Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 46. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

5. klase

46.1. a) Sagrupējam dotos skaitļus pēc kārtas pa 10.

1+2+...+10

11+12+...+20

...

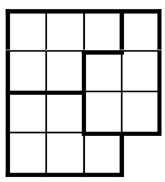
91+92+...+100

Apskatām šo katru 10 skaitļu summu.

1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55. Tā kā katras grupas skaitļu vieni ir tie paši pirmās grupas skaitļi, tad katras grupas skaitļu summa beigsies ar skaitli 5, jo desmiti nemaina skaitļu summas pēdējo skaitli. Bet grupu ir 10 un, ņemot 10 šādu skaitļu summu, kopējā summa beigsies ar 0.

b) Izmantojam to pašu metodi, ko a variantā. Sagrupējam skaitļus pēc kārtas pa 10. Šoreiz skaitļu grupu, kas beidzas ar 5, ir 199 (pa 10 skaitļiem katrā). Tad šo grupu skaitļu kopējā summa beigsies ar skaitli 5. Bet ārpus grupām vēl paliek skaitļi 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996. Šo skaitļu summa beidzas ar 1. Tātad kopējā summa beidzās ar 6.

46.2. a) jā, skat. zīm.



b) nē; no 15 kvadrātiņiem sastāvošo figūru nevar sagriezt četrās vienādās daļās, jo rūtiņu skaits nedalās ar 4.

46.3. Nē, tā nevar būt. Ja iegūtais skaitlis ir 6 reizes mazāks par sākotnējo, tad sākotnējais skaitlis dalās ar 6 un, ja tas dalās ar 6, tad tas dalās arī ar 2. Lai skaitlis dalītos ar divi, tam jābūt pāra skaitlim, kuram jābeidzas ar pēc iespējas mazāku pāra ciparu, jo pārceļot šo beidzamo ciparu uz skaitļa sākumu, skaitlim jākļūst mazākam (pēc uzdevuma nosacījumiem). Mazākais pāra cipars, kas var atrasties sākotnējā skaitļa beigās un jauniegūtā skaitļa sākumā, ir 2.
Toties, ja šādu jauniegūto skaitli pareizina ar 6, tad iegūstam vairāk nekā 4–ciparu skaitli, bet 2·6 dod divciparu skaitli nevis vienciparu skaitli, kā mums vajadzētu. Tātad nav tāda 4–ciparu skaitļa, kāds ir prasīts uzdevumā.

46.4. To var izdarīt, piemēram, šādi:

5	6	4
2	20	3
12	1	10

46.5. Izdomāsim, ar kādām monētām var samaksāt jebkuru summu no 1s līdz 9 santīmiem ieskaitot.

Summa	1. izteikšanas veids	2. izteikšanas veids
1s	1s	-
2s	1s+1s	2s
3s	1s+1s+1s	1s+2s
4s	1s+1s+2s	2s+2s
5s	2s+2s+1s	5s
6s	2s+2s+2s	5s+1s
7s	5s+1s+1s	5s+2s
8s	5s+2s+1s	5s+1s+1s+1s
9s	5s+2s+2s	5s+2s+1s+1s

Tabulā atrodam veidu, kā izteikt summas no 1 līdz 9 ar iespējami mazāk monētām.

Summa	Monētas
1s	1s
2s	2s
3s	1s+2s
4s	2s+2s
5s	5s
6s	5s+1s
7s	5s+2s
8s	5s+2s+1s
9s	5s+2s+2s

No tā secinām, ka, jebkuru summu no 1s līdz 9 santīmiem ieskaitot var samaksāt ar 4 monētām: 1s, 2s, 2s, 5s.

Līdzīgā veidā noskaidrojam, ka, lai samaksātu jebkuru summu 10s, 20s, 30s, ..., 100s, pietiek ar 4 monētām: 10s, 20s, 20s, 50s.

