Īsi atrisinājumi

5.1. No uzdevuma nosacījumiem seko: pieskaitot skaitlim 8002 skaitli B divas reizes, iegūst vismaz 10 000. Tas ir iespējams tikai, ja B = 999 (ja B < 999, tad 8002 + B + B < 10 000). Tāpēc B = 999 un A = 8002 + 999 = 9001.

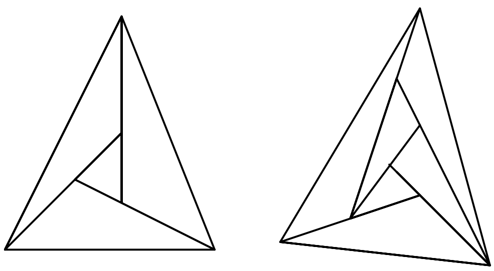
5.2. Atbilde: Ar 5 gājieniem.

- Var izdarīt, piemēram, šādus pārveidojumus:

  abab**ab**ababa
  aba**bbaa**baba
  ab**aaabbb**aba
  a**bbbbaaaa**ba
  aaaaa**bbbbba**
  aaaaaabbbbb

- Sākumā ir 10 vietas, kur blakus stāv dažādi burti, beigās – tikai viena tāda vieta. Ar katru gājienu tādu vietu skaits samazinās ne vairāk kā par 2, tāpēc vajag vismaz 5 gājienus.

5.3. Skat.1. zīm.



1. zīm.

5.4. Var ņemt, piemēram, 13 kartiņas ar skaitļiem

1; 1; 1; 1; 2; 2; 3; 4; 4; 5; 5; 5; 5.

Parādīsim, ka 13 ir **mazākais** iespējamais kartiņu skaits. Pieņemsim, ka a un b – divi mazākie **dažādi** skaitļi, a < b. Tā kā summai a + b jāizsakās vēl citādi, jābūt vēl pa vienam eksemplāram gan a, gan b. Lai summu a + a varētu izsacīt ar citām kartiņām, jābūt vēl diviem a eksemplāriem. Līdzīgi konstatē, ka lielākajai vērtībai d jābūt vismaz uz 4 kartiņām un otrai lielākajai vērtībai c – vismaz uz 2 kartiņām. Tā kā jābūt vismaz 5 dažādiem skaitļiem ,tad nepieciešama vēl 13. kartiņa.

5.5. Ar katru pārvēršanos **katras** krāsas amēbu skaits mainās par 1. Tāpēc pēc 1. pārvēršanās **katras** krāsas amēbu daudzums būs nepāra skaitlis, pēc 2. pārvēršanās – pāra skaitlis, pēc 3. pārvēršanās – nepāra skaitlis utt. Tāpēc nevar iestāties situācija, kad divu krāsu amēbu skaits ir 0, bet trešās krāsas amēbu skaits ir 1.

6.1. Nē, nevar, Ejot no A uz B, no B uz C, no C uz D, no D uz E un no E uz A, katru nostaigāto taisnes gabalu nostaigā pāra skaitu reižu (cik reizes pa labi, tik reizes pa kreisi). Tāpēc kopējam nostaigātajam ceļam jāizsakās ar pāra skaitli. Bet 1 + 3 +5 + 7 + 9 = 25.

6.2. Eksistē divi cilvēki x un y, kuri pazīst viens otru. Ja u – patvaļīgs cilvēks, tad eksistē tāds z, kas pazīst x, y un u; tātad x, y, z visi pazīst viens otru. Eksistē tāds t, kas pazīst x, y un z; tātad x, y, z, t visi pazīst cits citu. Atlikušajiem 3 cilvēkiem eksistē kāds, kas pazīst tos visus (šis „kāds” ir viens no x, y, z, t); tas der par meklējamo cilvēku.

6.3. a) Nē. Vienā kolonnā ar 4 var atrasties tikai 5, un vienā kolonā ar 11 arī var atrasties tikai 5. Bet 5 nevar reizē atrasties 2 kolonnās.

b) jā, skat. 2. zīm.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
8	2	13	12	11	10	9	1	7	6	5	4	3

2. zīm.

6.4. Nē. Pēdējā maiņā būtu jāiegūst četras 1 santīma monētas, samainot vienu 4 santīmu monētu; bet tādas vispār nav.

6.5. Atbilde**:** 1; 3; 9.

Apzīmēsim mazāko izveidoto skaitli ar x; skaidrs, ka x ir viencipara skaitlis. Skaitlis x nevar būt pāra, jo tādā gadījumā augstākais 3 no pārējiem skaitļiem ir pāra, un ceturtais nedalās ar x. Skaidrs, ka $x \neq 5$, jo tad neviens no pārējiem skaitļiem nedalās ar x.

