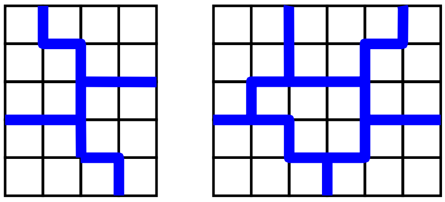
## ĪSI ATRISINĀJUMI

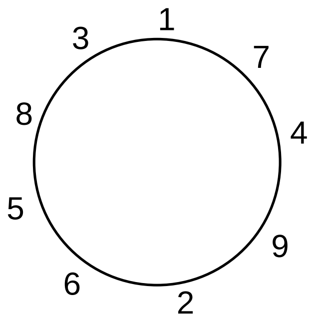
5.1. Piemēram, 274.

5.2. a) jā. Piemēram, 1; 2; 3; 4.
b) nē. Visiem pēdējiem cipariem jābūt dažādiem, un neviens no tiem nav 0. Ja kāds no tiem ir 5, tad pārējie var būt tikai 1; 3; 7; 9, turklāt 1 un 9, kā arī 3 un 7 reizē nevar būt. Ja 5 nav, tad no katra no pāriem (1;9), (2;8), (3;7), (4;6) var būt tikai viens pēdējais cipars.

5.3. a), b): jā, skat. 5. zīm.; c): nē, jo rūtiņu skaits taisnstūrī nedalās ar 5.



5. zīm.



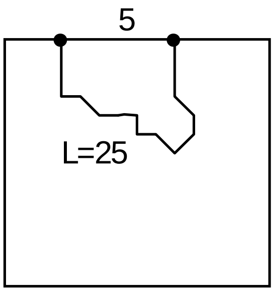

6. zīm.

5.4. Jā, var. Skat., piem., 6. zīm.

5.5. Jā, tā var gadīties. Piemērs: čempionātā spēlē 13 komandas. Viena no tām uzvar 5 spēlēs un zaudē 7 spēlēs, bet visas citas spēles čempionātā beidzas neizšķirti.

6.1. Jebkurš daudzums no 0 līdz 3. Piemēri:
(1,4,7), (1,3,6), (1,2,5), (3,6,9)

6.2. a) jā; skat. 7. zīm.




7. zīm.

b) nē. Ja kopīgās robežas garums ir L, tad abu perimetru summa ir 40+2L jeb 50+100. No vienādības 40+2L=150 iegūstam L=55, tāpēc vienas daļas perimetrs nevar būt 50.

6.3. Atmetot 1, pārējie deviņi skaitļi sadalās 3 trijniekos ar kopējo summu 54; tāpēc vismaz vienam no šiem trijniekiem summa nav mazāka par 18. Līdzīgi, atmetot 10, iegūstam trijnieku, kura summa nav lielāka par 15.

6.4. Jā, var. Skat., piem., 8. zīm.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

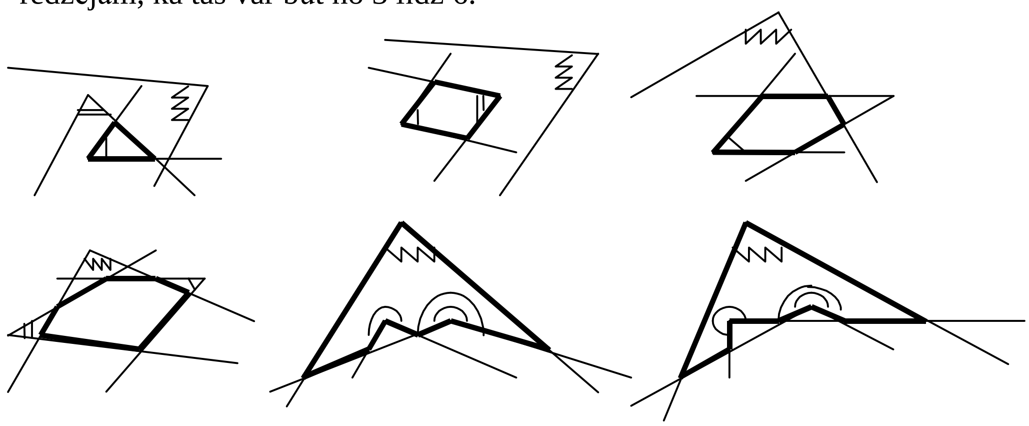
8. zīm.

