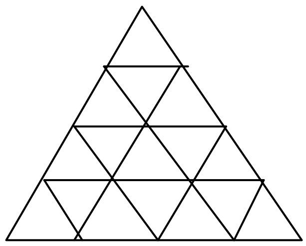
Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 47. OLIMPIĀDE

5. klase

47.1. Zināms, ka a, x, y, z -- dažādi cipari. Apskatīsim trīsciparu skaitļu virkni $\overline{xzy}, \overline{yaz}, \overline{yax}, \overline{zxa}$. Vai var būt, ka šajā virknē katrs nākošais skaitlis lielāks par iepriekšējo?

47.2. Kādu mazāko skaitu mazo trijstūrīšu var nokrāsot melnus tā, lai katram mazajam baltajam trijstūrim būtu kopīga mala ar vismaz vienu melno (skat. 47.1. zīm.).



47.1. zīm.

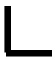
47.3. Divi piecciparu skaitli katrs satur visus ciparus no 1 līdz 5 ieskaitot. Pierādīt, ka to summā vismaz viens cipars ir pāra cipars.

47.4. Uzrādīt 8 monētu komplektu, kuru izmantojot, var samaksāt jebkuru naudas summu no 1 santīma līdz 1 latam ieskaitot . (Piezīme: maksāšana notiek bez naudas izdošanas. Pieejamas monētas 1s, 2s, 5s, 10s, 20s, 50s, 1Ls un 2Ls vērtībā).

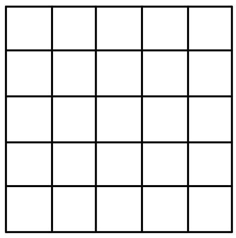
47.5. Kāsītis sastāv no diviem vienāda garuma stienīšiem, kas ar galiem salodēti taisnā leņķī viens pret otru (skat. 47.2. zīm.). Vai no vienādiem kāsīšiem var salikt

a) kvadrātisku režģi ar izmēriem 5×5 kvadrātiskas rūtiņas (skat. 47. 3. zīm.).

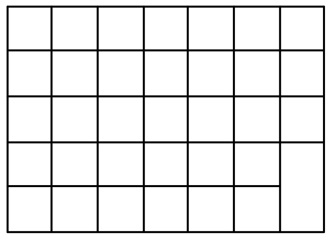
b) taisnstūra režģi ar izmēriem 5×7 kvadrātiskas rūtiņas (skat. 47.4. zīm.)?



47.2. zīm.



47.3. zīm.



47.4. zīm.

6. klase

47.6. Vai iespējama vienādība $a,bc = \overline{ab} : c$?

(Piezīme: a,bc ir decimāldaļa ar ciparu *a* pirms komata un cipariem *b* un *c* aiz komata; $\overline{ab}$ ir divciparu skaitlis.)

47.7. Vai skaitļu $1+\frac{3}{5}, 1+\frac{3}{6}, 1+\frac{3}{7}, \ldots, 1+\frac{3}{1996}, 1+\frac{3}{1997}$ reizinājums ir vesels skaitlis?

47.8. Pierādīt, ka sešciparu skaitlis dalās ar 13 tādā un tikai tādā gadījumā, ja ar 13 dalās tā pirmo trīs ciparu un pēdējo trīs ciparu veidoto skaitļu starpība (mazinātājs varētu sākties ar vienu vai vairākām nullēm).

47.9. Kvadrāts sastāv no 6×6 rūtiņām. Tas pilnībā pārklāts ar 18 taisnstūriem, katram no kuriem izmēri ir 1×2 rūtiņas. Aplūkojam tos 6 taisnstūrus, kas pārklāj vienas diagonāles rūtiņas. Pierādīt, ka 3 no tiem vērsti no šīs diagonāles uz vienu pusi, bet 3 - uz otru.

47.10. Klasē daži skolēni draudzējas, bet citi -- nē (draudzības ir abpusējas). Katram ir vismaz viens draugs. Pierādīt, ka daļa skolēnu var doties uz matemātikas olimpiādi, bet pārējie -- uz fizikas olimpiādi tā, ka katrs skolēns varēs uzzināt informāciju par olimpiādi, kurā nav piedalījies, no kāda sava drauga -- šīs olimpiādes dalībnieka.

7. klase

47.11. Jānim ir trīs reizes vairāk pastmarku nekā Andrim. Ja Jānis atdos 10 pastmarkas Andrim, tad zēniem piederošo pastmarku attiecība kļūs 2:1. Cik pastmarku ir Jānim?

