā malas atrastos uz vienas taisnes.

Paskaidrojums: saka, ka taisne satur malu, ja visi malas punkti pieder taisnei.

23. uzdevums. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām (skat. 53. a) zīm.). Kādu mazāko daudzumu tādu "stūrīšu", kāds redzams 53. b) zīmējumā, var no tā izgriezt, lai no atlikušās kvadrāta daļas vairs nevarētu izgriezt nevienu stūrīti?



a) **b)**

53. zīm.

25. uzdevums. Pierādīt, ka katram naturālam n reizinājums $n \cdot (13n+1)$ dalās ar 2.