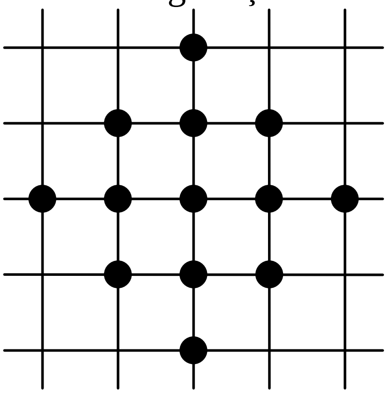
LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 51. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

5. klase

Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Uzrakstīt kaut vienu trīsciparu skaitli, kas ar katru no skaitļiem 654, 253 un 673 vienā šķirā sakrīt, bet divās šķirās atšķiras.

2. Neatraujot zīmuli no papīra, novilkt līniju, kas sastāv no pieciem taisnes nogriežņiem un satur visus 1. zīm. izceltos 13 punktus.



1. zīm.

Pa vienu un to pašu līnijas posmu nedrīkst vilkt ar zīmuli vairāk par vienu reizi.

3. Trīs dažādi naturāli skaitļi ir tādi, ka pirmais atšķiras no otrā par tikpat, par cik otrais atšķiras no trešā. Šie skaitļi uzrakstīti rindā viens aiz otra (vispirms pirmais, tad otrais, tad trešais) bez atstarpēm, iegūstot septiņciparu naturālu skaitli n. Kāda ir skaitļa n lielākā iespējamā vērtība?

4. Traukā atrodas vairākas konfektes. Katra no tām ir vai nu salda, vai skāba, vai rūgtena. Bez tam katra no konfektēm ir vai nu sarkana, vai zaļa, vai dzeltena. Vai var gadīties, ka vienlaicīgi saldo konfekšu ir vairāk nekā sarkano, sarkano - vairāk nekā skābo, skābo - vairāk nekā zaļo, zaļo - vairāk nekā rūgteno un rūgteno - vairāk nekā dzelteno?

5. Rindā novietoti 1000 āboli. Katriem diviem blakus stāvošiem āboliem masas atšķiras tieši par 1 gramu. Pierādiet, ka ābolus var sadalīt divās kaudzēs ar vienādām masām tā, lai katrā kaudzē būtu tieši 500 āboli. (Ābolus dalīt gabalos nedrīkst.)

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 51. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

6. klase

Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Kvadrāta malas garums ir 10 m. Vai to var sadalīt divās daļās, kuru perimetri ir a) 30 m un 60 m, b) 50 m un 100 m?

2. Kādu lielāko iespējamo daudzumu naturālu skaitļu kvadrātu var uzrakstīt, lai visi uzrakstītie cipari būtu dažādi un neviens no tiem nebūtu 0?
(Piezīme: par skaitļa kvadrātu sauc rezultātu, ko iegūst, pareizinot šo skaitli pašu ar sevi.)

3. Velēnu vecītis uzdāvināja Maijai lādīti ar 49 rubīniem, 49 smaragdiem un 1 dimantu. Dārgakmeņu masas ir 1 g, 2 g, 3 g, … , 99 g (nav dots, cik kurš dārgakmens sver.) Zināms, ka visi rubīni kopā sver par 2450 g vairāk nekā visi smaragdi kopā. Cik sver dimants?

4. Kvadrāts sastāv no 12×12 vienādām kvadrātiskām rūtiņām ar malas garumu 1. Šajā kvadrātā iekrāsots pa vienam taisnstūrim ar izmēriem 1×5; 1×4; 2×2; 1×3; 1×2; 1×1 (taisnstūru malas iet pa rūtiņu malām). Vai iespējams, ka katrā rūtiņu rindā un katrā rūtiņu kolonnā vismaz viena rūtiņa iekrāsota? Vai tas iespējams, ja kvadrāta izmēri ir 13×13?

