Īsi atrisinājumi

5.1. a) jā, var; piemēram,

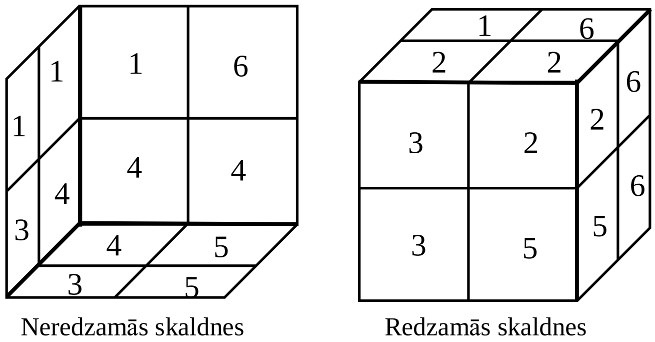
11, 1, 12, 2, 13, 3, 14, 4, 15, 5, 16, 6, 17, 7, 18, 8, 19, 9, 20, 10

b) nē, nevar. Skaitlim 10 iespējams tikai viens kaimiņš – skaitlis 20.

5.2. a) jā, var; piemēram, **3; 6; 9; 12** un **1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11**

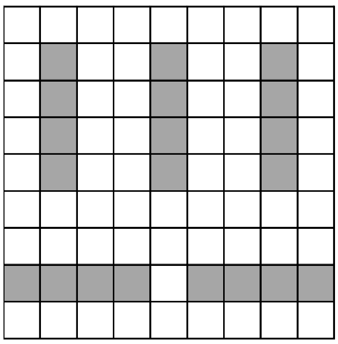
b) nē, nevar. Ja tas būtu iespējams, tad visu skaitļu summai būtu jādalās ar 3, bet tā ir 91.

5.3. Jā, var. Skat. 3. zīm.

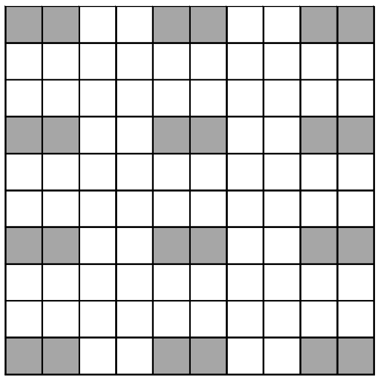


3. zīm.

5.4. a) var gadīties; skat. 4. zīm.



4. zīm.



5. zīm.

b) nevar gadīties, skat. 5. zīm. Katrs iekrāsotais taisnstūris „aizliedz" parādīties augstākais diviem no tur attēlotajiem „domino", bet tādu ir 12.

5.5. <u>Atbilde:</u> Ar 5 gājieniem.

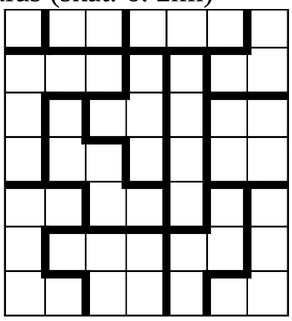
- Var izdarīt, piemēram, šādus pārveidojumus:

  abab**ab**ababa
  aba**bbaa**baba
  ab**aaabbb**aba
  a**bbbbaaaa**ba
  aaaaa**bbbbba**
  aaaaaabbbbb

- Sākumā ir 10 vietas, kur blakus stāv dažādi burti, beigās – tikai viena tāda vieta. Ar katru gājienu tādu vietu skaits samazinās ne vairāk kā par 2, tāpēc vajag vismaz 5 gājienus.

6.1. No dotā seko: četrkāršots Andra naudas daudzums ir visu zēnu kopējais naudas daudzums, un pieckāršots Jāņa naudas daudzums ir visu zēnu kopējais naudas daudzums. Tāpēc Andrim naudas ir vairāk.

6.2. a) Var iegūt 13 gabalus (skat. 6. zīm)



6. zīm.

1	1	1
1	2	2
2	3	4

7. zīm.

b) 6. zīm. izmantotas visas dažādās figūriņas ar 1; 2; 3; 4 rūtiņām un 4 figūras ar 5 rūtiņām. Ja figūras aizstātu ar citām, kas sastāv no vairāk rūtiņām, daļu skaits nevarētu palielināties.

6.3. Ja $\overline{ab}$ ir labs naturāls skaitlis, tad 10a + b = ab + a+ b un 9a = ab, b = 9. Tātad meklējamie skaitļi ir 19; 29; 39; ...; 99.

6.4. <u>Atbilde:</u> 17;

a) tabula ar skaitļu summu 17 redzama 7. zīm.

b) mazākā iespējamā summa vienā rindā vai kolonā ir 3. Tāpēc visu šo sešu summu summa S nav mazāka par 3 + 4 + 5+ 6+ 7+ 8 = 33. Tā kā S pāra skaitlis (katrs tabulas skaitlis tajā ieskaitīts divas reizes), tad S $\geq$ 34, no kurienes seko, ka tabulā ierakstīto skaitļu summa nav mazāka par 17.

