LATVIJAS RAJONU 49. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

9.1. Vienādojot saucējus un sadalot skaitītāja izteiksmi reizinātājos, iegūstam vienādojumu

$$\frac{(a+b)(x+a)(x+b)}{a \cdot b \cdot x \cdot (x+a+b)} = 0 \ .$$

Vienādojuma saknes ir $x = -a$ un $x = -b$.

9.2. Centrālajā rūtiņā ierakstītais skaitlis ar saviem kaimiņiem viens pats veido 4 dažādas summas. Tātad kopā būs vismaz 4 dažādas summas.

Tas, ka var būt tikai 4 dažādas summas, redzams piemērā (skat. 49.2. zīm.).

5	3	8
4	7	1
6	2	9

49.2. zīm.

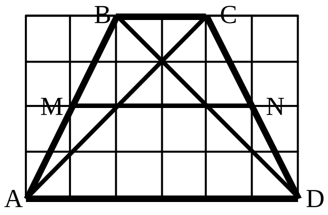
9.3. Apzīmējot vienādojuma saknes ar *a* un *b*, no Vjeta teorēmas iegūstam $ab - a - b = 12$ jeb $(a-1)(b-1) = 13$. Skaitli 13 var sadalīt divu veselu skaitļu reizinājumā 4 dažādos veidos: $13 = 13 \cdot 1 = 1 \cdot 13 = (-13) \cdot (-1) = (-1) \cdot (-13)$. Šiem sadalījumiem atbilst vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} a-1=13 \\ b-1=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a-1=1 \\ b-1=13 \end{cases} \quad \begin{cases} a-1=-13 \\ b-1=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} a-1=-1 \\ b-1=-13 \end{cases}.$$

Risinot pirmo vienādojumu sistēmu, iegūstam $a = 14, b = 2, p = -16, q = 28$. Otrajai sistēmai iegūstam tādas pašas *p* un *q* vērtības. Risinot trešo un ceturto vienādojumu sistēmas, iegūstam $p = 14, q = 0$.

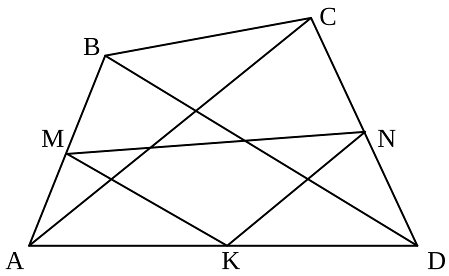
Atbilde: der kvadrātvienādojumi $x^2 - 16x + 28 = 0$ un $x^2 + 14x = 0$.

9.4. a) Prasītā četrstūra piemērs parādīts 49.3. zīmējumā.



49.3. zīm.

a) Apzīmēsim AD viduspunktu ar K (skat. 49.4. zīm.).



49.4. zīm.

9.5. Starp katriem diviem viens otram sekojošiem baltiem skaitļiem x un y atrodas sarkans skaitlis (tāds, piemēram, noteikti ir mazākais no tiem skaitļiem, kas atrodas starp x un y), un otrādi: starp katriem diviem viens otram sekojošiem sarkaniem skaitļiem x un y atrodas balts skaitlis. Tā kā baltie un sarkanie skaitļi izvietoti pamīšus, tad to daudzumi ir vienādi.

10.1. Pirmo vienādību pārveidojam formā

$$(x-1)(y-1)(y^2+y+1)=0 .$$

Tā kā $y^2+y+1 \neq 0$, tad $x=1$ vai $y=1$.

a) ja $x=1$, tad vienādība $yx^3+1=y+x^3 \Leftrightarrow y+1=y+1$ ir pareiza;

b) ja $y=1$, tad vienādība $yx^3+1=y+x^3 \Leftrightarrow x^3+1=1+x^3$ ir pareiza.

10.2. Skaidrs, ka nav tādu viencipara skaitļu.

Aplūkosim divciparu skaitli $\overline{ab}$. Tad $\overline{ab}=11\cdot(a+b)$, jeb $10a+b=11a+11b$, t.i. $10b+a=0$; bet šī vienādība nav iespējama.

Aplūkosim trīsciparu skaitli $\overline{abc}$. Vienādība $\overline{abc}=11\cdot(a+b+c)$ pārveidojas par $100a+10b+c=11a+11b+11c \Leftrightarrow 89a=10c+b$. Tā kā $10c+b \leq 99$, tad $a=1, c=8, b=9$. Iegūstam skaitli 189.

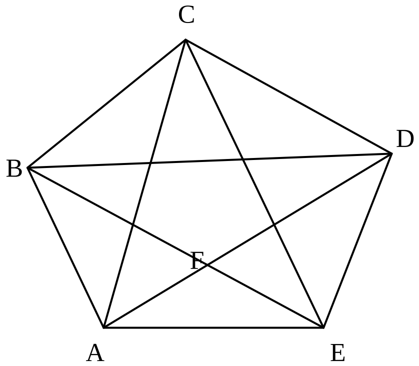
Aplūkosim četrciparu skaitli n. Skaidrs, ka $n \geq 1000$, bet vienpadsmitkāršota tā ciparu summa nepārsniedz $11 \cdot (9+9+9+9) = 396$. Tātad prasītā vienādība nav iespējama.

