LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 54. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

5. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

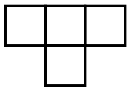
1. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 20 ieskaitot var izrakstīt katru tieši vienu reizi
   a) rindā,
   b) pa apli

tā, lai katru divu blakus uzrakstītu skaitļu starpība būtu vismaz 10?

2. Vai naturālos skaitļus
   a) no 1 līdz 12 ieskaitot,
   b) no 1 līdz 13 ieskaitot

var sadalīt grupās tā, lai katras grupas skaitļu summa dalītos ar 3?

3. Katra kuba skaldne sadalīta 4 vienādos kvadrātiņos. Vai kuba virsmu var pilnībā aplīmēt ar sešām tādām figūrām, kāda redzama 1. zīm.? (Rūtiņas, no kurām sastāv šī figūra, ir tikpat lielas kā tās, kurās sadalīta kuba virsma.)



1. zīm.

4. Kvadrāts sastāv no 9×9 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Tajā iekrāsoti 5 taisnstūri, katrs no kuriem sastāv no 4 rūtiņām (šie taisnstūri nav kvadrāti). Vai var gadīties, ka katram no 2 rūtiņām sastāvošam taisnstūrim ir vismaz viens kopīgs punkts ar kādu jau iekrāsoto taisnstūri?

Vai tā var gadīties, ja kvadrāta izmēri ir 10×10 rūtiņas?

5. Uz tāfeles uzrakstīta burtu virkne **ababababab a**. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuru daudzumu pēc kārtas uzrakstītu burtu, nodzēst tos un atbrīvotajā vietā uzrakstīt šos pašus burtus apgrieztā secībā (piemēram, abb var aizstāt ar bba).

Ar kādu mazāko daudzumu gājienu, izpildot tos vienu pēc otra, var uz tāfeles iegūt virkni **aaaaaabbbbb**?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 54. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

6. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Andrim ir trīsreiz mazāk naudas nekā Jānim un Pēterim kopā, bet Jānim ir četrreiz mazāk naudas nekā Andrim un Pēterim kopā. Kam ir vairāk naudas: Andrim vai Jānim?

2. Kvadrāts sastāv no 7×7 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Griežot pa rūtiņu līnijām, tas jāsagriež gabalos, no kuriem nekādi divi nav vienādi. Kāds ir lielākais iespējamais gabalu skaits? (Divus gabalus, kas ir viens otra spoguļattēli, uzskata par vienādiem.)

3. Sauksim naturālu skaitli par labu, ja, atņemot no šī skaitļa tā ciparu reizinājumu, iegūst tā ciparu summu. Kuri divciparu naturāli skaitļi ir labi?

4. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts kaut kāds naturāls skaitlis (starp tiem var būt arī vienādi). Visās rindās un visās kolonnās ierakstīto skaitļu summas ir dažādas. Kāda ir mazākā iespējamā visā tabulā ierakstīto skaitļu summa?

5. Ap galdu sēž 7 cilvēki. Katriem trim pie galda sēdošiem cilvēkiem var atrast tādu pie galda sēdošu cilvēku, kurš pazīst tos visus trīs. Pierādīt: pie galda ir tāds cilvēks, kurš pazīst visus pārējos ap galdu sēdošos.
(Piezīme: ja A pazīst B, tad arī B pazīst A.)

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 54. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

7. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Kādu mazāko daudzumu no skaitļiem 1; 2; 3; ...; 14; 15 var izsvītrot, lai katru divu atlikušo summa būtu salikts skaitlis?

2. Šajā uzdevumā runājam par funkcijām, kas definētas visiem x. Pieņemsim, ka y=f(x) un y=g(x) abas ir lineāras funkcijas.

a) vai var gadīties, ka y=f(x)+g(x) nav lineāra funkcija?

b) vai var gadīties, ka y=f(x)·g(x) ir lineāra funkcija?

3. Nogriežņu AB, BC, CD, DA, BD garumi ir 2 cm, 3 cm, 4 cm, 7 cm, 10 cm (varbūt citā secībā). Nekādi 3 no punktiem A, B, C, D neatrodas uz vienas taisnes.

Cik garš ir nogrieznis BD?

4. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 64 (visi skaitļi ir dažādi). Vai var gadīties, ka katrā rindā un katrā kolonnā atradīsies trīs tādi dažādi skaitļi, no kuriem viens vienāds ar abu pārējo reizinājumu?

5. Kvadrāts sastāv no 15×15 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. No tā jāizgriež taisnstūrus ar izmēriem 1×9 rūtiņas. Kādu lielāko daudzumu šādu taisnstūru var izgriezt?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 54. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

8. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

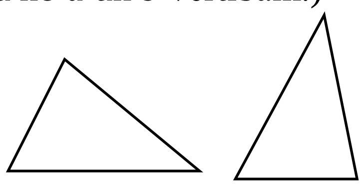
1. Kādu mazāko daudzumu no skaitļiem 1; 2; 3; ...; 14; 15 var izsvītrot, lai atlikušos varētu sadalīt divās grupās ar īpašību: vienas grupas visu skaitļu reizinājums vienāds ar otras grupas visu skaitļu reizinājumu?