6.5. Eksistē divi cilvēki x un y, kuri pazīst viens otru. Ja u – patvaļīgs cilvēks, tad eksistē tāds z, kas pazīst x, y un u; tātad x, y, z visi pazīst viens otru. Eksistē tāds t, kas pazīst x, y un z; tātad x, y, z, t visi pazīst cits citu. Atlikušajiem 3 cilvēkiem eksistē kāds, kas pazīst tos visus (šis „kāds" ir viens no x, y, z, t); tas der par meklējamo cilvēku.

7.1. <u>Atbilde:</u> 7 skaitļus.

a) izsvītrojot visus pāra skaitļus, katru divu atlikušo skaitļu summa ir pāra skaitlis, kas nav mazāks par 4, tātad tā ir salikts skaitlis,

b) katrā no skaitļu pāriem (1,2), (3, 14), (4, 13), (5, 6), (7, 10), (8, 15), (11, 12) vismaz viens skaitlis ir jāsvītro.

7.2. a) nē; (ax + b) + (cx + d) = (a + c)x + (b + d)

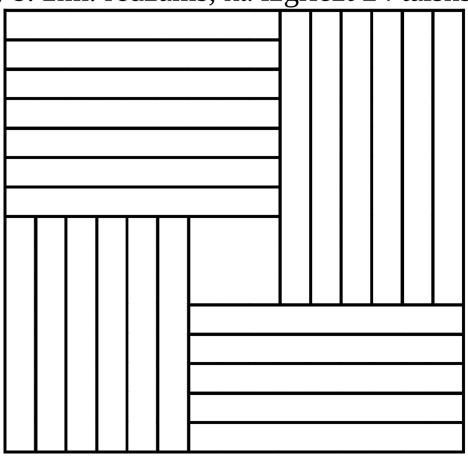
b) jā; piemēram, f(x) = 1 un g(x) = 1.

7.3. Uzdevumā minētie nogriežņi veido divus trijstūrus ΔBAD un ΔBCD ar kopīgu malu BD. Ne 2 cm, ne 3 cm garais nogrieznis nevar būt mala trijstūrī kopā ar 10 cm garo nogriezni, jo tad trešajai malai jābūt garākai par 10 cm – 3 cm = 7 cm; tātad BD nav ne 2 cm, ne 3 cm garš. Nevar būt BD = 10 cm, jo no atlikušajiem garumiem nevar izveidot divus pārus (x, y) un (z, t) tā, ka x + y > 10 un z + t > 10; līdzīga iemesla dēļ nevar būt BD = 7 cm. Tāpēc jābūt BD = 4 cm. Šī iespēja der, jo var ņemt, piemēram, AB = 2 cm, AD = 3 cm, CB = 7 cm, CD = 10 cm.

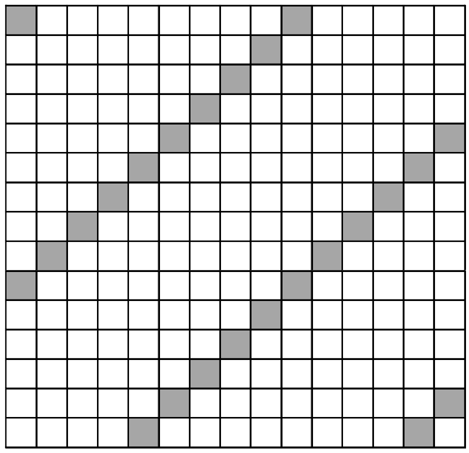
7.4. Nē, nevar. Ir tikai 7 skaitļi, kas mazāki par 8. Tāpēc kādā no 8 rindiņām noteikti visi skaitļi ir vismaz 8. Ja a, b, c – šīs rindiņas skaitļi, tad vai nu b > 8, vai c >8; tāpēc $b \cdot c > 8 \cdot 8 = 64 \geq a$, tātad $b \cdot c > a$.

7.5. Atbilde**:** 24.

a) 8. zīm. redzams, kā izgriezt 24 taisnstūrus.



8. zīm.



9. zīm.

b) viegli redzams, ka katram taisnstūrim jāsatur tieši viena iekrāsota rūtiņa (9. zīm.). Tā kā šādu rūtiņu ir 24, tad vairāk par 24 taisnstūriem izgriezt nevar.

8.1. Atbilde: 3 skaitļus.

a) izsvītrojot skaitļus 10; 11; 13, iegūstam sadalījumu

$$1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15$$

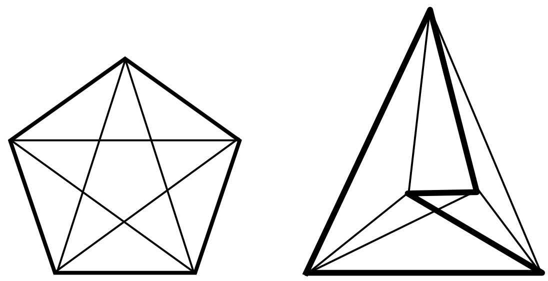
b) abos reizinājumos jāietilpst vieniem un tiem pašiem pirmskaitļiem. Tāpēc 11 un 13 jāsvītro noteikti (tie katrs sastopami vienā eksemplārā), un jāsvītro arī 5, 10 vai 15, lai atlikušo reizinātāju „5” būtu pāra skaits.