6.5. Nē, nevar. Apzīmējot ar x patvaļīgu uzrakstīto skaitli, ar $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ tā kaimiņus un saskaitot visas vienādības $x + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 17$, iegūstam $5 \cdot S = 17 \cdot 24$, kur S - visu uzrakstīto skaitļu summa. Bet $17 \cdot 24$ nedalās ar 5.

7.1. Arī n, jo xy, $\frac{x}{y}$ un $\frac{y}{x}$ vienlaicīgi ir pozitīvi vai negatīvi.

7.2. No četrām baltajām figūrām sastādām baltu kvadrātu, uzliekam virsū melnajam un sākotnējās griezuma līnijas no katra kvadrāta "pārkopējam" otrā.

7.3. a) skat. 9. zīm.
b) šai gadījumā daudzstūris ir izliekts, tāpēc uz katra leņķa malas atrodas augstākais viena daudzstūra mala, un tā malu skaits nepārsniedz 6; iepriekš redzējām, ka tas var būt no 3 līdz 6.



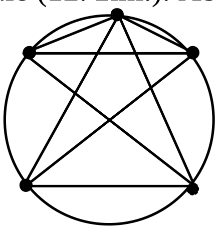
9. zīm.

7.4. a) piemēram, 5
b) bezgalīgi daudz, piemēram, visi skaitļi 55 ......... 505
c) sauksim par bloku desmit pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus $\overline{n0}$, $\overline{n1}$, $\overline{n2}$, ..., $\overline{n9}$. No 9 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem vismaz 5 pieder vienam blokam un šo skaitļu ciparu summas pašas ir pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi, tāpēc viena no tām dalās ar 5

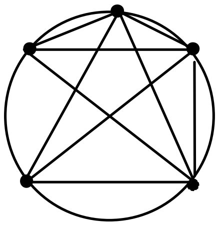
7.5. Nē, nevar. Izdarot gājienus, uz tāfeles uzrakstīto skaitļu reizinājums nemainās, bet $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{3}\neq\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{2}$.

8.1. Meklējamā summa ir
$(x - 1 + x + 2)(1 - 3x + x + 3 + 2x - 3) = (2x + 1)\cdot 1 = 2x + 1.$

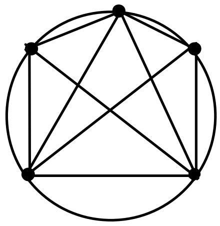
8.2. To, ka var novilkt 8 nogriežņus, skat. 10. zīm.
Ja novelk 9 nogriežņus, tad ir nenovilkta viena mala (11. zīm.) vai viena diagonāle (12. zīm.). Abos gadījumos redzams, ka veidojas četrstūri.



10. zīm.



11. zīm.



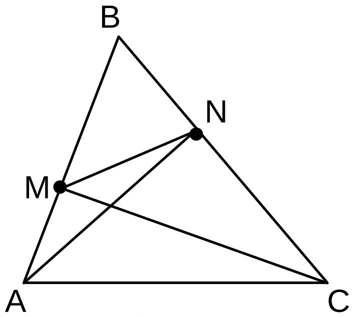
12. zīm.

8.3. <u>1. atrisinājums</u>: izmanto identitāti

$$(a^3 - a - 1)(a^2 - a - 1) = a^5 - a^4 - 1$$

<u>2. atrisinājums</u>:
$a^3=a+1 \Rightarrow a^4 = a^2+a \Rightarrow a^4+a^3-a = a^3+a^2 \Rightarrow a^4+1 = a^3+a^2 = a^2(a+1) = a^2\cdot a^3 = a^5$

8.4. No dotā seko, ka AM=BN. Tāpēc $\Delta ABN=\Delta CAM$ (mlm), tātad $\angle BAN=\angle ACM$, no kurienes seko vajadzīgais.




