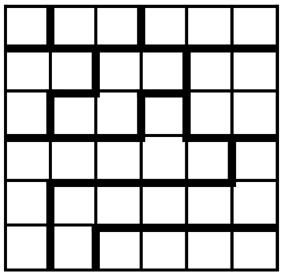
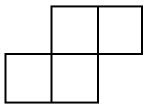
<u>Īsi atrisinājumi</u>

5.1. Jā, var. Vienā grupā, piemēram, iekļaujam 1;3;4;5;7;9;11;12;16;20, bet otrā – 2;6;8;10;13;14;15;17;18;19.
5.2. a) Var iegūt lielākais 10 gabalus (skat. 1. zīm.).

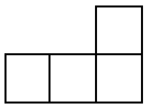


1. zīm.

b) Sauksim figūru par mazu, ja tā satur ne vairāk 4 rūtiņas, un par lielu pretējā gadījumā. 1.zīm. izmantotas **visas** dažādās mazās figūras.
Pārpalikušajās 7 rūtiņās nevar ievietot vairāk par 1 lielo figūru. Ja kādu no mazajām figūrām aizstātu ar lielo, tad pēdējām lielajām figūrām rūtiņu paliktu vēl mazāk, un figūru kopējais skaits nepalielinātos. Tāpēc 10 ir lielākais iespējamais gabalu skaits.
<u>Komentārs</u>. Arī tad, ja mēs figūras



un



uzskatītu par atšķirīgām no to spoguļattēliem, līdzīgs spriedums parādītu, ka skaitli 10 palielināt nevar.
5.3. a) var; piemēram, 6;1;7;2;8;3;9;4;10;5
b) nevar, jo skaitlim 6 var būt tikai viens kaimiņš.
5.4. Jā, var. Skat., piem., 2.zīm.

4	5	16	15
3	6	7	14
2	9	8	13
1	10	11	12

2. zīm.

5.5. Visi dalībnieki izspēlē vienu un to pašu spēļu skaitu. Ja nebūtu neizšķirtu, tad katra spēle mainītu viņa punktu skaitu par 1 (par nepāra skaitli). Tātad vai nu visiem dalībniekiem beigās būtu pāra skaits punktu, vai arī visiem beigās būtu nepāra skaits punktu – pretruna.

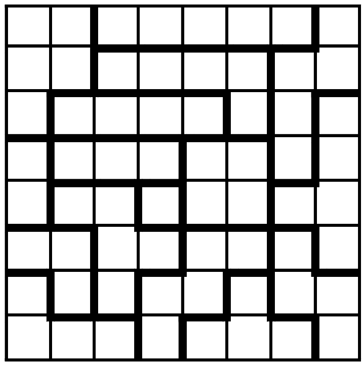
Norādījumi vērtēšanai

5.2. Par piemēru - 5 punkti.
5.3. Par katru daļu – 5 punkti.
5.4. <u>Nav jānoskaidro</u>, vai iespējami arī citi skaitļu izvietojumi.
5.5. Par konkrētu piemēru aplūkošanu – līdz 2 punktiem.

Īsi atrisinājumi

6.1. Tā kā Pēteris stāv rindas vidū, tad zēnu skaits ir nepāra (2n+1). Tā kā 9>n+1, tad n<=7. Tā kā 2n+1>=14, tad n>=7. Tātad n=7 un rindā stāv 15 zēni.

6.2. a) var iegūt 16 daļas (skat.3.zīm.)



3. zīm.

b) to, ka šis skaits nav palielināms pierāda līdzīgi kā 5.2. uzdevuma risinājumā.

6.3. a) piemēri 1245780369 un 2036954871 parāda, ka var būt 7 un 1 skaitļi, kas dalās ar 3

b) tā kā 0+1+...+9=45, tad vismaz viens (desmitciparu) skaitlis noteikti dalās ar 3,

c) apskatām, kā no kreisās puses virknē parādās cipari, kas nedalās ar 3 (t.i., 1;2;4;5;7;8). Divos pēc kārtas ņemtos šādos momentos abos ciparu summas nevar dalīties ar 3; tāpēc vismaz 3 skaitļi nedalās ar 3, un ar 3 dalās <=7 skaitļi.

6.4. Jā. Skat., piem., 4.zīm.

7	6	5	4	25
8	11	12	3	24
9	10	13	2	23
16	15	14	1	22
17	18	19	20	21

4.zīm.