47.12. Kādu lielāko daudzumu naturālu skaitļu var uzrakstīt rindā tā, ka vienlaicīgi izpildītos 2 īpašības:

a) katru četru pēc kārtas uzrakstīto skaitļu summa ir nepāra skaitlis,

b) katru piecu pēc kārtas uzrakstīto skaitļu summa ir pāra skaitlis?

47.13. Plaknē uzzīmēti trīs leņķi, kuru kopīgā daļa ir daudzstūris.

a) pierādīt, ka šim daudzstūrim var būt 3, 4, 5, 6, 7, 8 malas, ja minēto leņķu lielumi var arī pārsniegt $180°$.

b) cik malu var būt šim daudzstūrim, ja zināms, ka minētie leņķi visi mazāki par $180°$?

47.14. Vai var atrast 10 tādus naturālus skaitļus, lai katru divu skaitļu summas dalījums ar jebkuru trešo skaitli arī būtu viens no šiem skaitļiem?

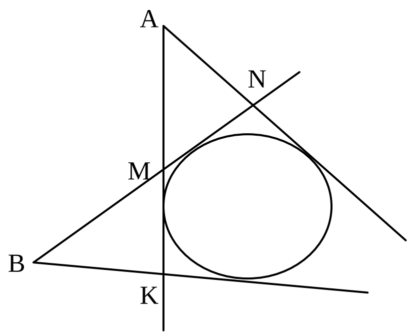
47.15. Dots, ka *n* -- kaut kāds naturāls skaitlis. Skaitlim 2^n atrodam ciparu summu. Iegūtajai summai atkal atrodam ciparu summu, utt. . Pieņemsim, ka kādreiz iegūsim desmitciparu skaitli. Pierādīt, ka tam ir vismaz divi vienādi cipari.

8. klase

47.16. Mainīgie lielumi *x* un *y*, kā arī *z* un *t* ir apgriezti proporcionāli savā starpā, bet *y* un *z* -- tieši proporcionāli savā starpā. Kāda veida proporcionalitāte pastāv starp *x* un *t*?

47.17. Kāds lielākais malu skaits var būt daudzstūrim, kura visu leņķu lielumi izsakās ar veseliem skaitiem grādu?

47.18. Dots, ka $\angle A = \angle B$ (skat. 47.5. zīm.).



47.5. zīm.

Abu leņķu malas pieskaras riņķa līnijai. Pierādīt, ka trijstūru *BMK* un *AMN* perimetri ir vienādi.

47.19. Vai eksistē tādi 4 dažādi naturāli skaitļi, ka katru divu reizinājums dalās ar abu pārējo summu?

47. 20. Taisnstūris sadalīts vienādās kvadrātiskās rūtiņās. Divas ārējās rūtiņu joslas gar katru malu ir baltas; dažas no pārējām rūtiņām nokrāsotas melnas, citas baltas. Katrā rūtiņā ierakstām tās blakus rūtiņu skaitu, kam ir cita krāsa nekā šai rūtiņai (rūtiņas sauc par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala).

Pierādīt, ka visu ierakstīto skaitļu summa

a) ir pāra skaitlis,

b) dalās ar 4.

9. klase

47.21. Kādas ir tās *a* vērtības, pie kurām vienādojumiem

$$x^2 - 6x + a = 0 \text{ un } x^2 - 2ax + 25 = 0$$

nav kopēju sakņu, bet abiem kopā ir tieši 3 dažādas saknes.

47.22. Izliektā četrstūrī *ABCD* leņķu $\angle ABC$ un $\angle ADC$ bisektrises paralēlas savā starpā. Pierādīt, $\angle BAD = \angle BCD$.

47.23. a) uz šaha galdiņa novietoti 25 zirdziņi. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties 13 tā, ka neviens no izvēlētajiem neapdraud nevienu citu izvēlēto;

b) vai noteikti var izvēlēties 14 zirdziņus ar šādu īpašību?

47.24. a) Atrast kaut vienu tādu naturālu skaitli n, ka $\frac{n}{2}$ ir naturāla skaitļa kubs, $\frac{n}{3}$ ir naturāla skaitļa kvadrāts, bet $\frac{n}{5}$ ir naturāla skaitļa piektā pakāpe;

b) pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz šādu naturālu skaitļu n.

47.25. Trijstūrī ABC no virsotnēm A un B novilkti augstumi AM un BN. Dots, ka $BC = 2 \cdot AM$ un $AC = 2 \cdot BN$.
Aprēķināt trijstūra ABC leņķus.