13. zīm.

8.5. a) nevar. Pieņemsim no pretējā, ka tas ir izdarīts. Saskaitot visu rindiņu un kolonnu summas, iegūsim 1+2+...+10=55. Bet rezultātam jābūt pāra skaitlim, jo katrā rūtiņā ierakstītais skaitlis “piedalās” summā 55 kā saskaitāmais divas reizes.
b) skat. 14. zīm.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

14. zīm.

9.1. Ja n - naturāls skaitlis, tad $2n + (-n) + (-n) = 0$, bet $(2n)^3 + (-n)^3 + (-n)^3 = 6n^3$. Ja n kļūst pēc patikas liels, $6n^3$ pārsniedz 200020002000.

9.2. Centrālajā rūtiņā ierakstītais skaitlis ar saviem kaimiņiem viens pats veido 4 dažādas summas. Tas, ka var būt tikai 4 dažādas summas, redzams 2.zīmējumā.

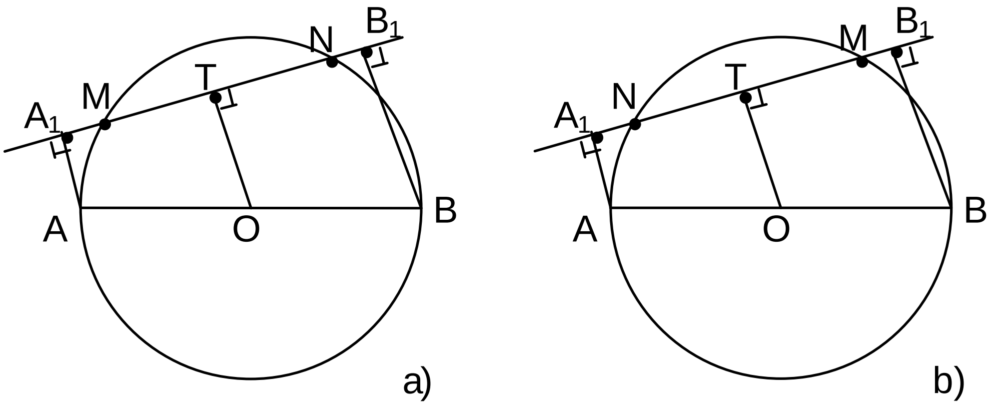
| | | |
|---|---|---|
| 5 | 3 | 8 |
| 4 | 7 | 1 |
| 6 | 2 | 9 |

2. zīm.

9.3. Novelkam no centra O perpendikulu OT pret MN. Tā kā AO=BO, tad saskaņā ar Talesa teorēmu $A_1T = B_1T = x$. Saskaņā ar teorēmu par diametru, kas perpendikulārs hordai, MT=NT=y. Tālāk šķirojam divus gadījumus.

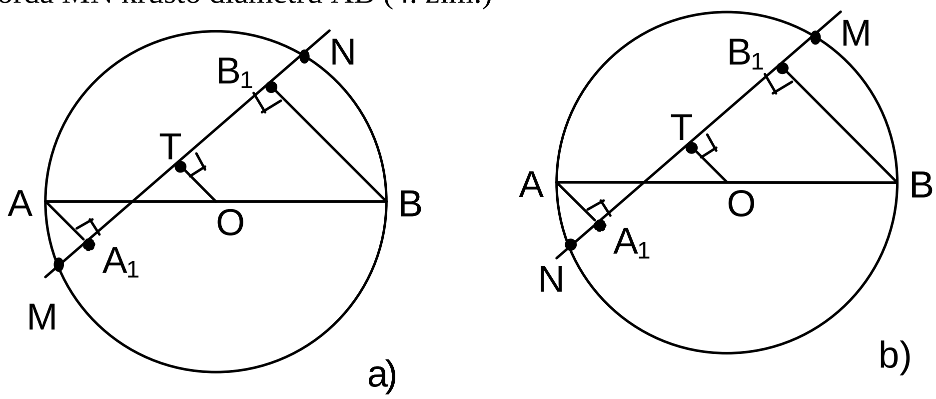
a) horda MN nekrusto diametru AB (3.zīm.).