8.2. Ievērosim, ka:

- ja 2^n sākas ar 1, tad 2^{n+1} nesākas ar 1,
- 2^n ciparu skaits nevar par vairāk nekā 1 pārsniegt 2^{n-1} ciparu skaitu,
- ja 2^n sākas ar 1, tad 2^n ir par 1 ciparu vairāk nekā 2^{n-1}.

No šejienes izriet: sadalot skaitļus 2^n, n = 1; 2; ...; 200, grupās pēc to ciparu skaita, pavisam ir 61 grupa un katrā grupā (izņemot viencipara pakāpes) ir tieši viena pakāpe, kas sākas ar ciparu 1. Tāpēc uzdevuma atbilde ir 60.

8.3. Piecstūrim ir 5 diagonāles, no tām pavisam var izveidot 10 pārus. Piecos pāros diagonāles saskaras ar galiem, tātad nekrustojas. Tāpēc krustpunktu nevar būt ne vairāk par 5, ne mazāk par 0. Piemērus skat. 10. zīm.; piecstūru malas iezīmētas ar biezākām līnijām.



10. zīm.

8.4. Apzīmēsim skaitļus a, b, c, d, e ciemu apmeklēšanas secībā ar x, y, z, t, v. Tad izmaksas ir

$$x(x+y+z+t+v)+(x+y)(y+z+t+v)+$$
$$+(y+z)(z+t+v)+(z+t)(t+v)+(t+v)v,$$

kas pēc pārveidojumiem (pakāpeniski apvienojot saskaitāmos summā „no otra gala") izrādās $(x+y+z+t+v)^2$. Tātad izmaksas visos gadījumos ir vienas un tās pašas.

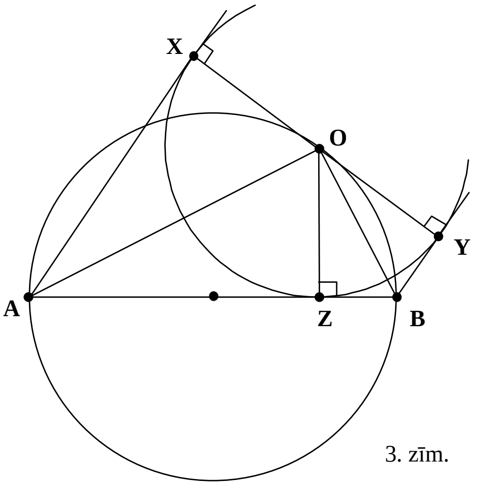
8.5. Ja a > b, uzvar Jānis. Apzīmēsim a = b + c, c > 0. Jānis sadala savu nogriezni gabalos $b+\frac{2c}{3}$, $\frac{c}{6}$, $\frac{c}{6}$. Tad daļa ar garumu $b+\frac{2c}{3}$ ir garāka par visām 5 citām daļām kopā, tāpēc tā nevar būt trijstūra mala.

Ja $a \le b$, uzvar Pēteris. Pieņemsim, ka Jāņa daļas ir $x \ge y \ge z$, $x + y + z = a$. Pēteris izveido daļas ar garumiem x, $\frac{b-x}{2}$, $\frac{b-x}{2}$. Tad var salikt vienādsānu trijstūri (x, x, y) un vienādsānu trijstūri ($\frac{b-x}{2}$, $\frac{b-x}{2}$, z) : ievērojam, ka $x \ge y$ un $\frac{b-x}{2} \ge z \Leftrightarrow b-x \ge 2z$. Pēdējā nevienādība ir pareiza, jo $b-x \ge a-x = y+z \ge 2z$.

9.1. Nevienādību pārveido par $(a-3)^2+(a-3)(b-3)+(b-3)^2 \ge 0$. Tālāk ievēro, ka $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \ge 0$.

9.2. Ja x – pāra skaitlis, pirmskaitļu ir ≤1. Ja x=1; 3; 5, pirmskaitļu ir ≤4 (to ir 4 pie x=3 un x=5). Ja x>5, tad, šķirojot iespējas atkarībā no x pēdējā cipara, redzam, ka vienam skaitlim pēdējais cipars ir 5. Tātad tas nav pirmskaitlis, un pirmskaitļu nav vairāk par 4.

9.3. Tā kā ΔAOX=ΔAOZ (hk), tad ∠XAZ=2∠OAZ. Līdzīgi ∠YBZ=2∠OBZ. Tāpēc ∠XAZ+∠YBZ=2(∠OAZ+∠OBZ)=2(180°-∠AOB)=2(180°-90°)=180°, no kā seko vajadzīgais.

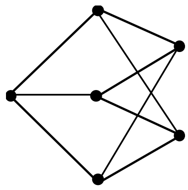


3. zīm.