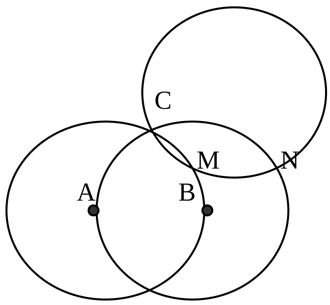
10. klase

47.26. Kas lielāks $\sqrt{1997} - \sqrt{1996}$ vai $\sqrt{1996} - \sqrt{1995}$?

47.27. Taisnleņķa trijstūra katešu garumi ir a un b, hipotenūzas garums ir c. Pret hipotenūzu novilktā augstuma garums ir h. Vai var pastāvēt vienādība

$$c + h = a + b \ ?$$

47.28. Trīs vienādas riņķa līnijas iet caur punktu C; divas no tām (ar centriem A un B) iet atbilstoši caur B un A. Trešā riņķa līnija krusto abas minētās riņķa līnijas punktos M un N (skat. 47.1. zīm.).



47.1. zīm.

47.29. Pierādīt, ka no katriem

a) trim,

b) pieciem,

c) septiņiem

pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem var izvēlēties vienu tā, ka tas ir savstarpējs pirmskaitlis ar katru no pārējiem.

47.30. Iestādē strādā 100 cilvēku. Katrs draudzējas ar 67 saviem kolēģiem (draudzības ir abpusējas). Pierādīt, ka var izvēlēties tādus 4 iestādes darbiniekus, kas visi draudzējas savā starpā.

11. klase

37.31. Vai eksistē tādi skaitļi , ka

$$|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-e|+|e-a|=1997\,?$$

37.32. Dots, ka *a* un *b* -- naturāli skaitļi. Zināms, ka eksistē tāds naturāls skaitlis n , ka $an+b$ dalās ar 2, un eksistē tāds naturāls skaitlis *m*, ka $am+b$ dalās ar 3. Pierādīt, ka eksistē tāds naturāls skaitlis *k*, ka $ak+b$ dalās ar 6.

37.33. Dots, ka $a+b+c+d=0$. Apzīmējam $x=ab+ac+cd$ un $y=ad+bc+bd$. Vai abas izteiksmes $2x+y$ un $2y+x$ var vienlaicīgi būt pozitīvas?

37.34. Šaurleņķu trijstūrī *ABC* zināms, ka $\angle BCA=45°$; *AM* un *BN* ir šī trijstūra augstumi, *S* ir malas *AB* viduspunkts.
Pierādīt, ka nogriežņi *SM* un *SN* ir vienādi un perpendikulāri savā starpā.

37.35. Jānis un Andris spēlē sekojošu spēli. Rindā uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 1997 ieskaitot. Zēni pārmaiņus izsvītro pa vienam vēl neizsvītrotam skaitlim (pirmais svītro Jānis), kamēr paliek tieši divi neizsvītroti skaitļi. Jānis grib, lai to starpības modulis būtu iespējami liels. Kādu lielāko moduli Jānis var panākt, pieņemot, ka Andris traucē viņam, cik iespējams?

12. klase

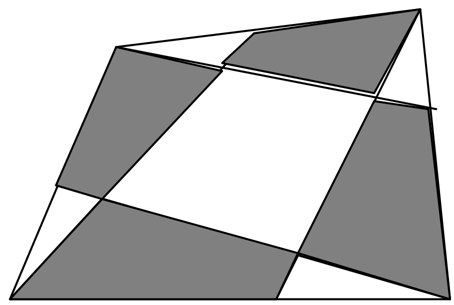
47.36. Atrisināt vienādojumu $\sin 3x + \sin 2x = \sin x$.

47.37. Dots, ka *n* ir pirmskaitlis, $n > 5$. Pierādīt, ka

$$n^4 - 5n^2 + 4 \text{ dalās ar 45.}$$

47.38. Izliektā četrstūrī *ABCD* virsotnes savienotas ar patvaļīgiem malu iekšējiem punktiem (skat. 48.1. zīm.).

Pierādīt, ka nav iespējams ap visiem iezīmētajiem četrstūriem apvilkt riņķa līnijas.



48.6. zīm.

47.39. Dots, ka a, b, c, d -- pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka

$$2 \cdot \frac{(c+d)^2}{c^2 + d^2} \leq \frac{(a+b)^2}{ab}.$$

47.40. Dots, ka *M* kaut kādi racionālu skaitļu kopa.

Zināms, ka:

a) ja *M* satur *a* un *M* satur *b* (varbūt $a = b$), tad *M* satur arī skaitļus $a + b$ un $a \cdot b$;

b) ja *r* ir no nulles atšķirīgs racionāls skaitlis, tad *M* satur tieši vienu no skaitļiem *r* un $-r$.

Pierādīt, ka

a) *M* satur visus naturālos skaitļus,

b) *M* satur visus pozitīvos racionālos skaitļus.