Redzam, ka vai nu $A_1M = B_1N = x\text{-}y$ (3.[a] zīm.), vai arī $A_1M = B_1N = x+y$ (3.[b] zīm.)




3. zīm.

b) horda MN krusto diametru AB (4. zīm.)




4. zīm.

Tad vai nu $A_1M = B_1N = y\text{-}x$ (4.[a] zīm.), vai arī $A_1M = B_1N = y+x$ (4.[b] zīm.)

9.4. a) piemēram, der skaitļi 1; 1; 1; 1; 2.

b) nē, nevar. Pieņemsim no pretējā, ka skaitļi $a<b<c<d<e$ apmierina uzdevuma prasības. Apskatām daļu $\frac{a+b+c}{d+e}$. Tās skaitītājs mazāks par 3c, bet saucējs lielāks par 2c. Tāpēc tās vērtība mazāka par 1,5. Tā kā tā ir naturāls skaitlis, tad tā ir 1. Tātad

$$a+b+c=d+e \qquad (1)$$

Apskatām daļu $\frac{a+b+d}{c+e} < \frac{2c+e}{c+e} = 1 + \frac{c}{c+e} < 2$; tā kā tās vērtība ir naturāls skaitlis, tad tā ir 1. Tātad

$$a+b+d=c+e \qquad (2)$$

Atņemot (2) no (1), iegūstam c - d = d - c, no kurienes c=d. Iegūta pretruna.

9.5. a) nē. Apzīmēsim rindiņās resp. kolonnās ierakstīto skaitļu reizinājumus ar $r_1$, $r_2$, ..., $r_7$ resp. $k_1$, $k_2$, ..., $k_7$. Ja $r_1 \cdot k_1 = r_2 \cdot k_2 = \ldots = r_7 \cdot k_7 = -1$, tad $(r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_7) \cdot (k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_7) = -1$.

Bet šis reizinājums ir visu tabulā ierakstīto skaitļu reizinājuma kvadrāts - pretruna.

b) jā. Skat., piem., 5.zīm.; tukšajās rūtiņās ierakstīts +1.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8. | – | | | | | | | |
| 7. | | | | | | | | |
| 6. | | | – | | | | | |
| 5. | | | | | | | | |
| 4. | | | | | – | | | |
| 3. | | | | | | | | |
| 2. | | | | | | | – | |
| 1. | | | | | | | | |
| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. |

5. zīm.

10.1. Apzīmējam $A = \overline{xyz} = 100x+10y+z$, tad $B = \overline{ztx} = 100z+10t+x$. Iegūstam vienādojumus

$$99(x-z) + 10(y-t) = 297 \qquad (1)$$
$$x + y + t = 23 \qquad (2)$$

Ievērojam, ka $|y-t| \le 9$, tāpēc $|10(y-t)| \le 90$.

Tā kā $99 \cdot 2 = 198$ un $99 \cdot 4 = 396$, no (1) seko x-z=3; tad y-t=0 un y=t. No (2) iegūstam 2z+3+t=23 un t=20-2z.

Tā kā t ir cipars, tad $z \ge 6$; tā kā x=z+3 ir cipars, tad $z \le 6$. Tāpēc z=6, x=9, y=t=8 un A=986, B=689.

10.2. a) jā, var. Skat., piem., 6.zīm.

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 6 | 3 |
| 4 | 1 | 15 |
| 2 | 10 | 5 |

6. zīm.

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| 4 | ? | |
| 5 | 10 | ? |

7. zīm.

b) nē, nevar. Pieņemsim no pretējā, ka to izdevies izdarīt. Katram tabulā ierakstītam skaitlim ir vismaz divi kaimiņi. Tā kā 13; 11; 7 var atrasties blakus tikai ar 1, tad šo skaitļu tabulā nav. Ja tabulā būtu 5, tad tas atrastos stūrī ar kaimiņiem 1 un 10; bet tad skaitlim 10 abas pārējās blakus rūtiņas vienlaicīgi aizpildīt nevar, jo izmantojams tikai skaitlis 2 (skat. 7.zīm.). Tātad arī skaitļa 5 tabulā nav, un tā aizpildīta ar skaitļiem 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12.