9.4. Atbilde: jā, var.

Risinājums. Ja pieci no sākotnējiem skaitļiem ir x; y; z; t; 1, aizstājam x un y ar a=z+t-1. Tālāk z un t aizstājam ar 1+a-a=1. Tālāk a un a aizstājam ar 1+1-1=1. Tagad ir vismaz 5 vieninieki. Līdzīgi pakāpeniski pārvēršam par vieniniekiem visus skaitļus, kas tādi vēl nav.

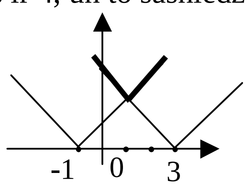
9.5. To, ka var būt 6 cilvēki, skat. 4.zīm.



4. zīm.

Pierādīsim, ka tas ir mazākais iespējamais skaits. Apzīmēsim ar A vienu cilvēku, ar B, C, D – viņa draugus. Tā kā B nevar draudzēties ne ar C, ne D, tad ir vismaz vēl divi citi cilvēki – B draugi, no kurienes seko vajadzīgais.

10.1. Ievērosim, ka $a + b + |a - b| = 2\max(a, b)$. Tāpēc apskatāmā izteiksme ir $2\max(|x + 1|,|x - 3|)$. Tā kā $\max(|x + 1|,|x - 3|)=|x - 1| + 2$ (skat. 5.zīm), tad meklējamais minimums ir 4, un to sasniedz pie $x = 1$.



5. zīm.

10.2. Apzīmēsim divus viens otram sekojošus palindromus, kuru starpība ir pirmskaitlis, ar a un b, a<b. Pieņemsim, ka a sākas (tātad arī beidzas) ar ciparu x, bet b – ar ciparu y. Patvaļīga naturāla skaitļa z ciparu skaitu apzīmēsim ar |z|.

Starpība b-a var būt 11 (piemēram, 22 – 11 = 11) un 2 (piemēram, 101 – 99 = 2). Pierādīsim, ka citu iespēju nav. Ja a < 100, to pārbauda tieši. Pieņemam, ka a > 100.

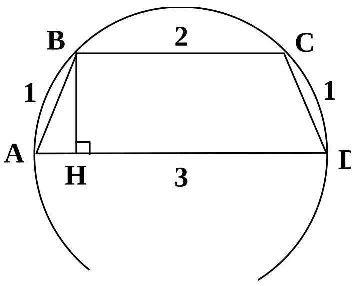
Ja būtu x = y, tad b - a dalītos ar 10 un nebūtu pirmskaitlis. Tāpēc x ≠ y. Šķirojam divas iespējas.

A. x < y. Tad x + 1 = y (pretējā gadījumā starp a un b atrastos palindroms $\underbrace{\overline{zzz\ldots z}}_{|a|\text{ reizes}}$, kur z=x+1). Tad jābūt $a=\overline{x99\ldots 9x}$ (pretējā gadījumā starp a un b atrastos palindroms $\overline{x99\ldots 9x}$); tad $b=\overline{y00\ldots 0y}$ un b – a = 11.

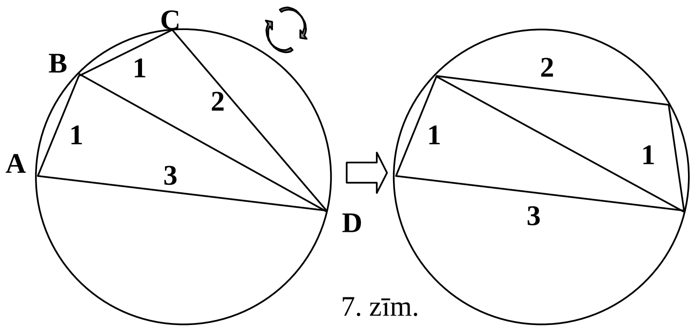
B. x > y. Tad |b| ≥ |a| + 1. Jābūt $a=\underbrace{999\ldots 9}_{t\text{ reizes}}$, un tad noteikti $b=1\underbrace{00\ldots 0}_{t-1\text{ reizi}}1$ (ja būtu citādi, tad starp a un b atrastos palindroms $\underbrace{999\ldots 9}_{|a|}$). Tad b – a = 2.

10.3. Šķirojam divus gadījumus:

A. Malas ar garumu 1 ir pretējās malas. Tad BC||AD, $AH=\frac{1}{2}(AD-BC)=\frac{1}{2}$, $BH=\frac{\sqrt{3}}{2}$ un $L(ABCD)=\frac{5\sqrt{3}}{4}$ (6. zīm.)



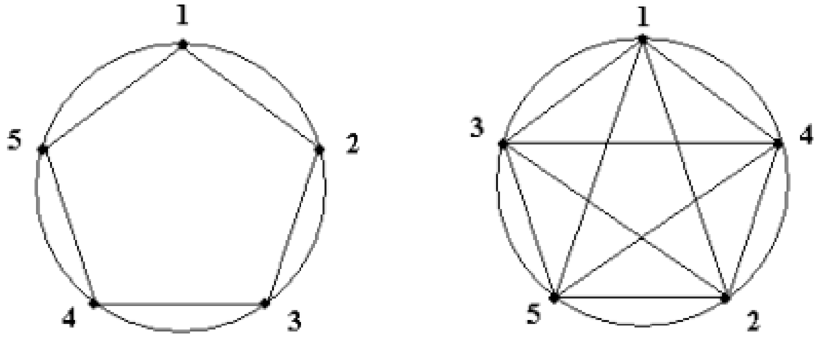
6. zīm.