Atbilde: vienīgais šāds skaitlis ir 189.

10.3. a) no dotā seko, ka racionāls ir skaitlis $x^{98} : x^{55} = x^{34}$. Līdzīgi iegūstam, ka racionāli ir skaitļi $x^{55} : x^{34} = x^{21}$, $x^{34} : x^{21} = x^{13}$, $x^{21} : x^{13} = x^{8}$, $x^{13} : x^{8} = x^{5}$, $x^{8} : x^{5} = x^{3}$, $x^{5} : x^{3} = x^{2}$, $x^{3} : x^{2} = x$.

c) nē. Ja, piemēram, $x = \sqrt[7]{2}$, tad x nav racionāls skaitlis, bet $x^{91} = 2^{13}$ un $x^{42} = 2^{6}$ ir racionāli skaitļi.

10.4. Aplūkosim 49.5. zīm. .



49.5. zīm.

No $BC = CD$ seko, ka $\angle CBD = \angle CDB = \alpha$. Trijstūri BCD un AFE ir ar atbilstoši paralēlām malām, tātad līdzīgi; tāpēc $\angle FAE = \angle FEA = \alpha$. No iekšējo šķērsleņķu īpašībām seko vienādība $\angle DBE = \angle BDA = \alpha$. Tāpēc trijstūri BFD un AFE ir vienādsānu, no kurienes seko vienādība $BE = AD$.

Trapeces $ABDE$ diagonāles ir vienādas, tātad tā ir vienādsānu trapece. Tāpēc $DE = AB$. Līdzīgi pierāda, ka $AE = BC$. Prasītais pierādīts.

10.5. a) sadalīsim vispirms cilvēkus divās grupās patvaļīgi. Ar S apzīmēsim to draugu pāru skaitu, kas atrodas dažādās grupās. Ja ir tāds cilvēks, kuram viņa grupā ir vairāk draugu nekā otrā, pārcelsim viņu uz otru grupu. Tādas pārcelšanas rezultātā S palielinās. Skaidrs, ka S nevar palielināties bezgalīgi (S vērtības ir veseli skaitļi, kas nav lielāki par visu grupā esošo cilvēku pāru skaitu). Brīdī, kad S vairs nav palielināms, ir iegūts prasītais sadalījums.

b) nē, šis apgalvojums nav pareizs. Piemēram, ja grupā ir 3 cilvēki un visi draudzējas savā starpā, tad prasītais sadalījums nav iespējams.

11.1. Ja $x \geq 4$, tad vienādojuma kreisā puse nav mazāka par 64 un prasītā vienādība neizpildās.

Ja $x < 3$, tad vienādojuma kreisā puse nepārsniedz 27 un prasītā vienādība neizpildās.

Tātad $3 \leq x < 4$ un iegūstam vienādojumu $x \cdot [3x] = 41$. Tā kā $9 \leq 3x < 12$, tad šķirojam variantus:

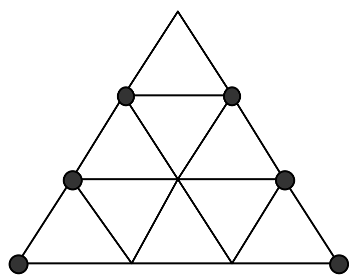
a) $[3x] = 9$; $9x = 41$, $x = 4\frac{5}{9}$ -- neder, jo $[x] \neq 3$;

b) $[3x] = 10$; $10x = 41$, $x = 4.1$ -- neder, jo $[x] \neq 3$;

c) $[3x] = 11$; $11x = 41$, $x = 3\frac{8}{11}$ -- der (nepieciešama pārbaude).

Atbilde: vienīgais šāds skaitlis ir $3\frac{8}{11}$.

11. 2. To var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 49.6. zīm. .



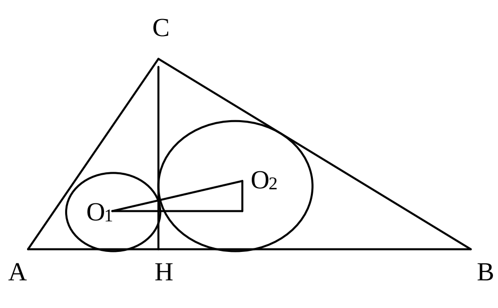
49.6. zīm.

11. 3. Skaitlis 56^x beidzas ar ciparu 6; skaitlis 5^y -- ar ciparu 5. Tāpēc mazākās iespējamās izteiksmes vērtības ir 1, 11, 21, utt. .

Viegli pārbaudīt, ka $56^2 - 5^5 = 3136 - 3125 = 11$. Atliek pierādīt, ka vienādība $56^x - 5^y = 1$ nav iespējama. Tiešām, šī vienādība ir pretrunīga pēc moduļa 4:

$56^x - 5^y \equiv 0^x - 1^y \equiv 3 \neq 1 \pmod{4}$.