6.5. a) Jā. Skat., piem., 5.zīm.

3	3	3	3
2	3	3	3
1	1	2	2
1	1	1	2

5. zīm.

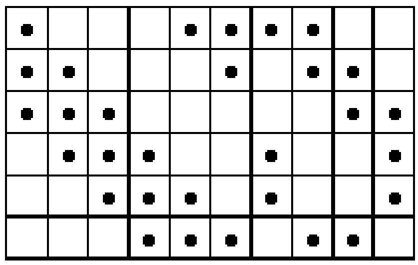
b) Nē. Iespējamas tieši 9 summu vērtības (no 4 līdz 12); tām visām būtu jārealizējas. Summas 1+1+1+1 un 3+3+3+3 var realizēties tikai divās kolonnās vai divās rindās (citādi – kas atrastos, piemēram, rindas un kolonnas kopējā rūtiņā?) Varam pieņemt, ka ir rinda ar summu 4 un rinda ar summu 12. Bet tad ne kolonnai, ne diagonālei nevar būt ne summa 5, ne summa 11. Tātad rindu summas ir 4; 5; 11; 12. Tātad ir rindas ar 4 trijniekiem; 4 vieniniekiem; 3 vieniniekiem un 1 divnieku. Tad tajās kolonnās, kurās nav divnieku, summas ir vienādas – pretruna.

Norādījumi vērtēšanai

6.1. Pareiza atbilde bez pamatojuma, ka tā vienīgā – 4 punkti.
6.2. Par piemēru - 5 punkti.
6.3. Katrs no piemēriem - 2 punkti. Pierādījums, ka ir vismaz 1 tāds skaitlis – 2 punkti.
6.4. Nav jācenšas noskaidrot, vai piemērs ir vienīgais.
6.5. Par piemēru – 4 punktiem.

Īsi atrisinājumi

7.1. Jā, var. Punktus jāizvēlas pa vienam katra kvadranta iekšpusē.
7.2. Nē. Garumi varētu būt 1; 2; 3; 6; 11; 20 cm, un no katriem 4 skaitļiem lielākais ir lielāks par vai vienāds ar triju pārējo summu. Bet četrstūrī katras malas garums ir mazāks par triju pārējo garumu summu.
7.3. Vispirms pārbaudām, vai "1"+"2"+"3"="6". Ja nē, tad vismaz viens uzraksts nav pareizs. Ja jā, tad uz "6" un "5" ir pareizi uzraksti. Tad otrajā svēršanā pārbaudām, vai "1"+"6"<"3"+"5". Ja jā, tad visi uzraksti ir pareizi.
7.4. Izsvītrojot visus pāra skaitļus (t.i., 6 skaitļus), katru divu atlikušo (nepāra) skaitļu summa būs pāra skaitlis, kas lielāks par 2, tātad salikts. Tā kā 1+12=2+11=3+10=4+9=5+8=6+7=13, tad katrā no pāriem (1;12), (2;11), (3;10), (4;9), (5;8), (6;7) jāizvēlas vismaz viens skaitlis, t.i., jāizsvītro vismaz 6 skaitļi.
7.5. a) Ir iespējams. Skat. 6.zīm., kur rindas attēlo žurnālus un kolonnas – politiķus.



6.zīm.

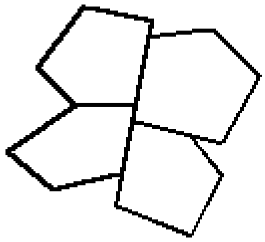
b) Nav iespējams. Skaitot visus aprakstus "pa žurnāliem", 5 nepāra skaitļu summa būtu nepāra skaitlis; skaitot tos "pa politiķiem", 10 nepāra skaitļu summa būtu pāra skaitlis – pretruna.

Norādījumi vērtēšanai

7.4. Par katru daļu - 5 punkti.
7.5. Par katru daļu - 5 punkti. Fakts, ka a) daļā, skaitot aprakstus divos veidos, abas paritātes sakrīt, vēl nedod pamatu secināt, ka tur aprakstītā situācija ir iespējama.

