LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 52. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

5. klase

Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 9 ieskaitot var sadalīt trijās grupās tā, lai visās grupās skaitļu summas būtu vienādas un nevienā grupā nebūtu divu skaitļu, kuru starpība ir 1?

2. Klasē mācās vairāki bērni. Katram no tiem ir zilas, brūnas vai pelēkas acis un dzelteni, melni vai brūni mati. Vai var būt, ka vienlaicīgi zilacaino bērnu ir vairāk nekā dzeltenmataino, dzeltenmataino - vairāk nekā brūnacaino, brūnacaino - vairāk nekā melnmataino, melnmataino - vairāk nekā pelēkacaino un pelēkacaino - vairāk nekā brūnmataino?

3. Uz galda atrodas 6 aizslēgtas kastītes un 6 dažādas atslēgas. Ir zināms, ka katra atslēga der tieši vienai kastītei. Jānis 8 sekunžu laikā var paņemt vienu (jebkuru) atslēgu un pārbaudīt, vai tā der vienai (jebkurai) kastītei. Pierādiet, ka Jānis divu minūšu laikā var noskaidrot, kura atslēga kurai kastītei der.

4. Kvadrāts sastāv no 6×6 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Griežot pa rūtiņu līnijām, tas jāsagriež dažādos gabalos. Kāds ir lielākais iespējamais gabalu skaits?

5. Ziemassvētkos Andris 5 reizes iegriezās saldumu veikalā. Katru reizi pārdevējs vispirms uzdāvināja Andrim tik naudas, cik zēnam šajā brīdī jau bija, un pēc tam Andris nopirka kūku par 32 santīmiem. Pēc piektā apmeklējuma Andrim naudas vairs nebija. Cik naudas Andrim bija pirms pirmā apmeklējuma? (Ārpus šī veikala Andris naudu nesaņēma un netērēja.)

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 52. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

6. klase

Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Dots, ka a, b un c - naturāli skaitļi. Pierādiet, ka vismaz viens no skaitļiem a+b, a+c un b+c dalās ar 2.

2. Velēnu vecītis uzdāvināja Maijai lādīti ar 24 rubīniem, 24 smaragdiem un 1 dimantu. Dārgakmeņu masas ir 1 g, 2 g, 3 g, … , 49 g (nav dots, cik kurš dārgakmens sver). Zināms, ka visi rubīni kopā sver par 600 g vairāk nekā visi smaragdi kopā. Cik sver dimants?

3. Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Griežot pa rūtiņu līnijām, tas jāsagriež dažādos gabalos. Kāds ir lielākais iespējamais gabalu skaits?

4. Pa apli izrakstīti 64 naturāli skaitļi (starp tiem var būt arī vienādi). Katru 10 pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa ir 100. Viens no uzrakstītajiem skaitļiem ir 11. Kāds skaitlis uzrakstīts tam blakus pa labi?

5. Sūnu ciemā ir tikai viena taisna iela, uz kuras atrodas autobusu pieturas. Ciemā darbojas 7 transporta firmas. Katras firmas autobusi kursē abos virzienos, bet apstājas tikai 6 pieturās (dažādām firmām šīs pieturas var būt dažādas). Ir zināms, ka no katras pieturas nepārsēžoties var aizbraukt uz katru citu. Pierādiet, ka ciemā nav vairāk par 14 pieturām.

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 52. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

7. klase

Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Dots, ka neviens no skaitļiem a, b, c nav 0. Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem ab, ac un bc ir pozitīvs.

2. Kādu mazāko daudzumu naturālu skaitļu var uzrakstīt uz papīra lapas, lai būtu spēkā īpašība: katrs naturāls skaitlis, kas nav mazāks par 1200 un nav lielāks par 3600, atšķiras no kāda no uzrakstītajiem skaitļiem ne vairāk kā par 25% no savas vērtības?

3. Uz tāfeles uzrakstīti naturālie skaitļi no 3 līdz 10 ieskaitot, katrs vienu reizi. Ar vienu gājienu atļauts diviem uz tāfeles esošiem skaitļiem vienlaicīgi pieskaitīt pa vieniniekam. Kāds lielākais dažādu pirmskaitļu daudzums var vienlaikus atrasties uz tāfeles?

4. Sešu nogriežņu garumi visi ir dažādi un katrs izsakās ar veselu skaitu centimetru; šo garumu summa ir 43 cm.
Vai noteikti eksistē četrstūris, kura malas vienādas ar četriem no šiem sešiem nogriežņiem?

5. Andris, Jānis un Pēteris sacentās, skrienot pa apļveida trasi vienā virzienā. Jānis visu laiku skrēja ātrāk par Pēteri, bet lēnāk par Andri. Zēni vienlaicīgi sāka skriet no vienas vietas un beidza skriet tai brīdī, kad pirmo reizi visi atkal atradās vienuviet. Andris apdzina Pēteri 10 reizes. Cik apdzīšanu pavisam notika?