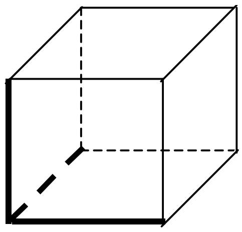
Grupējot šīs 8 monētas kopā var samaksāt arī jebkuru summu no 10s līdz 100s. Tātad 8 monētas var būt šādas: 1s, 2s, 2s, 5s, 10s, 20s, 20s, 50s.

6. klase

46.6. Tā kā attālums starp pilsētām ir nemainīgs (1996 km), tad, protams, uz visām plāksnītēm abu uzrakstīto skaitļu summa arī ir 1996. Lai katrs no summas saskaitāmajiem uz kādas plāksnītes dalītos ar 7, ar 7 jādalās arī pašai summai 1996. Bet 1996 nedalās ar 7, tāpēc nav tāda staba, uz kura abi skaitļi dalītos ar 7.

46.7. Jā var.

Visas kuba šķautnes sadalīsim 3 virzienu grupās. Katra no šīm grupām tiek pārstāvēta katrā kuba virsotnē, jo no katras virsotnes iziet tieši pa vienam nogrieznim katrā virzienā. (skat. zīm.)



Sadalīsim arī 12 skaitļus 3 grupās pēc atlikumiem dalot ar 3. Vienā grupā ir skaitļi, kas dod atlikumu 1, dalot ar 3, otrā grupā ir skaitļi, kas dod atlikumu 2, dalot ar 3, un trešajā grupā ir skaitļi, kas dod atlikumu 0, dalot ar 3.

1.gr. – 1, 4, 7, 10;

2.gr. – 2, 5, 8, 11;

3.gr. – 3, 6, 9, 12.

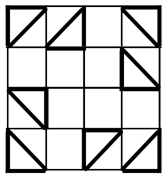
Redzams, ka pirmajā grupā ir skaitļi, kuri ir izsakāmi vispārīgā veidā $3a+1$, otrajā grupā – $3b+2$ un trešajā grupā – $3c$.

Apskatām summu, ko iegūst, ja saskaita pa vienam skaitlim no katras grupas vispārīgā veidā:

$(3a+1)+(3b+2)+3c = 3(a+b+1)$.

Redzam, ka šī summa dalās ar 3. Tātad atliek tikai 1. grupas skaitļus piekārtot viena virziena šķautnēm, 2. grupas skaitļus – otra virziena šķautnēm un 3. grupas skaitļus – trešā virziena šķautnēm, vajadzīgo esam panākuši.
(Pastāv arī citi skaitļu izkārtošanas veidi.)

46.8. Dotā zīmējuma režģī ir 25 rūtiņu virsotnes, kurās var atrasties trijstūru virsotnes. Deviņus trijstūrus izvietot nevarēs, jo $9 \cdot 3 > 25$. Tātad par 8 trijstūriem vairāk uzzīmēt nevar. Zīmējumā parādīts, ka var izvietot 8 trijstūrus.

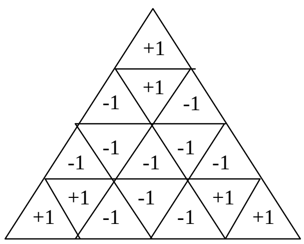


46.9. Izkrāsosim kvadrāta rūtiņas šaha galdiņa kārtībā. Pieņemsim, ka minētie taisnstūri pārklāj melno diagonāli. Katrs taisnstūris ar izmēriem 1×2 rūtiņas pārklāj vienu melnu un vienu baltu rūtiņu. Bet katrā pusē no melnās diagonāles balto rūtiņu ir par 3 vairāk nekā melno rūtiņu. Lai tās pārsegtu ar taisnstūri, nepieciešami tieši 3 taisnstūri uz katru pusi un šie taisnstūri daļēji atrodas uz melnās diagonāles.