Īsi atrisinājumi

8.1. Atņemot vienādības, iegūstam y=z, tāpēc arī x=t.
8.2. a) Jā. Skat., piem., 7.zīm.



7. zīm.

b) Nē. Iegūstamā 15-stūra virsotņu leņķi mazāki par 180^0, tāpēc tie var veidoties vienīgi no 5-stūru leņķiem. Visu 5-stūru leņķu lielumu summa ir $4\times(3\times180^0)=12\times180^0$, un tā ir mazāka par 13×180^0.
8.3. Tā kā tikai pa vienam skaitlim dalās ar ar 7 un 11, tad tie noteikti jāsvītro. Atlikušajos skaitļos kopā ir 5 pirmreizinātāji "3", tāpēc jāizsvītro vismaz vēl viens skaitlis. Svītrojot "3", pārējos skaitļus var sadalīt: $4\times8\times5\times9=1\times2\times6\times10\times12$.
8.4. Sākumā uz tāfeles ir skaitlis $\frac{1}{3}$. Ja kādā gājienā to neaiztiek, tas paliek uz tāfeles. Ja x=$\frac{1}{3}$ vai y=$\frac{1}{3}$, tad 3xy-x-y+$\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. Tātad beigās noteikti paliek skaitlis $\frac{1}{3}$.
8.5. Rīkojamies sekojoši: $a\to a^2$; $b\to b^2$; $a,b\to a+b$; $a+b\to(a+b)^2$;
$(a+b)^2,a^2\to 2ab+b^2$; $2ab+b^2,b^2\to 2ab$; $2ab \to \frac{1}{2ab}$ (divas reizes);
$\frac{1}{2ab},\frac{1}{2ab} \to \frac{1}{2ab}+\frac{1}{2ab}=\frac{1}{ab}$; $\frac{1}{ab} \to 1:\left(\frac{1}{ab}\right)=ab.$

Norādījumi vērtēšanai

8.2. Par katru daļu - 5 punkti. Risinājumos, kuros sprież, cik malas "pazūd", saliekot kopā plāksnītes, jāņem vērā, ka malas var "pazust" daļēji.
8.3. Par piemēru – 4 punkti.
8.4. Par eksperimenta ceļā iegūtu atbildi bez pamatojuma - 3 punkti.

Īsi atrisinājumi

9.1. Pirmo triju (tātad mazāko) pirmskaitļu reizinājums ir $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Tāpēc, uzrakstot 29 naturālos skaitļus no 1 līdz 29 ieskaitot, tie apmierina uzdevuma nosacījumus.
Ja uzraksta 30 pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus, tad viens no tiem dalās ar 30, tātad ar 2; 3; 5. Tātad meklējamais maksimums ir 29.

9.2. Diagonāle sadala paralelogramu divos vienādos trijstūros. Vienādos trijstūros augstumi pret atbilstošajām malām ir vienādi. Tāpēc C un F attālumi līdz taisnei BD abi vienādi ar A attālumu līdz šai taisnei. Tāpēc CF||BD.

9.3. <u>1. risinājums.</u> Pārnesam visus locekļus nevienādības kreisajā pusē un aplūkojam kreiso pusi kā mainīgā a kvadrātfunkciju:

$$f(a) = a^2+a(b-6)+(b^2-6b+12)$$

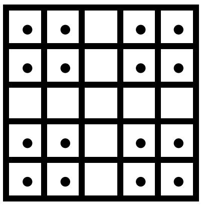
Atbilstošā kvadrātvienādojuma diskriminants ir:

$$(b-6)^2-4(b^2-6b+12) = -3b^2+12b-12 = -3(b-2)^2 \leq 0.$$

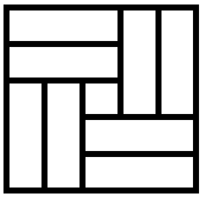
No šejienes seko vajadzīgais.
<u>2. risinājums.</u> Pārnesot locekļus uz kreiso pusi, pārveidojam to par

$$(a-2)^2+(a-2)(b-2)+(b-2)^2 = x^2+xy+y^2 = (x+\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2 \geq 0 \ (x = a-2,\ y = b-2).$$

9.4. a) skat. 1. zīm.



1. zīm.



2. zīm.