5. Sniegbaltīte uzrakstīja rindā kaut kādā kārtībā visus naturālos skaitļus no 1 līdz 7, katru skaitli tieši vienu reizi. To pašu izdarīja katrs no 7 rūķīšiem. Katrs rūķītis atrada, kurus skaitļus viņš uzrakstījis tajās pašās vietās (pirmajā, otrajā, …) kā Sniegbaltīte. Visiem rūķīšiem šādu skaitļu daudzumi izrādījās atšķirīgi. Vai var gadīties, ka neviens rūķītis neuzrakstīja skaitļus tieši tādā pašā kārtībā kā Sniegbaltīte?

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 51. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

7. klase

Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Divos pēc kārtas sekojošos gados katrā ir 365 dienas. Pirmajā no tiem sestdienu ir vairāk nekā trešdienu. Kuru nedēļas dienu otrajā gadā ir visvairāk?

2. Plaknē uzzīmēti trīs leņķi, kuru kopīgā daļa ir daudzstūris.
   a) pierādīt, ka šim daudzstūrim var būt 3; 4; 5; 6; 7; 8 malas, ja minēto leņķu lielumi var arī pārsniegt 180^0;
   b) cik malu var būt šim daudzstūrim, ja zināms, ka minētie leņķi visi mazāki par 180^0?

3. Kādu mazāko daudzumu naturālu skaitļu var uzrakstīt uz papīra lapas, lai būtu spēkā īpašība: katrs naturāls skaitlis, kas nav mazāks par 800 un nav lielāks par 2400, atšķiras no kāda no uzrakstītajiem skaitļiem ne vairāk kā par 25% no savas vērtības?

4. Virknē uzrakstīti cipari no 1 līdz 9 (skat. 2. zīm.):

   1 2 3 4 5 6 7 8 9

   2. zīm.

   Kādu lielāko daudzumu semikolu var ievietot starp blakus esošiem cipariem, lai tie sadalītu ciparu virkni tādu naturālu skaitļu pierakstos, no kuriem katriem diviem lielākais kopīgais dalītājs ir 1? (Piemēram, 123;45678;9 neder, jo 123 un 9 abi dalās ar 3.)

5. Sākumā uz galda vienā kaudzē atrodas 2001 konfekte. Ar vienu gājienu no tām kaudzēm, kas atrodas uz galda, atļauts izvēlēties vienu kaudzi, kurā ir vismaz 3 konfektes, vienu no šīs kaudzes konfektēm apēst un atlikušās sadalīt divās kaudzēs (varbūt dažāda lieluma). Vai ar šādiem gājieniem var panākt, lai uz galda atrastos tikai kaudzītes, kas katra sastāv no tieši 3 konfektēm?

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 51. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

8. klase

Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Dots, ka $x+y=z+t$ un $x+z=y+t$. Pierādīt, ka $xy+zt=xz+yt$.

2. Uz riņķa līnijas atzīmēti 5 punkti. Kādu lielāko daudzumu hordu ar abiem galapunktiem šajos punktos var novilkt, lai neveidotos neviens četrstūris ar visām virsotnēm atzīmētajos punktos?

3. Uzrakstiet kaut vienu desmitciparu skaitli, kam visi cipari ir dažādi un kam piemīt īpašība: izsvītrojot jebkurus n ciparus (n - jebkurš naturāls skaitlis, kas nepārsniedz 6), atlikušie cipari (tai pašā secībā) veido saliktu skaitli. Pamatojiet savu risinājumu.

4. Četras horizontālas un četras vertikālas taisnes sadala kvadrātu 25 taisnstūros. Tieši 4 (ne vairāk un ne mazāk) no šiem taisnstūriem ir kvadrāti. Pierādiet, ka no šiem kvadrātiem var izvēlēties divus vienādus.