46.10. Pieņemsim, ka šie skaitļi ir $a<b<c<d<e<f<g$. Izvēlamies 3 lielākos no tiem: e, f un g un apskatām to summu.
Pieņemsim pretējo, ka $e+f+g<50$. Tādā gadījumā $e\le 15$, jo nākošo trīs skaitļu summa $16+17+18=51>50$. No tā seko, ka $d\le 14$, $c\le 13$, $b\le 12$, $a\le 11$ un visu septiņu skaitļu summa ir $a+b+c+d+e+f+g = a+b+c+d+(e+f+g) = (\le 11)+(\le 12)+(\le 13)+(\le 14)+(<50) < 100$. Bet tā ir pretruna ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad pieņēmums ir nepareizs un $e+f+g\ge 50$.

7. klase

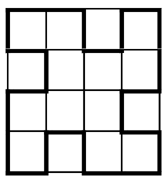
46.11. Skat. zīmējumu.



46.12. Monomam xyz kombinējam pakāpes tā, lai to summa būtu 7. Lielāka pakāpe pie kāda burta tā, lai pārējiem būtu vismaz pirmā pakāpe, ir 5. Tad ar to arī sākam un pakāpeniski samazinām lielāko pakāpi un palielinām kādu no citām pakāpēm. Tādu monomu ir 15:
x^5yz, x^4y^2z, x^3y^3z, x^2y^4z, x^4yz^2, x^3yz^3, $x^3y^2z^2$, $x^2y^3z^2$, $x^2y^2z^3$, x^2yz^4, xy^5z, xy^4z^2, xy^3z^3, xy^2z^4, xyz^5.

46.13. Sanumurējam uzdevumā dotās 5 dienas ar numuriem – 1. diena, 2. diena, 3. diena, 4. diena un 5. diena. Lai katrs rūķītis būtu apciemojis katru citu, tad katrs rūķītis sēdēs mājās tieši divas dienas:
pirmais – dienās ar numuriem 1. un 2.;
otrais – dienās ar numuriem 1. un 3.;
trešais – dienās ar numuriem 1. un 4.;
ceturtais – dienās ar numuriem 1. un 5.;
piektais – dienās ar numuriem 2. un 3.;
sestais – dienās ar numuriem 2. un 4.;
septītais – dienās ar numuriem 2. un 5.;
astotais – dienās ar numuriem 3. un 4.;
devītais – dienās ar numuriem 3. un 5.;
desmitais – dienās ar numuriem 4. un 5.
Tā kā neviens no dienu numuru pāriem nesakrīt, tad katrs rūķītis apciemos katru.

46.14. Dotajam režģim ir 5 horizontālas un 5 vertikālas līnijas. Tā kā uz katras no režģa līnijām atrodas 5 krustpunkti un jebkurai daudzstūra malai ir 2 galapunkti, kam jāatrodas uz šiem krustpunktiem, tad uz katras no līnijām var uzvilkt ne vairāk par divām daudzstūra malām. Tātad daudzstūrim kopā nevar būt vairāk par 20 malām - 5·2 malas uz horizontālām līnijām un 5·2 malas uz vertikālām līnijām. Kā uzzīmēt daudzstūri ar 20 malām, parādīts zīmējumā.



46.15. Pierādīsim, ka 8 un vairāk skaitļus tā uzrakstīt nevar. Izvēlēsimies 8 naturālus skaitļus , apzīmēsim šos skaitļus ar a, b, c, d, e, f, g, h.

Pēc uzdevuma nosacījumiem katru četru pēc kārtas uzrakstīto skaitļu summa ir nepāra skaitlis, tāpēc skaitļi a+b+c+d un b+c+d+e ir nepāra skaitļi. Tā kā abas summas satur skaitļus b, c un d, tad skaitļiem a un e ir vienādas paritātes (vai nu abi pāra, vai abi nepāra skaitļi).