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6
11	12		12	11
6	7	8	9	10
5	4	3	2	1

3.zīm.

b) šķirojam divus gadījumus:
b^1) ja kvadrāta vidējās rūtiņas centrs nav atzīmēts, tad vismaz vienā no 8 trīs rūtiņu taisnstūriem atzīmēti 3 centri, jo $8 \cdot 2=16<17$ (skat. 2. zīm.). Tie veido vajadzīgo konfigurāciju.
b^2) ja kvadrāta vidējās rūtiņas centrs ir atzīmēts, tad vismaz vienā no 12 pret šo centru simetriskiem rūtiņu pāriem (skat. 3. zīm.) atzīmēti abi centri (jo 16>12). Kopā ar vidējās rūtiņas centru tie veido vajadzīgo konfigurāciju.

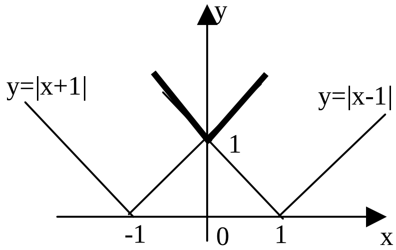
9.5. Sauksim skaitli n par sliktu, ja spēlētājs, kuram jāizdara gājiens situācijā, kad uz galda ir n konfektes, ir spiests zaudēt (ja vien viņa pretinieks spēlē pareizi). Acīmredzot 2 ir slikts skaitlis. Pierādīsim: ja n ir slikts skaitlis, tad arī 2n+1 ir slikts skaitlis. Tiešām, no 2n+1 konfektēm mēs drīkstam ņemt tikai 1; 2; …; n konfektes, atstājot attiecīgi 2n; 2n-1;. ..; n+1 konfektes. Tad pretinieks, ņemot attiecīgi n; n-1; …; 1 konfekti; atstāj mums n konfektes - sliktu skaitu, un mēs esam spiesti zaudēt. Tātad slikti skaitļi ir 2; 5; 11; 23; 47; 95; 191; 383; 767; 1535; 3071; … . No šejienes redzam, ka
a) pie n=47, pareizi spēlējot, uzvar Pēteris,
b) pie n=2003, pareizi spēlējot, uzvar Andris; viņš ar savu pirmo gājienu ņem 468 konfektes, atstājot Pēterim sliktu skaitu - 1535 konfektes.

10.1. a) nē, nevar. Ievērosim, ka $3(2x+3y)-2(3x+2y)=5y$. Ja $(2x+3y)(3x+2y)$ dalās ar 5, tad vai nu $2x+3y$, vai $3x+2y$ dalās ar 5. No minētās vienādības seko, ka tad arī otrs reizinātājs dalās ar 5 (ja $2x+3y$ dalās ar 5, tad $2(3x+2y)=3(2x+3y)-5y$ dalās ar 5, tāpēc $3x+2y$ dalās ar 5; otru gadījumu apskata analoģiski). Tāpēc reizinājums dalās ar $5 \cdot 5=25$.

b) jā, var; piemēram, x=1000 un y=1. Tad 2x+3y=2003, bet 3x+2y=3002, kas nedalās ar 2003.

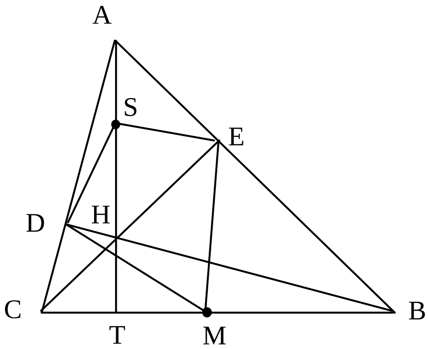
10.2. <u>1. atrisinājums:</u> Aplūko atsevišķi apgabalus $x\leq-1$; $-1<x\leq 0$; $0<x\leq1$; $1<x$. Var atsaukties uz simetrijām un pārbaudīt tikai 2 apgabalus.

<u>2. atrisinājums:</u> Ievērojam, ka a+b+|a-b|=2max(a, b). Tāpēc vienādības kreisajā pusē ir 2max(|x-1|, |x+1|). Bet max(|x-1|, |x+1|)=|x|+1 (skat. 4. zīm.)



4. zīm.

10.3.