7. zīm.

B. Malas ar garumu 1 ir blakus malas (7. zīm). Sagriežam riņķi pa hordu BD un vienu no daļām "apgriežam otrādi", pēc tam abas daļas atkal saliekot kopā pa hordu. Simetrijas dēļ atkal iznāks riņķis, un šis gadījums reducēts uz iepriekšējo.

10.4. a) nē. Skat., piem., 8. zīm.



8.zīm.

b) jā. Apvelkam ap abiem 6-stūriem riņķa līnijas. Ja eksistē kaut viens skaitļu pāris, kas abos 6-stūros ir diametra galapunktos, tad par trešajām virsotnēm var ņemt jebkuras ar vienādiem numuriem – abi trijstūri būs taisnleņķa.

Ja tāda pāra nav, tad ņemam divus skaitļus, kas pirmajā 6-stūrī ir pretējās virsotnēs (pieņemsim, tie ir x un y). Pieņemsim, ka skaitlis z otrā 6-stūrī ir pretējā virsotnē skaitlim x. Tad skaitļi x, y, z ir meklējamie: abi ar tiem sanumurētie trijstūri ir taisnleņķa.

10.5. Kvadrātvienādojuma grafika simetrijas dēļ $f(x_1)=f(x_2)$ (kur $x_1 \neq x_2$) tad un tikai tad, ja $\frac{x_1+x_2}{2}=x_o$, kur x_o – parabolas virsotnes abscisa. No dotā seko, ka $a + b + c + d + e = 2x_o$. No tā savukārt seko visas vajadzīgās vienādības.

11.1. Ja $a < b < c < d < e$, tad $a + b < a + c < a + d < a + e < b + e < c + e < d + e$. Tātad ir vismaz 7 dažādas summas. Tā kā pavisam ir 10 izvēlēto skaitļu pāri, tad nav vairāk par 10 dažādām summām. Piemēri

1; 2; 3; 4; 5
1; 2; 3; 4; 6
1; 2; 3; 4; 7
1; 2; 3; 5; 8

parāda, ka pastāv visas iespējas 7; 8; 9; 10.

11.2. Pie $n = 2$; $n = 3$; $n = 4$ redzams, ka $2^n - 2$ nedalās ar 10. Ievērojam, ka

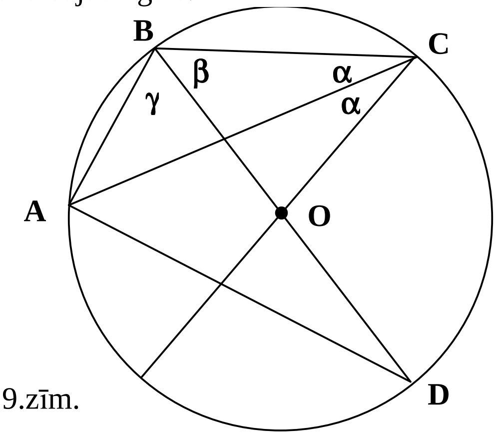
$$x^5 - x = x(x^4-1) = x(x^2-1)(x^2+1) = x(x^2-1)(x^2-4+5) =$$
$$= x(x^2-1)(x^2-4) + 5x(x^2-1) =$$
$$= (x-2)(x-1)x(x+1)(x+2) + 5(x-1)x(x+1).$$

Tā kā

1) vai nu x, vai $x - 1$ ir pāra skaitlis,
2) viens no pieciem pēc kārtas ņemtiem veseliem skaitļiem $x - 2$; $x - 1$; x; $x + 1$; $x + 2$ dalās ar 5,

tad katrs saskaitāmais dalās gan ar 2, gan ar 5. Tā kā LKD(2;5) = 1, no tā seko, ka abi saskaitāmie dalās ar $2 \cdot 5 = 10$. Tātad mazākā n vērtība ir 5.

11.3. Skat. 9. zīm. No ievilktu leņķu īpašības $\angle BDA = \angle BCA = \alpha$. Tāpēc $\alpha+\gamma=\frac{1}{2}\cup BAD = 90^o$. No vienādsānu trijstūra BOC: $\beta = 2\alpha$. No ΔABC: $\alpha+\beta+\gamma<180^o$. Tāpēc $\beta<180^o-(\alpha+\gamma) = 90^o$, tātad $\alpha = \frac{1}{2}\beta<45^o$. Tāpēc $\gamma = 90^o-\alpha>45^o$. No $\beta<90^o$ un $\gamma>45^o$ seko vajadzīgais.



9.zīm.