Pēc uzdevuma nosacījumiem katru piecu pēc kārtas uzrakstīto skaitļu summa ir pāra skaitlis, tāpēc skaitļi a+b+c+d+e un b+c+d+e+f ir pāra skaitļi. Tā kā abas summas satur skaitļus b, c, d un e, tad skaitļiem a un f ir vienādas paritātes. Tad no tā seko, ka vienādas paritātes ir gan skaitlim a, gan skaitlim e, gan skaitlim f.

Līdzīgā veidā pierāda, ka vienādas paritātes ir gan skaitļiem b, f un g , gan skaitļiem c, g un h.

No tā, ka vienādas paritātes ir skaitļiem a, e, f

b, f, g

c, g, h,

seko, ka vienādas paritātes ir gan skaitlim e, gan skaitlim f, gan skaitlim g, gan arī skaitlim h.

Tā kā skaitļu e, f, g, h paritātes ir vienādas un to summa, protams, ir pāra skaitlis. Bet tā ir pretruna ar uzdevuma nosacījumiem, jo e, f, g, h ir četri pēc kārtas uzrakstīti skaitļi un to summa ir nepāra skaitlis. Līdz ar to 8 skaitļus uzrakstīt nevar.

Kā uzrakstīt 7 skaitļus, parādīts piemērā: 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1.

8. klase

46.16. No dotā seko, ka x un y ir kvadrātvienādojuma $t^2+7t-11 = 0$ divas dažādas saknes.

Atveram iekavas: $(1+x)(1+y) = 1+x+y+xy$.

Tā kā x un y ir kvadrātvienādojuma $t^2+7t-11 = 0$ saknes, tad ir spēkā arī Vjeta teorēma: $x+y = -7$ un $xy = -11$.

Ievietojam šos zināmos lielumus vajadzīgajā izteiksmē:

$1+x+y+xy = 1+(-7)+(-11) = -17$.

Tātad $(1+x)(1+y) = -17$.

Pārbaudām, vai $x \neq y$.

46.17. Apskatām trīs sekojošus naturālus skaitļus vispārīgā veidā: n-2, n-1, n. Sareizinām pirmos divus pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus $(n-2)(n-1) = n^2-3n+2$ un izdalām ar trešo pēc kārtas sekojošo naturālo skaitli n. Atceramies, ka summa dalās ar doto skaitli, ja katrs summas loceklis dalās ar šo doto skaitli.

Tātad redzam, ka izteiksmes n^2-3n+2 pirmie divi locekļi dalās ar n, bet 2 nedalās ar n. Tad vispārīgā veidā izteiksme n^2-3n+2 ir pārveidojama kā:

$n^2-3n+2 = (n-3)n+2$, no kurienes secinām, ka jebkuru divu viens otram sekojošu naturālu skaitļu reizinājumu dalot ar nākošo naturālo skaitli, atlikumā iegūst 2.

46.18. Nē, tā nevar gadīties. Kubam ir 8 virsotnes un katrā virsotnē "satiekas" 3 kvadrātiņi ar kopīgām malām. Šiem 3 kvadrātiņiem katram jābūt savā krāsā – vienam baltam, vienam sarkanam un vienam zaļam. Līdz ar to ir 8 balti, 8 sarkani un 8 zaļi kvadrātiņi.

46.19. No dotajiem 10 cilvēkiem uz labu laimi izvēlamies 4 cilvēkus. Tālāk ir divas iespējas. Ja katrs no izvēlētajiem 4 cilvēkiem pazīst katru, tad viss ir kārtībā. Otra iespēja, ka A un B viens otru nepazīst. Bet tā kā katram bija 5 pazīstami cilvēki konferencē, tad A un B kopā ir 10 paziņas starp atlikušajiem 8 no konferences dalībniekiem. Tātad A un B ir vismaz divi kopēji paziņas X un Y. Tad arī pie apaļā galda nosēdina šos 4 cilvēkus attiecīgā secībā: A, X, B, Y.