11.4. Apzīmēsim mazo riņķu rādiusus ar r_1 un r_2 (skat. 49.7. zīm.).



49.7. zīm.

Tad $O_1O_2^2 = (r_1 + r_2)^2 + (r_1 - r_2)^2 = 2(r_1^2 + r_2^2)$. Trijstūri *AHC*, *CHB* un *ACB* ir līdzīgi savā starpā; tāpēc to ievilkto riņķu rādiusi ir proporcionāli hipotenūzām; t.i.

$r_1 = AC \cdot k, r_2 = CB \cdot k, 1 = r = AB \cdot k$. Tā kā $AC^2 + CB^2 = AB^2$, tad $r_1^2 + r_2^2 = 1$. Tāpēc $O_1O_2^2 = 2$ un $O_1O_2 = \sqrt{2}$.

11.5. a) Lielākais skaitlis M_1 var būt tikai vienā eksemplārā (pretējā gadījumā starp diviem tā eksemplāriem jābūt vēl kādam lielākam skaitlim). Otrs lielākais skaitlis M_2 var būt ne vairāk kā divos eksemplāros (starp katriem diviem tā eksemplāriem jābūt par M_2 lielākam skaitlim, bet tāds ir tikai M_1). Trešais lielākais skaitlis M_3 var būt ne vairāk kā četros eksemplāros (tā eksemplārus var atdalīt tikai M_1 un M_2). Ja neviens skaitlis nav lielāks par 3, tad skaitļiem iespējamas tikai 3 dažādas vērtības, un to daudzums nepārsniedz $1 + 2 + 4 = 7$.

b) Piemērs parāda , ka tas ir iespējams: 1 2 1 3 1 2 1 4 1 2 1 3 1 2 1.

12.1. Nē, neeksistē. Sareizinot dotās vienādības, iegūstam

$$1 = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = \sin y \cdot \cos y .$$

Taču $\sin y \cdot \cos y = \frac{1}{2} \sin 2y \le 0.5$.

12.2. Aprēķinām doto izteiksmi pēc moduļa 3:

$$19 \cdot 98 \cdot 2^{1998} - 1 \equiv 1 \cdot (-1) \cdot (-1)^{1998} - 1 \equiv (-1) - 1 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Tātad skaitlis $19 \cdot 98 \cdot 2^{1998} - 1$ ar 3 nedalās.

12.3. a) Ievietojot dotajā vienādībā $x = 0$, iegūstam

$$f(y) + f(-y) = f(0) \cdot f(y).$$

Ievietojot dotajā vienādībā $x = 0$ un y aizvietojot ar $(-y)$, iegūstam

$$f(-y) + f(y) = f(0) \cdot f(-y).$$

No šejienes seko, ka $f(0) \cdot f(y) = f(0) \cdot f(-y)$; tā kā $f(0) \neq 0$, tad $f(y) = f(-y)$.

b) Ja $f(b) = 0$, tad no dotā seko, ka $f(x+b) + f(x-b) = 0$. Liekot šajā vienādībā x vietā $x+b$, iegūstam $f(x+2b) + f(x) = 0$, liekot x vietā $x+3b$, iegūstam $f(x+4b) + f(x+2b) = 0$. No divām pēdējām vienādībām seko prasītais: $f(x+4b) = f(x)$.

12.4. Izmantojot sinusu teorēmu, pārveidojam dotās vienādības kreiso pusi:

$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\cos\alpha+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\cos\beta+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cos\gamma=$$

$$\left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right)\cos\beta+\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)\cos\gamma=$$

$$\frac{\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin\gamma\cos\alpha+\sin\alpha\cos\gamma}{\sin\beta}+\frac{\sin\gamma\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma}{\sin\alpha}=$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma}+\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\beta}+\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha}=$$

$$\frac{\sin(\pi-y)}{\sin\gamma}+\frac{\sin(\pi-\beta)}{\sin\beta}+\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\sin\alpha}=3.$$

Prasītā vienādība pierādīta.

12.5. a) Aplūkosim visus 10 trijniekus, kas atrodas aplī. Katrs skaitlis ietilpst trijos šādos trijniekos. Tātad visu trijnieku summu summa ir vienāda ar $3\cdot(0+1+\cdots+9)=135$. Ja katra trijnieka summa nepārsniegtu 13, tad kopējā summa nepārsniegtu 130; tātad prasītais nav iespējams.

b) Kādā apļa vietā ierakstīts skaitlis "0"; aiz nulles seko skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_9$. Sadalīsim šos skaitļus trīs trijniekos: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9. Ja katra trijnieka skaitļu summa nepārsniegtu 14, tad kopējā skaitļu summa nepārsniegtu $3\cdot 14=42$; taču šī summa ir vienāda ar $(0+1+2+\cdots+9)=45$. Tātad šāds izvietojums nav iespējams.

c) Šāds skaitļu izvietojums ir iespējams. Piemēram, skaitļus pa apli var rakstīt sekojošā secībā: 2; 4; 3; 8; 1; 5; 9; 0; 6; 7.