11.4. <u>Atbilde</u>**:** intervālu $\left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

<u>Atrisinājums:</u>

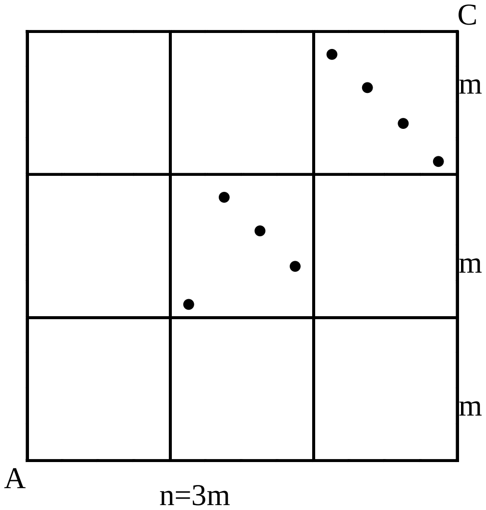
a) ja $|p|\le 1$ un $|q|\le 1$, tad vienādojuma $x^2+px+q=0$ reālai saknei x_o ir spēkā $|x_o| = \left|\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}\right| \le \left|\frac{p}{2}\right| + \frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q} \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Tātad visas saknes pieder minētajam intervālam.

b) vienādojumu $x^2\pm x-1=0$ saknes ir $\frac{-1\mp\sqrt{5}}{2}$ un $\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$. Tātad intervāla galapunkti **ir** vajadzīgā tipa vienādojumu saknes. Pieņemsim, ka $z\in\left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, tad $z=\alpha\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, kur $|\alpha|\le 1$. Apskatām vienādojumu $x^2-\alpha x-\alpha^2=0$. Ievērojam, ka $|-\alpha|\le 1$ un $|-\alpha^2|\le 1$, un šī vienādojuma saknes ir $\frac{\alpha}{2}\mp\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\alpha^2} = \frac{\alpha}{2}\mp|\alpha|\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}$. Tātad viena no tām ir $\alpha\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}=z$. Tātad **visi** apskatāmā intervāla punkti ir vajadzīgā tipa vienādojumu saknes.

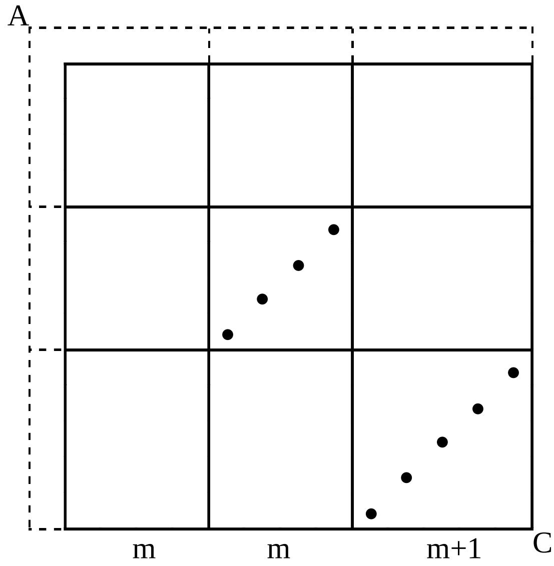
11.5. <u>Atbilde</u>**:** vajag vismaz $k=\left\lceil\frac{2n-1}{3}\right\rceil$ lēdijas, un ar šo daudzumu pietiek.

(Tātad 2m, ja n=3m;
2m+1, ja n=3m+1;
2m+1, ja n=3m+2.)

Atrisinājums: Pieņemsim, ka ir k lēdijas, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. Tad ir vismaz n-k rindas (kolonnas) bez lēdijām.
Pieņemsim, ka augšējā "bezlēdiju" rindā r_1, r_2, ..., r_{n-k} ir rūtiņas, kuru kolonnās nav lēdiju, un labējā "bezlēdiju" kolonnā R_1, R_2, ..., R_{n-k} ir rūtiņas, kuru rindās nav lēdiju (ievērojam: **viena** r_i sakrīt ar **vienu** R_j). Tad ir vismaz 2(n-k)-1 šādas rūtiņas uz dažādām diagonālēm, kas paralēlas AC. Tāpēc jābūt $k \geq 2(n-k)$, $3k \geq 2n-1$, $k \geq \frac{2n-1}{3}$.



10.zīm.



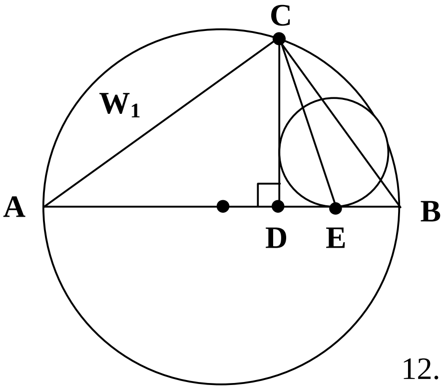
11.zīm.