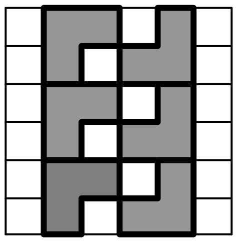
46.20. Atceramies, ka izliekta n-stūra ārējo leņķu summa ir 360° un jebkura ārējā leņķa un daudzstūra leņķa, kurš ir šī ārējā leņķa blakusleņķis, summa ir 180°. Ja daudzstūra leņķu lielumiem jāizsakās ar veseliem skaitiem grādu, tad ar veseliem skaitiem grādu jāizsakās arī ārējiem leņķiem. Līdz ar to 360° jāsadala pēc iespējas vairāk veselos skaitļos un to var izdarīt, ja 360° sadala pa 1°, jo 1 ir mazākais veselais naturālais skaitlis. No tā secinām, ka lielākais malu skaits izliektam daudzstūrim ir 360 un šim daudzstūrim visi leņķi ir vienādi - 179°. Tātad uzdevuma nosacījumus apmierina regulārs 360–stūris.

46.21. Vienam diskriminantam jābūt nullei, tātad $a=9$ vai $a=\pm 5$. Šīs vērtības jāpārbauda. Redzam, ka der tikai vērtības $a=9$ un $a=5$. Ja $a=-5$, tad viena sakne vienādojumiem sakrīt.

46.22. a) Ievērosim, ka $1996 = 499 \cdot 4$. No 499 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens dalās ar 499; starp jebkuriem 4 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens dalās ar 4. Tāpēc reizinājums dalās ar 1996.

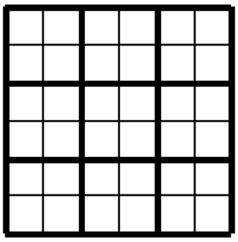
b) Tā kā 499 ir pirmskaitlis, tad $1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot 498$ nedalās ar 499, un, tātad, nedalās arī ar 1996.

46.23. No 46.4. zīmējuma redzams, ka pietiek ar 6 stūrīšu izgriešanu.



46.4. zīm.

Ar mazāku skaitu stūrīšu nepietiek. Sadalīsim doto kvadrātu 9 kvadrātos, kā parādīts zīmējumā 46.5.



46.5. zīm.

Ja izgriežam tikai 5 stūrīšus, tad kopā izgrieztas ir tikai 15 rūtiņas; tas nozīmē, ka kādā no kvadrātiem nav izgrieztas vairāk par vienu rūtiņu. Šajā kvadrātā var tādā gadījumā ievietot vēl vienu stūrīti.

46.24. Izmantojot vienādības $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ un $S=\dfrac{1}{2}ab$, iegūstam prasīto:

$$p(p-c)=\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}=\frac{(a+b)^2-c^2}{4}=\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)+2ab}{4}=\frac{ab}{2}=S\,.$$

$$(p-a)\cdot(p-b)=\frac{c+(b-a)}{4}\cdot\frac{c-(b-a)}{4}=\frac{c^2-(b-a)^2}{4}=\frac{a^2+b^2-b^2-a^2+2ab}{4}=$$

$$\frac{ab}{2}=S.$$

46.25. a) Robots to var izdarīt šādi: $ABCD\rightarrow DEABC\rightarrow BCDEA\rightarrow BACDE$.

b) No a) daļas risinājuma redzams, ka var samainīt vietām jebkuras divas grāmatas, ja pa labi (analogi pa kreisi) no tām atrodas vismaz 3 citas. Tātad, ja ir 1996 grāmatas, tad jebkuras divas blakusstāvošās var samainīt vietām; tas nozīmē, ka var iegūt jebkuru grāmatu izvietojumu.

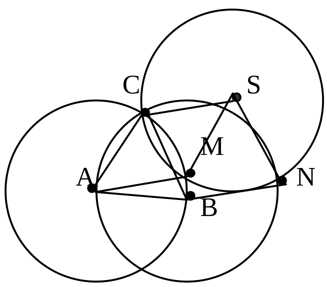
46.26. Nē; jo no nevienādības $a+b+c<1$ seko, ka $0<a, b, c<1$. Tātad $a^2<a, b^2<b, c^2<c$ un $a^2+b^2+c^2<a+b+c$.