5. zīm.

a) ES=$\frac{1}{2}$AH un SD-$\frac{1}{2}$AH kā mediānas taisnleņķa trijstūros pret hipotenūzu AH; tāpēc ES=SD. Līdzīgi pierāda, ka ME=MD. Tāpēc ΔSEM=ΔSDM. Šajos trijstūros no atbilstošajām virsotnēm E un D velkot perpendikulus pret SM (kas ir atbilstošā mala abos trijstūros), perpendikulu pamati sakrīt. Tāpēc DE⊥SM.

b) ja ∠BAC = 45°, tad ΔADB - vienādsānu taisnleņķa trijstūris. Tāpēc AD=BD. Tā kā ∠DAH=90°-∠DHA=90°-∠THB=∠DBC, tad ΔDAH=ΔDBC, tātad AH=BC. Tā kā mediāna pret hipotenūzu vienāda ar pusi no hipotenūzas, tad ES=EM, tātad DSEM ir rombs.

Pēc pierādītā ∠MDB=∠SDA (leņķi vienādos trijstūros starp atbilstošajām malām un mediānām). Tāpēc ∠SDM=∠SDH+∠MDB=∠SDH+∠SDA=∠BDA=90°. Tāpēc MESD kā rombs ar taisnu leņķi ir kvadrāts.

10.4. a) jā. Augšējā un apakšējā rindā katrā rūtiņā ierakstām "+1", centrālajā rūtiņā "-1", citās rūtiņās - "0".

b) nē. Izkrāsosim rūtiņas šaha galdiņa kārtībā. Apskatīsim baltās diagonāles. Vienā virzienā iet 8 baltās diagonāles, otrā - 7. Gan viena, gan otra grupa kopā satur visas baltās rūtiņas. Tātad visās baltās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa būtu gan 8, gan 7 - pretruna.

10.5. Apskatīsim rūtiņu līnijas, kuras iet caur uzdevumā minētajām 101 virsotnēm; pieņemsim, ka starp tām ir x horizontālas un y vertikālas līnijas. Skaidrs, ka $x\cdot y\geq101$, jo $x\cdot y$ ir apskatāmo līniju krustpunktu skaits, un katrs no uzdevumā minētajiem 101 punktiem ir divu līniju krustpunkts. Pēc nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko

$$x + y \geq 2\sqrt{101} > 20\,,$$

tātad $x+y \geq 21$. Katra no $x+y$ līnijām krusto kontūru vismaz 2 punktos. Tātad meklējamo krustpunktu ir vismaz $2 \cdot 21=42$.

11.1. Pieņemsim, ka Andris izvēlējies 5 skaitļus $a<b<c<d<e$. Viegli saprast, ka $a+b<a+c<a+d<a+e<b+e<c+e<d+e$, tātad ir vismaz 7 dažādas summas. Izvēloties skaitļus 1; 2; 3; 4; 5, iegūst tieši 7 dažādas summas (no 3 līdz 9). Tātad meklējamais minimums ir 7.

11.2. Pie k=1 ir spēkā vienādība

$$F_1+F_2+F_3+\ldots+F_n=F_{n+2}-1$$

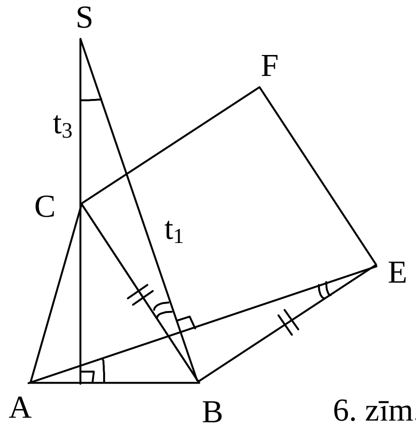
To pierāda standartceļā ar matemātisko indukciju. Pierādīto vienādību pārveidojam par

$$F_1+F_2+F_3+\ldots+F_n+1=F_{n+2}$$

Ceļot to k-jā pakāpē, kur $k>1$, kreisajā pusē bez F_1^k, …, F_n^k un 1 parādās arī šo skaitļu reizinājumi. Tāpēc

$$F_1^k+F_2^k+F_3^k+\ldots+F_n^k+1<F_{n+2}^k.$$

11.3.



6. zīm.

Apzīmējam t_1 un t_3 krustpunktu ar S. Tad $\angle AEB=\angle SBC$ un $\angle EAB=\angle BSC$ kā leņķi ar savstarpēji perpendikulārām malām. Bez tam $EB=BC$. Tāpēc $\Delta ABE=\Delta SCB$, tātad $SC=AB$. Līdzīgi pierāda, ka t_2 krusto t_3 tādā punktā S_1, ka $S_1C=AB$. No šejienes seko uzdevuma apgalvojums, jo abas krustošanās notiek "virs" C.