12.1. Katra nākošā virknes locekļa atlikumu, dalot ar 6, iegūst, saskaitot abu iepriekšējo virknes locekļu atlikumus dalīšanā ar 6 un dalot iegūto summu ar 6 ar atlikumu. Tāpēc virknes pirmo 26 locekļu atlikumi, dalot ar 6, ir:

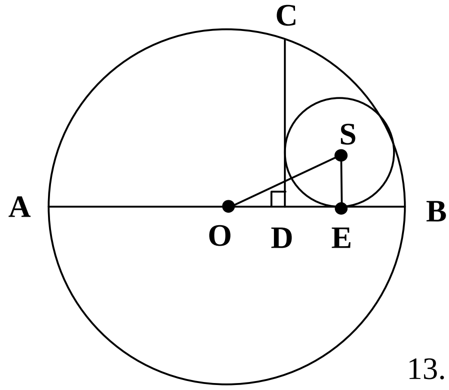
1; **1**; 2; 3; 5; 2; 1; 3; 4; 1; 5; 0; 5; 5; 4; 3; 1; 4; 5; 3; 2; 5; 1; 0; **1**; **1**;…

Redzam, ka virknes 24. loceklis dalās ar 6. Tāpat skaidrs, ka atlikumi atkārtojas ar periodu 24, jo 1. atlikums sakrīt ar 25-o, bet 2. atlikums sakrīt ar 26-o. Tā kā $2004 = 24 \cdot 83 + 12$, tad 2004-ais loceklis dod tādu pašu atlikumu kā 12-ais, tātad arī dalās ar 6.

12.2. **a)** No trijstūra ΔCEB pēc ārējā leņķa īpašības $\angle CBE + \angle BCE = \angle CED$. Pēc pieņēmuma $\angle CED = \angle ACE$, tātad $\angle CBE + \angle BCE = \angle ACE$. No taisnleņķa trijstūra ACB seko $\angle CBE = \angle ACD$, tātad $\angle ACD + \angle BCE = \angle ACE = \angle ACD + \angle DCE$, no kurienes seko vajadzīgais (12. zīm.).



12. zīm.



13. zīm.

b) Apzīmēsim W_1 un W_2 rādiusus attiecīgi ar R un r (13. zīm.).

$$\text{Tad } AE^2 = (R + OE)^2 = R^2 + 2R\cdot OE + OE^2 =$$
$$= R^2 + 2R\cdot OE + [(R-r)^2 - r^2] = 2R^2 + 2R(OE - r) =$$
$$= 2R^2 + 2R\cdot OD = 2R\cdot AD.$$

Savukārt no taisnleņķa trijstūru ACB un ADC līdzības seko AC:AB = AD:AC, tāpēc $AC^2 = AB\cdot AD = 2R\cdot AD = AE^2$. Tātad AC = AE.

12.3. **a)** Pieņemsim no pretējā, ka visiem naturāliem k pastāv nevienādība $a_k>0$. Tā kā virkne ir dilstoša, tad $a_k \le 60$; tāpēc $a_{n+1} \le a_n - \frac{1}{60}$ visiem n. Tāpēc $a_{n+1} \le a_1 - \frac{n}{60} = 60 - \frac{n}{60} < 0$ pie n > 3600 – pretruna.

b) Pieņemsim no pretējā, ka $a_k>0$ visiem $k \le 2004$. Spriežot līdzīgi kā a) punktā, pakāpeniski iegūstam

$$a_{301} < 60 - \frac{300}{60} = 55$$
$$a_{576} < 55 - \frac{275}{55} = 50$$
$$a_{826} < 50 - \frac{250}{50} = 45$$
$$a_{1051} < 45 - \frac{225}{45} = 40$$
$$a_{1251} < 40 - \frac{200}{40} = 35$$
$$a_{1426} < 35 - \frac{175}{35} = 30$$
$$a_{1576} < 30 - \frac{150}{30} = 25$$
$$a_{1701} < 25 - \frac{125}{25} = 20$$
$$a_{1801} < 20 - \frac{100}{20} = 15$$
$$a_{1876} < 15 - \frac{75}{15} = 10$$
$$a_{1976} < 10 - \frac{100}{10} = 0 \text{ - pretruna.}$$

12.4. Apzīmējam $\sqrt[3]{13x - 12} = y$. Iegūstam sistēmu

$$\begin{cases} x^3 = 13y - 12 \\ y^3 = 13x - 12 \end{cases}$$

Atņemot vienādojumus, iegūstam

$$x^3 - y^3 = 13(y - x)$$
$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 13) = 0$$

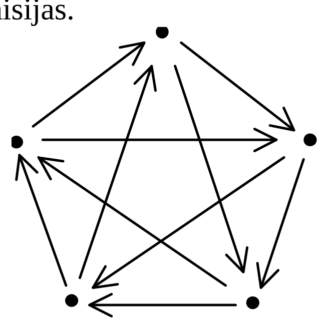
Tā kā $x^2 + xy + y^2 + 13 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 13 > 0$, seko, ka x = y.

Risinām vienādojumu

$$x^3 - 13x + 12 = 0 \text{ jeb}$$
$$(x - 1)(x - 3)(x + 4) = 0.$$

No šejienes $x_1 = 1; x_2 = 3$; $x_3 = -4$. Pārbaude parāda, ka visas saknes der (pārbaude nepieciešama!).