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 52. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

8. klase

Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Pierādiet: nevar atrast tādus skaitļus x un y, ka

$$x^2+(xy-1)^2=0.$$

2. Andris un Jānis spēlē spēli. Viņi pamīšus izdara pa vienam gājienam; sāk Andris. Andris ar katru savu gājienu uzraksta vienu no cipariem septiņciparu skaitlī (vispirms pirmo, tad otro, trešo, …), izmantojot tikai ciparus 1 un 2. Savukārt Jānis pēc katra Andra gājiena ar savu gājienu vai nu nedara neko, vai arī apmaina vietām divus jau uzrakstītus ciparus. Vai Jānis var panākt, ka beigās iegūtais septiņciparu skaitlis ir simetrisks (t.i., šis skaitlis ir viens un tas pats, lasot to "no sākuma" un "no gala")?

3. Burtnīcā ir 100 lapas; tās lappuses sanumurētas dabīgā kārtībā ar numuriem no 1 līdz 200.
Vai izrauto lappušu numuru summa var būt 1000, ja tiek izrautas
a) 31 lapa, b) 30 lapas?
(**Piezīme**: lapas var neraut pēc kārtas.)

4. Trijstūrī ABC malas BC viduspunkts ir M. Taisne, kas caur M vilkta paralēli trijstūra leņķa A bisektrisei, krusto malu AC punktā K. Pierādīt, ka AB+AK=CK.

5. Kubs sastāv no $4\times4\times4$ vienādiem gaiša koka kubiņiem. Kuba ārpusi nokrāsoja melnu. Vai kubiņus var salikt vienā slānī kvadrāta 8×8 formā tā, lai
a) kvadrāta virspuse būtu izkrāsota kā šaha galdiņš,
b) gan kvadrāta virspuse, gan apakšpuse būtu izkrāsota kā šaha galdiņš?

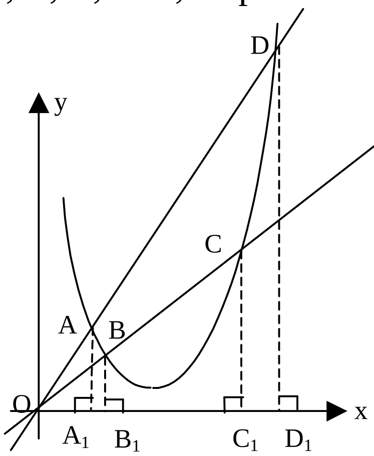
LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 52. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0÷10 punktiem.

1. Jānis uzrakstīja n pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus. Neviens no tiem nedalās ar diviem vai vairāk dažādiem pirmskaitļiem. Kāda ir lielākā iespējamā n vērtība?

2. Funkcijas $y = x^2 + px + q$ grafiks krusto funkciju y = x un y = 2x grafikus punktos A, B, C, D tā, kā parādīts 1. zīm.



1. zīm.

Pierādīt, ka $C_1D_1 - A_1B_1 = 1$, ja A_1, B_1, C_1, D_1 ir to perpendikulu pamati, kas vilkti pret Ox asi attiecīgi no punktiem A, B, C, D.

3. Punkts C ir nogriežņa AB iekšējs punkts. Vienādmalu trijstūri AMC un CNB atrodas vienā pusē taisnei AB. Pierādīt, ka nogriežņa MN viduspunkta attālums līdz AB nav atkarīgs no C stāvokļa uz nogriežņa AB.

4. Ar p(n) apzīmēsim naturāla skaitļa n ciparu reizinājumu. Piemēram, p(26)=12; p(8)=8; p(102)=0.
Aprēķināt summu p(1)+p(2)+p(3)+…+p(2001)+p(2002).

5. Profesors Cipariņš katru dienu pierāda ne vairāk kā 10 jaunas teorēmas. Turklāt, ja viņš kādu dienu ir pierādījis vairāk nekā 7 jaunas teorēmas, tad katrā no divām nākošajām dienām viņš pierāda ne vairāk kā 5 jaunas teorēmas.
Kādu lielāko jaunu teorēmu daudzumu Cipariņš var pierādīt 15 pēc kārtas sekojošās dienās kopā?

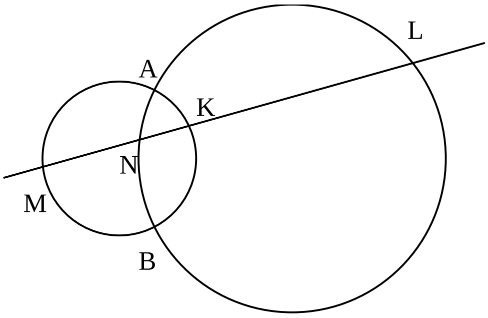
LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 52. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0÷10 punktiem.