46.27. Riņķa centrs atrodas daudzstūra iekšpusē. Savienojot to ar daudzstūra virsotnēm, tas sadalās vienādsānu trijstūros. Tā kā starp daudzstūra malām ir arī dažādas, tad atradīsies divi blakusstāvoši trijstūri OA_1A_2 un OA_2A_3, kas nav vienādi. No tā, ka visi daudzstūra leņķi ir vienādi, seko, ka trijstūris OA_3A_4 vienāds ar trijstūri OA_1A_2; tātad vienādie trijstūri izvietoti pamīšus, un no tā seko, ka daudzstūra malu skaits ir pāra skaitlis.

46.28. a) $S=(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+n)=na+\frac{n(n+1)}{2}$. Redzam, ka skaitlim $n=1996\cdot 2=3992$ prasītā īpašība izpildās.

b) Pierādīsim, ka tā ir mazākā vērtība, kurai izpildās prasītā īpašība. Tiešām, ņemot $a=1$ un $a=2$, iegūstam, ka $\left(2n+\frac{n(n+1)}{2}\right)-\left(n+\frac{n(n+1)}{2}\right)=n$ dalās ar 1996. Bet skaitlis $n=1996$ neder, jo, ņemot $a=1$, iegūstam summu, kura nedalās ar 1996.

46.29. Skat. 46.6. zīm.



46.6. zīm.

Apzīmējam trešā riņķa centru ar S. Tad četrstūri $ACSM$ un $BCSN$ ir rombi; tāpēc $NB \parallel SC$ un $SC \parallel MA$, tātad $NB \parallel MA$. Tā kā bez tam $NB = MA$, tad $AMNB$ ir paralelograms, tāpēc $MN \parallel AB$.

46.30. Nostādām bērnus pāros patvaļīgi. Ar S apzīmēsim draudzīgo pāru skaitu; ja $S = 5$, tad viss ir kārtībā. Ja tomēr ir pāris (A, B), kas nav draugi, tad gan A, gan B ir antipātijas ar vēl 3 bērniem. Tāpēc starp atlikušajiem 4 pāriem var atrast tādu pāri (C, D), ka starp pāriem (A, B) un (C, D) pastāv augstākais viena antipātija. Ja tāda ir, piemēram starp A un C, izveidojam jaunus pārus (A, D) un (B, C). Šādas maiņas rezultātā "nedraudzīgo" pāru skaits samazinājies. Pakāpeniski tiek likvidēti visi "nedraudzīgie" pāri.

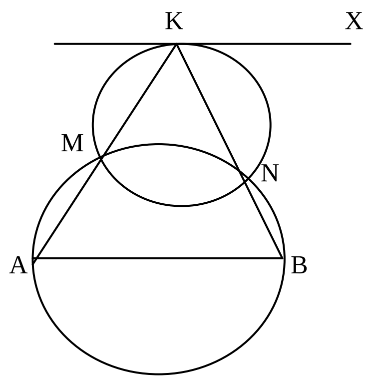
46.31. Ja ievietojam pierādāmajā vienādībā $z = -(x + y)$, tad iegūstam prasīto.

Taču patiesībā prasītā vienādība seko no ļoti populāras identitātes:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)\cdot\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz\right).$$

To var pārbaudīt, sareizinot dotās izteiksmes un savelkot līdzīgos locekļus.

46.32. Skat. 46.7. zīm.



46.7. zīm.