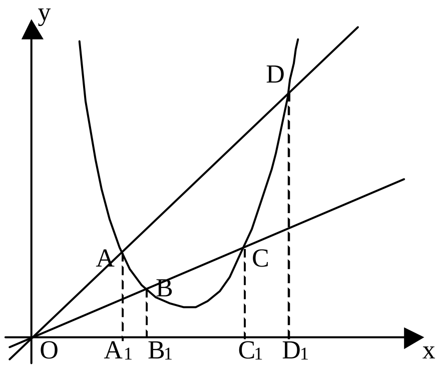
5. Andris un Jānis spēlē spēli. Viņi pamīšus izdara pa vienam gājienam; sāk Andris. Andris ar katru savu gājienu uzraksta vienu no cipariem deviņciparu skaitlī (vispirms pirmo, tad otro, trešo, …), izmantojot tikai ciparus 1 un 2. Savukārt Jānis pēc katra Andra gājiena ar savu gājienu vai nu nedara neko, vai arī apmaina vietām divus jau uzrakstītus ciparus. Vai Jānis var panākt, ka beigās iegūtais deviņciparu skaitlis ir simetrisks (t.i., šis skaitlis ir viens un tas pats, lasot to "no sākuma" un "no gala")?

9. klase

9. 1. Dots, n – naturāls skaitlis. Pierādiet, ka vismaz viens no skaitļiem $n^3 - n$ un $n^3 + n$ dalās ar 10.

9.2. Dots, ka *AB* ir riņķa līnijas diametrs, bet *MN* – tās horda, kas nav diametrs (visi punkti *A*, *B*, *M*, *N* ir atšķirīgi). No punktiem *A* un *B* pret taisni *MN* novilkti perpendikuli; to pamati ir attiecīgi A_1 un B_1. Pierādīt, ka $MA_1 = NB_1$.

9.3. Funkcijas $y = x^2 + px + q$ grafiks krusto funkciju $y = x$ un $y = \frac{1}{2}x$ grafikus punktos A, B, C, D tā kā parādīts 51.1. zīmējumā.



51.1. zīm.

Pierādīt, ka $C_1D_1 - A_1B_1 = \frac{1}{2}$, ja A_1, B_1, C_1, D_1 ir to perpendikulu pamati, kas vilkti pret Ox asi attiecīgi no punktiem A, B, C, D.

9.4. Izliektā 100-stūrī novilktas vairākas diagonāles, kas to sadala trijstūros; nekādas divas no novilktajām diagonālēm nekrustojas. Kāds ir mazākais iespējamais un kāds – lielākais iespējamais to 100-stūra virsotņu skaits, no kurām nav novilkta neviena diagonāle?

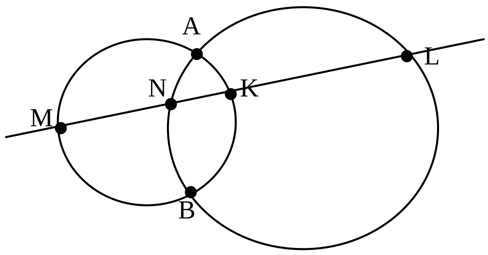
9.5. Plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa; rūtiņas malas garums ir 1. Uzzīmēta slēgta lauzta līnija, kuras visi posmi iet pa rūtiņu malām, un katra posma garums ir nepāra skaitlis. Vai šai līnijai var būt tieši
a) 2000, b) 2001, c) 2002 posmi?

10. klase

10. 1. Dots, ka *A* un *B* ir trīsciparu naturāli skaitļi, pie tam *A* simtu cipars sakrīt ar *B* vienu ciparu, bet *B* simtu cipars sakrīt ar *A* vienu ciparu. Zināms arī, ka $A - B = 297$ un *B* ciparu summa ir 23. Atrast *A* un *B*.

10.2. Kvadrāts sastāvēja no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Vienu stūra rūtiņu izgrieza un atlikušo figūru sagrieza trijstūros ar vienādiem laukumiem. Kāds ir mazākais iespējamais šo trijstūru skaits?

10.3. Divas riņķa līnijas krustojas punktos *A* un *B*. Novilkta taisne, kas krusto šīs riņķa līnijas punktos *M*, *N*, *K*, *L* tā, kā parādīts 51.2. zīmējumā. Pierādiet, ka $\angle MAN = \angle KBL$.



51.2. zīm.