2. Ir zināms, ka skaitļa 2^{200} decimālajā pierakstā ir 61 cipars. Cik daudziem no skaitļiem 2^1; 2^2; 2^3; ...; 2^{199}; 2^{200} decimālais pieraksts sākas ar ciparu 1?

3. Nekādas trīs piecstūra virsotnes neatrodas uz vienas taisnes. Kādā lielākajā un kādā mazākajā skaitā punktu var krustoties piecstūra diagonāles? (Atceramies, ka piecstūris var arī nebūt izliekts.)

4. Dots, ka $a<b<c<d<e$ – naturāli skaitļi. Pie stacijas automašīnā iekrauj $a+b+c+d+e$ saiņus. No tiem a saiņi jāaizved uz a km attālo ciemu A, b saiņi – uz b km attālo ciemu B, ..., e saiņi – uz e km attālo ciemu E. Pieejami tikai tādi ceļi, kas savieno staciju ar ciemiem, pie tam uz katru ciemu no stacijas ved cits ceļš (tātad pēc katra ciema apmeklēšanas jāatgriežas pie stacijas, pirms var braukt uz nākošo ciemu). Katram ciemam paredzētos saiņus drīkst izkraut no mašīnas tikai šajā ciemā. Viena saiņa pārvadāšana 1 km attālumā izmaksā 1 latu; braukšana bez saiņiem nemaksā neko. Kādā secībā jāapmeklē ciemi, lai kopējās pārvadājumu izmaksas būtu vismazākās iespējamās? (Ja mazākās izmaksas sasniedzamas vairāk nekā vienā veidā, tad jāuzrāda tos visus.)

5. Jānis sadala a metrus garu nogriezni 3 mazākos nogriežņos; pēc tam Pēteris sadala b metrus garu nogriezni 3 mazākos nogriežņos. Pēteris grib, lai no iegūtajiem 6 nogriežņiem varētu vienlaicīgi salikt divu trijstūru kontūras, skat. 2.zīm.; Jānis cenšas to nepieļaut. Kurš no zēniem var sasniegt savu mērķi? (Atbilde **varbūt** ir atkarīga no a un b vērtībām.)



2. zīm.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 54. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Dots, ka *a* un *b* – kaut kādi reāli skaitļi. Pierādīt, ka

$$a^2 + ab + b^2 \geq 9(a + b - 3).$$

2. Dots, ka x – naturāls skaitlis. Kāds lielākais daudzums no skaitļiem

$$x;\ x + 2;\ x + 4;\ x + 6;\ x + 8$$

var vienlaicīgi būt pirmskaitļi?

3. Riņķa līnijas W_1 diametram AB pieskaras otra riņķa līnija W_2, kuras centrs atrodas uz W_1. Pierādīt: pieskares, kas no A un B vilktas riņķa līnijai W_2 un kas nesakrīt ar AB, ir paralēlas savā starpā.

4. Uz tāfeles uzrakstīti 2004 skaitļi; viens no tiem ir 1. Ar vienu gājienu atļauts nodzēst vienu skaitli un tā vietā uzrakstīt skaitli a + b - c, kur a, b un c – kaut kādi trīs no nenodzēstajiem skaitļiem. Vai, atkārtojot šādus gājienus vairākas reizes, var panākt, lai uz tāfeles vienlaicīgi būtu uzrakstīti 2004 skaitļi, kas visi vienādi ar 1?

5. Kādā kolektīvā katram cilvēkam ir tieši 3 draugi (ja A ir B draugs, tad arī B ir A draugs). Nav tādu triju cilvēku, kas visi savā starpā draudzētos. Kāds ir mazākais iespējamais cilvēku skaits šajā kolektīvā?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 54. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Atrast izteiksmes

$$|x+1| + |x-3| + \big||x+1| - |x-3|\big|$$

mazāko iespējamo vērtību.

2. Naturālu skaitli sauc par palindromu, ja tā decimālais pieraksts ir simetrisks. Piemēram, palindromi ir 11; 505; 4774 utt.
Visi palindromi, sākot ar 11, izrakstīti virknē augošā secībā. Kāda var būt blakus uzrakstītu palindromu starpība, ja zināms, ka tā ir pirmskaitlis?

3. Riņķī ievilkta četrstūra malu garumi ir 1 cm; 1 cm; 2 cm; 3 cm (ne noteikti šajā secībā). Kāds var būt šī četrstūra laukums?

4. Katram no diviem vienādiem regulāriem n-stūriem virsotnes kaut kādā kārtībā sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz n (katrā n-stūrī visi numuri ir dažādi).
Noskaidrojiet, vai noteikti katrā n-stūrī var izvēlēties 3 virsotnes tā, ka vienlaicīgi izpildās sekojošas īpašības:

- abos n-stūros izvēlētas virsotnes ar vieniem un tiem pašiem numuriem,
- pirmajā n-stūrī izvēlēto virsotņu veidotais trijstūris un otrajā n-stūrī izvēlēto virsotņu veidotais trijstūris abi ir viena tipa: vai nu abi ir šaurleņķu, vai abi taisnleņķa, vai abi platleņķa.