11.4. a) der, piemēram, visi skaitļi n, kuru 3 pēdējie cipari ir 038 (pierādījumam pietiek iztēloties šāda skaitļa reizināšanu ar sevi "stabiņā").

b) apzīmēsim meklējamo skaitli ar $x=38+a$. Tad $x^2=1444+76a+a^2=1444+a(76+a)$. Skaitlim $a(76+a)$ jābeidzas ar 000, tātad jādalās ar 1000. Tā kā abi skaitļi a un $76+a$ nevar vienlaicīgi dalīties ar 5, tad viens no tiem dalās ar 125. Tātad a pirmās "aizdomīgās" vērtības ir 49; 125; 174; 250; 299; 375; 424; … . Pārbaudot atbilstošās vērtības $x=38+a$, redzam, ka mazākā derīgā ir $x=38+424=462$.

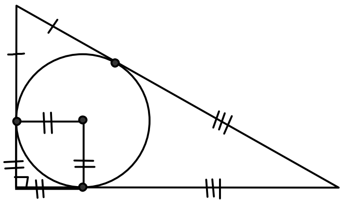
11.5. Pieņemsim, ka tādu 3 rūķīšu nav. Tad katriem trim rūķīšiem var atrast jautājumu, uz kuru neviens no viņiem nespēj atbildēt. Dažādu rūķīšu trijnieku ir $C_7^3=35$. Tā kā $35>34$, tad eksistē divi rūķīšu trijnieki, kam šis uzdevums ir viens un tas pats. Bet šajos trijniekos kopā ir vismaz 4 dažādi rūķīši. Tātad eksistē rūķīšu četrinieks, kas nespēj iekļūt pilī - pretruna ar doto.

12.1. Katra nākošā virknes locekļa atlikumu, dalot ar 5, iegūst, saskaitot abu iepriekšējo locekļu atlikumus, ja tos dala ar 5, un iegūto summu dalot ar 5 ar atlikumu. To ievērojot, virknes pirmo 22 locekļu atlikumi, dalot ar 5, ir sekojoši:

1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, 3, 2, 0, 2, 2, 4, 1, 0, 1, 1, …

No šejienes jau redzam, ka 20-ais virknes loceklis dalās ar 5. Tā kā 1. un 2. locekļu atlikumi (1, 1) ir tādi paši kā 21. un 22. locekļu atlikumi, tad atlikumu virkne ir periodiska ar periodu 20. Tāpēc virknes 2003-ais loceklis nedalās ar 5.

12.2. Apzīmēsim trijstūra ABC katetes ar a un b, hipotenūzu ar c. Viegli redzēt, ka, apzīmējot ievilktās riņķa līnijas rādiusu ar r, pastāv sakarība 2r+c = a+b (skat. 7. zīm.)



7. zīm.

Pielietojot šo formulu trijstūriem ACH un BCH un ievērojot. ka $a\cdot b=2L(ABC)=c\cdot CH$, tātad CH=$\frac{ab}{c}$, kā arī atceroties to, ka AH=$\frac{b^2}{c}$ un BH=$\frac{a^2}{c}$, iegūstam

$$\frac{a^2}{c}+\frac{ab}{c}-a+\frac{b^2}{c}+\frac{ab}{c}-b=\frac{c}{2}$$

kas viegli pārveidojama par

$$c^2-2c(a+b)+4ab=0$$

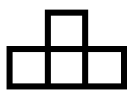
(aizstājot a^2+b^2 ar c^2). No šejienes $(c-2a)(c-2b)=0$, tātad vai nu $c=2a$, vai $c=2b$. Abos gadījumos ΔABC leņķi ir 90°; 30°; 60°.

12.3. No uzdevumā dotā seko, ka $a^2+b^2= c^2+d^2>0$. Varam apzīmēt $a^2+b^2= c^2+d^2=M^2$, M>0. Tad varam uzskatīt, ka a=Msinα, b=Mcosα, c=Msinβ, d=Mcosβ. No dotā seko, ka sin2α+sin2β>0 un cos(α-β)>0. Tā kā sin2α+sin2β=2sin(α+β)cos(α-β), tad secinām, ka sin(α+β)>0. Bet sin(α+β)=$\frac{1}{M^2}$(ad+bc).