10.4. Izsacīt izteiksmes

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{10^2}}$$

vērtību kā galīgu decimāldaļskaitli.

10.5. Volejbola turnīrā katra komanda spēlēja ar katru tieši vienu reizi; neizšķirtu nav. Ir zināms: lai kuru komandu mēs izvēlētos (apzīmēsim to ar *A*), tā ir izcīnījusi tieši tikpat uzvaru, cik kopā izcīnījušas visas tās komandas, pret kurām *A* uzvarēja. Kāds ir iespējamais komandu skaits šajā turnīrā? (Nevienā turnīrā nav mazāk par 2 komandām.)

11. klase

11.1. Ar $[a]$ apzīmējam lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz *a*. Atrisināt pozitīvos skaitļos vienādojumu

$$x \cdot [x \cdot [x]] = 41.$$

11.2. Dots, ka *ABC* ir vienādsānu trijstūris $(AB = BC)$ un *ABMN* – paralelograms, pie tam $NC \perp AC$. Pierādīt, ka taisne *CN* krusto nogriezni *BM* tā viduspunktā.

11.3. Kādiem naturāliem *k* skaitlis $k^k + 1$ ir pirmskaitlis, kas mazāks par 10^{19} ?

11.4. Dots, ka $n \geq 2$ -- naturāls skaitlis. Virkni, kurā pa reizei izrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz *n* ieskaitot, sauksim par labu, ja tieši viens skaitlis ir lielāks par tam šajā virknē sekojošo skaitli. Cik ir labu virkņu? Atbildiet uz šo jautājumu

a) ja $n = 5$,
b) vispārīgajā gadījumā.

11.5. Uz riņķa līnijas atzīmēti *m* punkti, kas to sadala *m* vienādos lokos. Jāatzīmē 5 no šiem punktiem tā, lai visi taisnes nogriežņi, kas savieno divus no atzīmētajiem punktiem, būtu dažāda garuma. Vai to var izdarīt, ja

a) $m = 19$,
b) $m = 21$,
c) $m = 20$?

12. klase

12.1. Skaitļu virknē pirmais un otrais loceklis abi ir 1, bet katrs nākošais vienāds ar abu iepriekšējo summu. Vai ar 5 dalās šīs virknes

a) 21-ais,

b) 2000-ais loceklis?

12.2. Divas riņķa līnijas krustojas punktos *A* un *B*. Pirmās riņķa līnijas centrs ir *O*; tas atrodas ārpus otrās riņķa līnijas. Punkts *M* pieder pirmajai riņķa līnijai un atrodas otrās riņķa līnijas iekšpusē. Stari *AM* un *BM* krusto otro riņķa līniju punktos *C* un *D*. Pierādiet, ka $OM \perp CD$.

12.3. Ņurga izdomājis jaunu darbību ar reāliem skaitļiem. Ja šo darbību pielieto skaitļiem *a* un *b*, tad rezultātu apzīmē ar $a * b$. Ir zināms, ka patvaļīgiem reāliem skaitļiem *a*, *b* un *c* (vienalga, dažādiem vai vienādiem) pastāv vienādība

$$(a * b) * c = a + b + c.$$

Pierādīt, ka

1) ja $x * y = x * z$, tad $y = z$;

2) $x * y = y * x$ visiem reāliem skaitļiem *x*, *y*;

3) $x * y = x + y$ visiem reāliem skaitļiem *x*, *y*.

12.4. Ap apaļu galdu ar seju pret to sēž 4 dažādu valstu pārstāvji. ja *A* un *B* ir divi cilvēki no vienas valsts, tad *A* labais kaimiņš un *B* labais kaimiņš noteikti ir no dažādām valstīm. Kāds ir lielākais iespējamo cilvēku skaits pie galda

12.5. Cik atrisinājumu reālos skaitļos ir vienādojumu sistēmai

$$\begin{cases} x + y^2 + z^4 = 0 \\ y + z^2 + x^4 = 0 \\ z + x^2 + y^4 = 0 \end{cases} ?$$