1. Pierādīt, ka katram reālam skaitlim x pastāv vienādība
$|x-1|+|x+1|+||x-1|-|x+1||=2(|x|+1)$.

2. Divas riņķa līnijas krustojas punktos A un B. Novilkta taisne, kas krusto šīs riņķa līnijas punktos M, N, K, L, kā parādīts 2. zīm. Pierādiet, ka $\angle MAN=\angle KBL$.



2. zīm.

3. Naturālu skaitļu m un n lielākais kopīgais dalītājs ir d, bet mazākais kopīgais dalāmais ir D. Pierādiet: $2m+n=2D+d$ tad un tikai tad, ja m dalās ar n.

4. Uz taisnstūra ABCD diagonāles AC ņemts punkts M, kas atrodas tuvāk punktam A nekā punktam C. Punkti K un L atrodas uz malas AD tā, ka $MK\perp AD$ un K ir AL viduspunkts. Nogriežņi BL un DM krustojas punktā S.
Pierādīt, ka trijstūru BMS un DLS laukumi ir vienādi.

5. Dotas 2002 konfekšu kastes. Katrā kastē ir vismaz viena konfekte, un nekādās divās kastēs konfekšu daudzumi nav vienādi. Nevienā kastē nav vairāk par 2002 konfektēm. Ar vienu gājienu atļauts no dažām kastēm apēst vienādu skaitu konfekšu (drīkst arī ēst konfektes tikai no vienas kastes).
Kāds ir mazākais gājienu skaits, ar kuru var apēst visas konfektes?

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 52. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0÷10 punktiem.

1. Kādiem naturāliem k skaitlis k^k+1 ir pirmskaitlis, kas mazāks par 10^{19}?

2. Andris izvēlējās 5 dažādus naturālus skaitļus un katriem diviem izvēlētajiem skaitļiem aprēķināja to summu. Kādu mazāko daudzumu dažādu rezultātu Andris varēja iegūt?

3. Četrstūris ABCD ievilkts riņķa līnijā, pie tam $\angle ABC = 90°$. Punkti X un Y ir to perpendikulu pamati, kas no D vilkti attiecīgi pret AB un AC.
Pierādīt, ka taisne XY dala uz pusēm nogriezni BD.

4. Pierādiet, ka pozitīviem skaitļiem a, b, c pastāv nevienādība

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right| \le |b-c|$$

5. Izliekta n-stūra virsotnēs kaut kādā kārtībā ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz n, katrs vienu reizi. Sauksim n-stūra diagonāli par labu, ja no viena tās galapunkta iespējams pa daudzstūra kontūru aiziet uz otru, ejot tikai caur tādām virsotnēm, kurās ierakstītie skaitļi ir mazāki par diagonāles abos galapunktos ierakstītajiem skaitļiem.
Pierādiet: ir tieši n-3 labas diagonāles.

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 52. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0÷10 punktiem.

1. Dots, ka sinx - racionāls skaitlis. Vai sin2x var būt a) racionāls, b) iracionāls, c) nedefinēts?

2. Ņurga izdomājis jaunu darbību ar reāliem skaitļiem. Ja šo darbību pielieto skaitļiem a un b, tad rezultātu apzīmē ar a*b. Ir zināms, ka patvaļīgiem reāliem skaitļiem a, b un c (vienalga, dažādiem vai vienādiem) pastāv vienādība

$$(a*b)*c=a+b+c.$$

Pierādīt, ka

1) ja x*y=x*z, tad y=z,
2) x*y=y*x,
3) x*y=x+y

patvaļīgiem reāliem skaitļiem x, y, z.

3. Rombā ABCD zināms, ka $\angle BAD = 60°$. Par paralelogramu DXYZ zināms, ka X pieder malai AD, Z - malai CD un Y - diagonālei AC. Pierādīt, ka trijstūris BXZ ir regulārs.

4. Kvadrāts sastāv no 10×10 rūtiņām; katra rūtiņa var būt balta vai melna. Ja laika momentā t rūtiņa ir melna, tad tā paliek melna arī laika momentā t+1. Ja laika momentā t kāda rūtiņa R ir balta un ne vairāk kā viena rūtiņa, kurai ar R ir kopīga mala, ir melna, tad R paliek balta arī laika momentā t+1; pretējā gadījumā R kļūst melna.
Vai iespējams, ka viss kvadrāts kādreiz kļūs melns, ja laika momentā t=0 melno rūtiņu skaits ir a) 9, b)10?

5. Caur trijstūra piramīdas katru virsotni un to triju šķautņu viduspunktiem, kuras iziet no šīs virsotnes, novilkta sfēra. Pierādīt, ka šīs 4 sfēras

a) ir vienādas savā starpā,
b) krustojas vienā punktā.