12.5. **a)** Var gadīties, ka ir 5 deputāti, kuru „aizspriedumu struktūra” attēlota 14. zīm. Nekādus divus no tiem nevar iekļaut vienā komisijā. Tātad var gadīties, ka nepieciešamas vismaz 5 komisijas.



14. zīm.

b) Parādīsim, ka ar 5 komisijām vienmēr pietiek. Pierādīsim to ar matemātisko indukciju patvaļīgam deputātu skaitam n. Pie n = 1; 2; 3; 4; 5 tas ir acīmredzams (katrā komisijā iekļauj vienu deputātu).

Pieņemsim, ka apgalvojums ir pareizs pie n = 1; 2; 3; ...; m – 1, kur $m \geq 6$. Apskatīsim m deputātus. Ja katru no šiem deputātiem „ienīst” vairāk nekā 2 citi, tad kopējais „ienaidu” skaits ir lielāks par 2m, tā ir pretruna, jo katram deputātam ir aizspriedumi pret augstākais 2 citiem, tāpēc „ienaidu” nav vairāk par 2m.

Tāpēc eksistē deputāts A, pret kuru aizspriedumu nav vairāk kā 2 citiem. Apskatīsim visus m-1 deputātus, izņemot A. Saskaņā ar induktīvo hipotēzi tos var sadalīt 5 komisijās vajadzīgā veidā. Deputāts A ir „nepieņemams” ne vairāk kā 4 no tām (jo ir ≤ 2 deputāti, kam ir aizspriedumi pret viņu, un ir ≤ 2 deputāti, pret kuriem viņam ir aizspriedumi). Tātad A var pievienot vismaz 1 komisijai. Induktīvā pāreja izdarīta.

Īsi norādījumi vērtēšanai

5.1., 5.2., 5.4., 5.5. : katra daļa – 5 punkti.

6.2. Par piemēru - 6 punkti, par maksimalitātes pierādījumu – 4 punkti.

6.3. Par piemēriem bez pamatojuma, ka tie ir vienīgie – līdz 5 punktiem (ja nav visu skaitļu, ne vairāk par 3 punktiem).

6.4. Par piemēru – 4 punkti, par minimalitātes pierādījumu – 6 punkti.

7.1. Par piemēru – 4 punkti.

7.2. Par katru daļu - 5 punkti.

7.3. Par atbildi – 2 punkti.

7.5. Par piemēru - 5 punkti.

8.1. Par piemēru – 5 punkti.

8.2. Par atbildi bez pamatojuma – 3 punkti.

8.3. Par pierādījumu, ka $n \leq 5$ – 3 punkti. Par piemēru ar $n = 0$ – 5 punkti.

8.5. Par katru gadījumu – 5 punkti.

9.1. Par speciālu gadījumu aplūkošanu (piem., ja $a=b$) – ne vairāk par 2 punktiem.

9.2. Par piemēru – 4 punkti.

Ja maksimalitātes pierādījums neder gadījumiem $x = 1; 3; 5$, jānoņem 1 vai 2 punkti.

9.4. Par speciālu gadījumu aplūkošanu – ne vairāk par 2 punktiem.

9.5. Par piemēru – 4 punkti. Par nepareizu piemēru – 0 punkti.

Par atbildi bez paskaidrojumiem – 0 punkti.

10.1. Par kļūdainu risinājumu – ne vairāk kā 5 punkti.

10.2. Par piemēriem 2 un 11 – kopā 4 punkti.

10.3. Par risinājumu, kurā apskatīts tikai trapeces gadījums – 5 punkti.

10.4. Par katru daļu 5 punkti.

10.5. Par vienas vienādības pamatošanu – 4 punkti,

par divu vienādību pamatošanu – 7 punkti

11.1. Par pierādījumu, ka ir vismaz 7 dažādas summas – 4 punkti.

Par pierādījumu, ka nav vairāk par 10 dažādām summām – 2 punkti.

Par katru no četriem piemēriem – 1 punkts.

11.2. Par pierādījumu, ka n = 5 der - 7 punkti.

Par piemēriem, ka n = 2; 3; 4 neder – pa 1 punktam.

11.4. Par a) daļu – 2 punkti.

11.5. Par rezultātu $k \geq \frac{2n-1}{3}$ - 6 punkti.

12.1. Par a) daļu – 3 punkti.

12.2. Par a) daļu – 4 punkti.

12.3. Par a) daļu – 3 punkti.

12.4. Par katru sakni – pa 1 punktam.

Pārējie 7 – par pamatojumu, ka citu sakņu nav.

12.5. Par pierādījumu, ka vajag vismaz 5 komisijas – 4 punkti.

Par atbildi bez pamatojuma – 0 punkti.

Par speciālu gadījumu apskatīšanu pierādījumā, ka ar 5 komisijām pietiek – ne vairāk kā 1 punktu.

Labu veiksmi Jums un Jūsu skolēniem!

A.Liepas NMS