Tagad 9 var atrasties blakus tikai ar 1 un 3, 10 - tikai ar 1 un 2. Iegūstam 8. zīm. attēloto ainu.

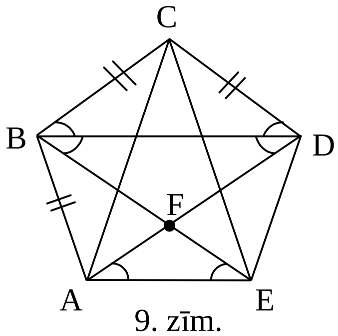
| | | |
|---|---|---|
| 9 | 3 | x |
| 1 | y | z |
| 10 | 2 | |

8. zīm.

Skaidrs, ka skaitļiem 6 un 12 jāatrodas rūtiņās x un y. Abos gadījumos rūtiņā z nevar ierakstīt ne 4, ne 8 - pretruna.

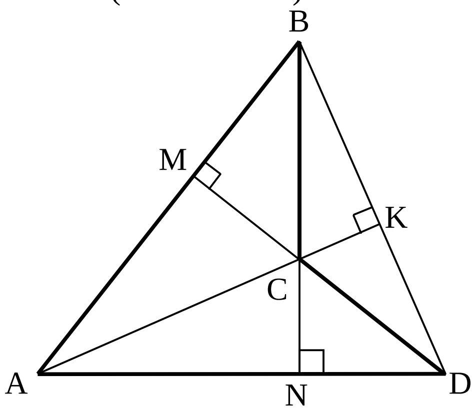
10.3. No BC=CD seko $\angle CBD=\angle CDB=\alpha$. $\Delta BCD$ un $\Delta AFE$ ir ar atbilstoši paralēlām malām, tātad līdzīgi; tāpēc arī $\angle FAE=\angle FEA=\alpha$. No iekšējo šķērsleņķu īpašībām $\angle DBE=\angle BDA=\alpha$. Tāpēc $\Delta BFD$ un $\Delta AFE$ ie vienādsānu, no kurienes seko BE=AD.

Trapeces ABDE diagonāles ir vienādas, tātad tā ir vienādsānu. Tāpēc DE=AB. Līdzīgi pierāda, ka AE=BC.

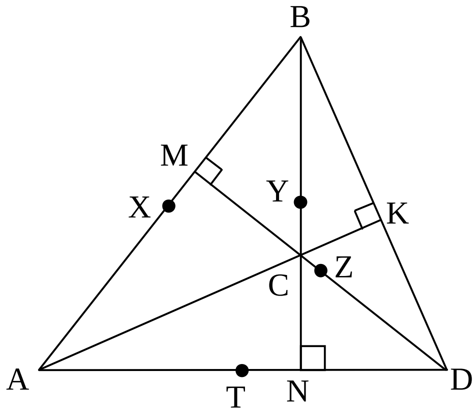



9. zīm.

10.4. Ievērosim, ka četrstūra ABCD atvērtā leņķa C lielums ir $360°-3\cdot45°=225°$. Atrodam taišņu BC un DC krustpunktus N un M atbilstoši ar malām AD un AB. Tad $\angle MCB=\angle C-180°=45°$ un $\angle NCD=\angle C-180°=45°$. Tad no $\Delta BMC$ un $\Delta CND$ iekšējo leņķu summām seko, ka $DM\perp AB$, $BN\perp AD$. Tāpēc C ir $\Delta ABD$ augstumu krustpunkts. Tāpēc, ja AC pagarina līdz krustpunktam K ar BD, iegūstam, ka $AK\perp BD$ (skat. 10. zīm.).




10. zīm.




11. zīm.

Pieņemsim, ka X, Y, Z, T ir attiecīgi AB, BC, CD un DA viduspunkti (skat. 11. zīm.).