12.4. **a)** varam apskatīt režģi, kas sastāv no kvadrātiem ar izmēriem 2×2; daudzstūra kontūrs iet arī pa šī režģa līnijām. Tātad daudzstūris sastāv no vairākiem šādiem kvadrātiem; bet katrā kvadrātā ir 2 melnas un 2 baltas rūtiņas.

b) daudzstūra iekšpusē ir vienāds skaits melno rūtiņu malu un balto rūtiņu malu (tās pa pāriem saskaras). Tā kā daudzstūra malu garumi ir nepāra skaitļi, tad ārpusē uz katras daudzstūra malas vienas krāsas rūtiņu malu ir par 1 vairāk nekā otras krāsas rūtiņu malu, turklāt uz visām daudzstūra malām pārsvarā ir viena un tā pati krāsa. Tāpēc vienas krāsas rūtiņu malu ir par n vairāk nekā otras; tāpēc vienas krāsas rūtiņu ir par $\frac{n}{4}$ vairāk nekā otras, kur n - daudzstūra malu skaits.

Piezīme: nav taisnība, ka b) gadījumā daudzstūris noteikti satur nepāra skaitu rūtiņu; skat., piem., 8. zīm.



8. zīm.

12.5. Atbilde: nē, neeksistē.

Pieņemsim, ka esam pierādījuši lemmu: nekādi 3 pirmskaitļi nevar piederēt vienai un tai pašai ģeometriskai progresijai. Tad uzdevuma apgalvojums seko no fakta, ka [1; 100] satur 25 pirmskaitļus un 25>12·2.

<u>Pierādīsim lemmu.</u> Pieņemsim no pretējā, ka x<y<z - dažādi pirmskaitļi, $x=aq^m$, $y=aq^n$, $z=aq^k$, kur m<n<k. Tad $\frac{y}{x}=q^{n-m}$ un $\frac{z}{y}=q^{k-n}$. Tāpēc

$\left(\frac{y}{x}\right)^{k-n} = \left(\frac{z}{y}\right)^{n-m}$, no kurienes seko $y^{k-m} = z^{n-m} \cdot x^{k-n}$. Tas nav iespējams, jo kreisā puse dalās ar y, bet labā - nē.

Īsi norādījumi vērtēšanai.

9.1. Piemērs – 4 punkti, maksimalitātes pierādījums – 6 punkti.

9.3. Konkrētu gadījumu aplūkošana – līdz 2 punktiem.

9.4. a) daļa – 4 punkti. Nav jāprasa pierādījums, ka 16 punkti tiešām apmierina uzdevuma nosacījumus.

9.5. Par katru daļu – 5 punkti; tikai par atbildi – 1 punkts.

10.1. Par a) daļu – 8 punkti, b) daļu – 2 punkti.

10.3. Par a) daļu – 3 punkti; b) daļu – 7 punkti. Ja a) daļā ir konstatēts, ka četrstūris ir deltoīds, un bez īpaša pierādījuma, atsaucoties uz deltoīda īpašībām, apgalvots, ka tā diagonāles ir perpendikulāras, arī 3 punkti.

10.4. Par katru daļu 5 punkti.

10.5. Par konkrētu piemēru aplūkošanu – līdz 2 punktiem.

11.1. Par piemēru – 4 punkti, par minimalitātes pierādījumu – 6 punkti.

11.2. Ja pierādīts tikai gadījums k = 1 (to var izdarīt arī citādi), 5 punkti.

11.3. Ja konstatēta analogu trijstūru vienādība kā te dotajā risinājumā, 3 punkti.

11.4. a) daļa – 4 punkti, b) daļa – 6 punkti.

11.5. Par speciālu gadījumu aplūkošanu – līdz 2 punktiem.

12.1. Par katru daļu 5 punkti.

12.2. Par uzminētu un pārbaudītu atbildi – 3 punkti.

12.3. Nav jāprasa pierādījumu, ka var apzīmēt a = M sinα utt. Ja netiek izslēgts gadījums M = 0 – 8 punkti. Līdzīgi, ja citā risinājumā tiek dalīts ar skaitli, nepārbaudot, vai tas ir 0.

12.4. a) daļa – 4 punkti, b) daļa – 6 punkti.

12.5. Par risinājumu, kurā pēta progresijas, kas sastāv tikai no naturāliem skaitļiem – līdz 3 punktiem.

Labu veiksmi Jums un Jūsu skolēniem!

A.Liepas NMS