Atbildiet uz šo jautājumu, ja a) $n = 5$; b) $n = 6$.

5. Apzīmēsim $f(x) = x^2 + px + q$. Pieņemsim, ka a, b, c, d, e – kaut kādi skaitļi, pie tam $a \neq b+c+d+e$. Dots, ka $f(a) = f(b + c + d + e)$.
Vai noteikti jāizpildās vienādībām

$$f(a + b) = f(c + d + e),\ f(a + b + c) = f(d + e),\ f(e) = f(a + b + c + d)?$$

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 54. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

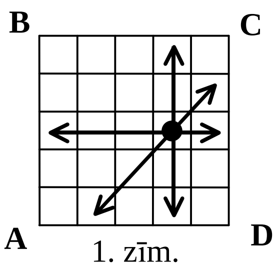
1. Andris izvēlējās 5 dažādus naturālus skaitļus un katriem diviem izvēlētajiem skaitļiem aprēķināja to summu. Kādu daudzumu dažādu summu Andris varēja iegūt?

2. Atrast mazāko tādu naturālu skaitli n, $n > 1$, ka katram veselam x skaitlis $x^n - x$ dalās ar 10.

3. Platleņķa trijstūrim ABC ($\angle B > 90^\circ$) apvilktā riņķa centrs ir O.
Dots, ka $\angle ACO = \angle ACB$. Pierādīt, ka $\angle OBC < 2\angle OBA$.

4. Aplūkosim visus kvadrātvienādojumus ar reāliem koeficientiem $x^2 + px + q = 0$, kam ir vismaz viena reāla sakne un kam $|p| \leq 1$ un $|q| \leq 1$. Kādu apgabalu uz skaitļu ass aizpilda visu šo kvadrātvienādojumu visas saknes?

5. Kvadrāts ABCD sastāv no $n \times n$ vienādām kvadrātiskām rūtiņām, $n > 2$. Par "lēdiju" sauc figūru, kas var atrasties jebkurā rūtiņā; tā apdraud visas tās rūtiņas, kas atrodas ar to vienā horizontālē, vienā vertikālē un vienā "diagonālē", kura paralēla AC (skat. 1.zīm.)



1. zīm.

Kādu mazāko lēdiju skaitu var novietot kvadrātā, lai visas neaizņemtās rūtiņas būtu apdraudētas?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 54. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

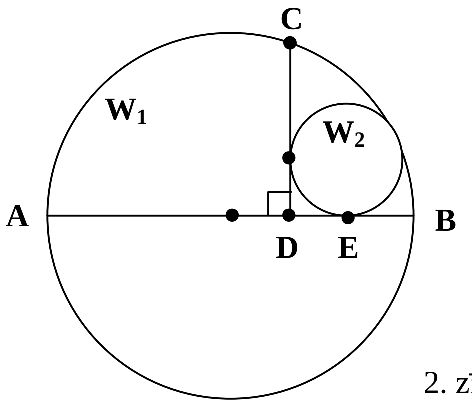
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Skaitļu virknē 1; 1; 2; 3; 5;... katrs loceklis, sākot ar trešo, vienāds ar abu iepriekšējo locekļu summu. Noskaidrot, vai ar 6 dalās

a) virknes 24-ais loceklis,

b) virknes 2004-ais loceklis.

2. Dots, ka AB ir riņķa līnijas w_1 diametrs, $DC \perp AB$, bet riņķa līnija w_2 pieskaras CD, AB un riņķa līnijai w_1. Apzīmēsim w_2 un AB pieskāršanās punktu ar E (skat. 2.zīm.).



2. zīm.

a) pieņemot, ka jau pierādīta vienādība AC = AE, pierādīt: CE ir $\angle BCD$ bisektrise,

b) pierādīt vienādību AC = AE.

3. Skaitļu virknē a_1; a_2; a_3; … zināms, ka $a_1 = 60$ un $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{a_n}$ pie $n \geq 1$, ja vien a_n ir definēts un $a_n \neq 0$. Pierādīt:

a) eksistē tāds k, ka $a_k \leq 0$,

b) eksistē tāds k, ka $a_k \leq 0$ un $k \leq 2004$.

4. Atrisināt vienādojumu $x^3 - 13\sqrt[3]{13x - 12} + 12 = 0$ reālos skaitļos.

5. Parlamentā ir 100 deputātu. Ir zināms, ka nevienam deputātam nav aizspriedumu pret vairāk nekā 2 citiem deputātiem. (Ja A ir aizspriedumi pret B, tad B var arī nebūt aizspriedumu pret A.)

Kāds ir mazākais komisiju skaits, kurās noteikti var sadalīt jebkura šāda parlamenta deputātus (katram deputātam jāpiedalās vismaz vienā komisijā) tā, ka nevienā komisijā nevienam deputātam nav aizspriedumu ne pret vienu citu?