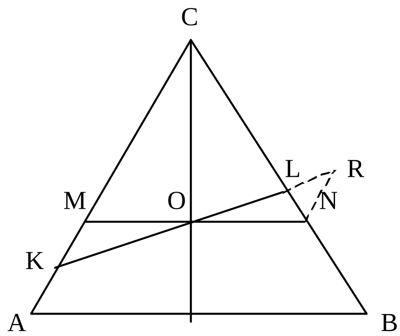
No hordas - pieskares leņķa un ievilktā leņķa īpašībām seko, ka $\angle XKN = \angle KMN$. No riņķī ievilkta četrstūra īpašībām seko, ka $\angle KMN = 180° - \angle AMN = \angle ABN$. Tātad $\angle XKN = \angle ABN$, no kurienes seko taišņu KX un AB paralelitāte.

46.33. Izvēlēsimies k tā, lai izpildītos kongruences $k \equiv n \pmod{2}$ un $k \equiv m \pmod{3}$. To var izdarīt, izmantojot šādu tabulu

$$\begin{array}{rcccccc} n \pmod{2} = & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ m \pmod{3} = & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ k = & 0 & 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{array}$$

Tad $ak + b \equiv an + b \equiv 0 \pmod{2}$ un $ak + b \equiv am + b \equiv 0 \pmod{3}$; tātad $ak + b$ dalās ar 6.

46.34. Skat. 46.8. zīm.



46.8. zīm.

Novelkam $MN \parallel AB$. Tad trijstūri MCN un ACB ir līdzīgi ar līdzības koeficientu $\frac{2}{3}$. Tāpēc $S_{MCN} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot S_{ACB} = 4$. Pieņemsim, ka taisne *KL* nav paralēla malai *AB*. Izvēlēsimies uz taisnes *KL* tādu punktu *R*, ka $NR \parallel AC$. Viegli pierādīt, ka trijstūri *OMK* un *ONR* ir vienādi. Tā kā $S_{OLN} < S_{ONR} = S_{OMK}$, tad

$$S_{KCL} = S_{MCN} + S_{OMK} - S_{OLN} > S_{MCN} = 4.$$

46.35. Sadalām rūtiņas 8 grupās, kā parādīts 46.9. zīmējumā.

1	2	3	4	5	6	7	8
8	1	2	3	4	5	6	7
7	8	1	2	3	4	5	6
6	7	8	1	2	3	4	5
5	6	7	8	1	2	3	4
4	5	6	7	8	1	2	3
3	4	5	6	7	8	1	2
2	3	4	5	6	7	8	1

46.9. zīm.

Vienas grupas rūtiņas neatrodas ne vienā rindā, ne vienā kolonnā. Ja katrā grupā atrastos ne vairāk par 4 zvaigznītēm, tad kopā to būtu ne vairāk par 32; tātad kādā no grupām ir vismaz 5 zvaigznītes. Tās arī izvēlēsimies.

46.36. Izpildot pārveidojumus iegūstam

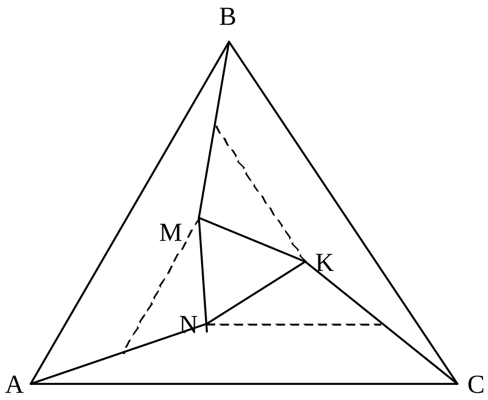
$$\sin^2 x + \cos^4 x = \sin^2 x + \left(1 - \sin^2 x\right)^2 = \sin^4 x - \sin^2 x + 1 = \left(\sin^2 x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4} \geq \tfrac{3}{4}.$$

46.37. Izteiksmi var pārveidot formā

$$n^4 - 5n^2 + 4 = \left(n^2 - 1\right) \cdot \left(n^2 - 4\right) = (n-2) \cdot (n-1) \cdot (n+1) \cdot (n+2).$$