No viduslīniju īpašībām seko, ka $XY\parallel AC\parallel TZ$ un $YZ\parallel BD\parallel XT$, tāpēc XYZT ir paralelograms; tā kā $AC\perp BD$, tad tas ir taisnstūris.

Piezīme: patiesībā var pierādīt pat vairāk - ka XYZT ir kvadrāts.

10.5. Apzīmēsim izvēlētos skaitļus ar $x_1, x_2, ..., x_{10}$, bet neizvēlētos - ar $y_1, y_2, ..., y_{10}$. Ievērosim, ka $1+2+...+20 = (20+1)\cdot10 = 210 = 2\cdot105$, tāpēc

$$k_1+...+k_{10} = y_1+y_2+...+y_{10}.$$

Saskaņā ar "nosacījumu par 21" skaitļi $21-x_1$, $21-x_2$, ..., $21-x_{10}$ ir tie paši skaitļi $y_1$, $y_2$, ..., $y_{10}$, varbūt citā kārtībā.

Tāpēc arī $21-y_1$, $21-y_2$, ..., $21-y_{10}$ ir tie paši skaitļi $x_1$, $x_2$, ..., $x_{10}$, tikai varbūt citā kārtībā.

Tāpēc $x_1^2+...+x_{10}^2 = (21-y_1)^2+ ... +(21-y_{10})^2=$

$= 10\cdot21^2 - 2\cdot21\cdot(y_1+...+y_{10}) + (y_1^2+...+y_{10}^2) =$

$= 10\cdot21^2 - 2\cdot21\cdot105$□$+ (y_1^2+...+y_{10}^2) = y_1^2+...+y_{10}^2$

Tāpēc izvēlēto skaitļu kvadrātu summa ir $\frac{1}{2}(1^2+2^2+...+20^2) = 1435$.

**Norādes vērtēšanai**

9.2. Par piemēru, ka četras dažādas summas var būt - 6 punkti. Par pierādījumu, ka to ir vismaz četras - 4 punkti.

9.3. Ja aplūkots tikai viens no iespējamiem hordas stāvokļiem, jānoņem 2 punkti. Ja nav apskatīti varianti atkarībā no tā, kurš hordas gals ir M un kurš - N, jānoņem vēl 1 punkts.

9.4. Par katru daļu - 5 punkti.

9.5. Par katru daļu - 5 punkti.

10.1. Pareiza atbilde ar pārbaudi ir 5 punktus vērta; pamatojums, ka citu atbilžu nav - tāpat.

10.2. Par katru daļu - 5 punkti.

10.4. Par kādu īpašu četrstūru aplūkošanu (piem., kur BC=CD) līdz 2 punktiem.

10.5. Par konkrētu skaitļu sistēmu atrašanu un aprēķinu (nav pierādījuma vispārīgā gadījumā) - līdz 2 punktiem.

11.1. Par atbildi vien - 2 punkti. Ja vispārīgā risinājumā nav pārbaudes, jānoņem 1 punkts.

11.3. Par kāda īpaša gadījuma aplūkošanu (piemēram, ABCD - trapece) līdz 2 punktiem.

11.4. Par a) - 2 punkti, par b) - 3 punkti, par c) - 5 punkti.

11.5. Par piemēru ar 2n-1 centriem - 4 punkti, par pierādījumu, ka 2n centru būt nevar - 6 punkti.

12.1. Par katru daļu 5 punkti.

12.3. Par atbildi vien (pat bez jebkāda pamatojuma) - 4 punkti.

12.4. Par katru daļu - 5 punkti.

---

Olimpiādes protokolus ar visu dalībnieku saņemtajiem vērtējumiem par katru uzdevumu un ziņām par piešķirtajiem apbalvojumiem lūdzam nosūtīt uz adresi

A.Liepas NMS. ROL.
Fizikas un matemātikas fakultāte
Latvijas Universitāte
Raiņa bulvāris 19
LV-1586
vai arī olimpiādes 3. kārtas laikā nodot A.Andžānam.

Labu veiksmi jums un jūsu skolēniem!