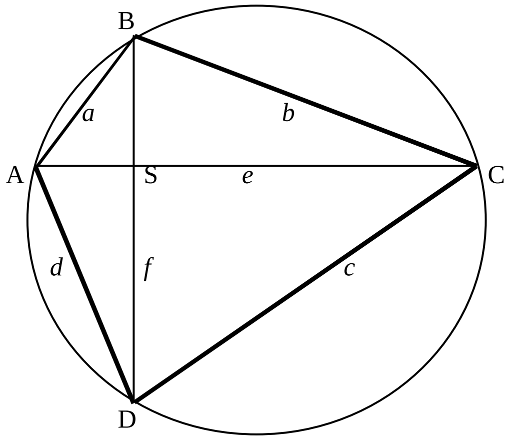
Viens no 5 pēc kārtas ņemtiem skaitļiem $n-2$; $n-1$; n; $n+1$; $n+2$ dalās ar 5 (bet tas nav n, jo n ir pirmskaitlis); tāpēc reizinājums dalās ar 5. Tā kā n nedalās ar 3, tad no diviem skaitļiem $n-2$ un $n-1$ viens dalās ar 3; ja $n-2$ dalās ar 3, tad arī $n+1$ dalās ar 3; ja $n-1$ dalās ar 3, tad arī $n+2$ dalās ar 3. Tātad viss reizinājums dalās ar 9. Ja skaitlis dalās ar 5 un 9, tad tas dalās ar 45.

46.38. Nē. Aplūkosim domājamā daudzskaldņa šķēlumus ar plaknēm, kas paralēlas plaknei *ABC* (skat. 46.10. zīm.). Virzot šīs plaknes no apakšas uz augšu, redzam, ka punkts *M* atrodas zemāk nekā *N*; līdzīgi *N* atrodas zemāk nekā *K* un *K* atrodas zemāk nekā *M*; iegūta pretruna. Tātad dotais zīmējums nevar būt daudzskaldņa projekcija plaknē.



46.10. zīm.

46.39. Skat. 46.11. zīm.



46.11. zīm.

Atcerēsimies, ka apvilktā riņķa līnijas rādiusu aprēķina pēc formulas $R = \frac{abc}{4S}$.

Aplūkojot trijstūri *ABD*, iegūstam $R = \frac{adf}{2f \cdot AS} = \frac{ad}{2AS}$. Līdzīgi iegūstam šādas vienādības $R = \frac{ab}{2BS} = \frac{bc}{2CS} = \frac{cd}{2DS}$. Tāpēc

$$R^4 = \frac{(abcd)^2}{16 \cdot AS \cdot BS \cdot CS \cdot DS}.$$

Tālāk ievērosim, ka $AS \cdot CS \le \left(\frac{AS + CS}{2}\right)^2 = \frac{e^2}{4}$ un līdzīgi $BS \cdot DS \le \frac{f^2}{4}$. No šejienes $R^4 = \frac{(abcd)^2}{16 \cdot AS \cdot BS \cdot CS \cdot DS} \ge \frac{(abcd)^2}{e^2 f^2}$; izvelkot ceturtās pakāpes sakni, iegūstam prasīto.

46.40. Aplūkosim studentu S_0, kas atnāca uz kafejnīcu pēdējais; pieņemsim, ka tas notika laika momentā t_1. Apzīmēsim ar *G* to studentu grupu, kas šai laikā jau bija aizgājuši. Mums pietiek pierādīt, ka visi *G* studenti bijuši kafejnīcā kādā momentā t_2; tad par meklējamiem momentiem varēs ņemt t_1 un t_2.

Aplūkosim studentu S_1 no *G*, kas atnāca pēdējais. Viņa atnākšanas brīdī visa grupa *G* jau bija ieradusies, un neviens no *G* vēl nebija aizgājis; tiešām, ja grupas *G* students S_2 jau būtu aizgājis, tad S_0, S_1 un S_2 būtu trīs studenti, no kuriem nekādi divi nav tikušies, bet tā ir pretruna ar uzdevuma nosacījumiem.