Pieņemsim, ka x = 7. Ja kādam no pārējiem skaitļiem būtu 3 vai vairāk cipari, tad kāds cits no tiem būtu viencipara, un tas nedalītos ar 7. Tātad pārējie skaitļi var būt tikai 14; 21; 28; 35; 42; 49; 56; 63; 84; 91; 98. Ciparus 3; 5; 6 satur tikai skaitļi 35; 56; 63. Noteikti jāņem divi no tiem, bet tad viens cipars atkārtojas; pretruna, tātad $x \neq 7$.

Paliek iespējas A = 1 (pārējos skaitļus sastāda patvaļīgi), A = 3 (var ņemt, piemēram ,3; 9; 18; 27; 645) un A = 9 (var ņemt, piemēram, 9; 18; 27; 36; 45).

7.1. Ja visi 5 punkti ir uz vienas taisnes, ir 0 trijstūru.

Ja uz vienas taisnes ir tikai četri punkti, tad ir 6 trijstūri.

Ja nekādi 3 punkti nav uz vienas taisnes, tad ir 10 trijstūri.

Ja 3 punkti (teiksim, A; B; C) ir uz vienas taisnes, bet citu uz vienas taisnes esošu punktu trijnieku nav, tad ir 9 trijstūri.

Ja ir 2 punktu trijnieki, kas katrs ir uz vienas taisnes (piemēram, A; B; C un A; D; E), tad ir 8 trijstūri.

Atbilde**:** 0; 6; 8; 9; 10.

7.2. Uzliekam monētas uz kausiem pa 4. Ja līdzsvara nav, ir divu dažādu masu monētas. Ja līdzsvars ir, otrajā svēršanā uzliekam uz kausiem pa 2 monētām no tām 4, kas pirmajā svēršanā atradās uz viena kausa. Ja līdzsvara nav, ir divu dažādu masu monētas. Ja līdzsvars ir, uzliekam uz kausiem pa 1 monētai no tām, kas otrajā svēršanā atradās uz viena kausa. Ja līdzsvara nav, ir divu dažādu masu monētas. Ja līdzsvars ir, visām monētām ir vienādas masas.

7.3. a) jā; piemēram, izvēlamies skaitļus no 100 līdz 200 ieskaitot.

b) nē. Apzīmēsim izvēlētos skaitļus ar $x_1 < x_2 < \ldots < x_{102}$. Apskatīsim **arī** skaitļus $x_1 + x_2$; $x_1 + x_3$; …; $x_1 + x_{102}$; pavisam mums ir 203 skaitļi. Tie visi nav mazāki par x_1 un nav lielāki par $x_1 + x_{102}$; šajā intervālā ir $(x_1 + x_{102}) - x_1 + 1 = x_{102} + 1 \le 201$ skaitlis. Tā kā 203 > 201, tad divi no apskatāmajiem skaitļiem ir vienādi savā starpā. Skaidrs, ka var būt tikai $x_i = x_1 + x_j$, no kurienes seko $x_1 = x_i - x_j$.

7.4. Meklējamo skaitli apzīmēsim ar n. Tā **iespējami** pozitīvie dalītāji (dilstošā secībā) ir $n; \frac{n}{2}; \frac{n}{3}; \frac{n}{4}; \ldots$.

Skaidrs, ka neviens no apskatāmajiem 3 dažādajiem dalītājiem nevar būt n. Ja lielākais no tiem nav $\frac{n}{2}$, tad to summa nepārsniedz $\frac{n}{3}+\frac{n}{4}+\frac{n}{5}<n$, un tā nevar būt. Tāpēc viens no 3 dalītājiem ir $\frac{n}{2}$, un abu pārējo summa ir $\frac{n}{2}$. Ja lielākais no šiem abiem pārējiem ir $\frac{n}{3}$, tad trešais ir $\frac{n}{2}-\frac{n}{3}=\frac{n}{6}$. Ja lielākais no šiem abiem pārējiem ir mazāks par $\frac{n}{3}$, tad to summa nepārsniedz $\frac{n}{4}+\frac{n}{5}<\frac{n}{2}$, un tā nevar būt.

Tāpēc vienīgā iespēja ir, ka šie dalītāji ir $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{3}$ un $\frac{n}{6}$. Lai tādi dalītāji eksistētu, nepieciešams un pietiekams, lai n dalītos ar 6.

7.5. Katra pļāpa zvanījusi vismaz 1 reizi un ne vairāk kā (n – 1) reizes; dažādu iespējamu zvanīšanu daudzumu tātad ir n – 1. Pļāpu ir n; ievērojam, ka n > n – 1. Tāpēc ir 2 pļāpas (apzīmēsim tās ar A un B), kas zvanījušas vienādu daudzumu reižu. Viena no tām zvanījusi otrai; pieņemsim, ka pļāpa A zvanījusi pļāpai B. Tad pļāpa B **nav** zvanījusi pļāpai A. Lai pļāpas A un B būtu veikušas vienādu daudzumu zvanu, ir jābūt tādai pļāpai – apzīmēsim to ar C – kam B ir zvanījusi, bet A nav zvanījusi (citādi A veikto zvanu būtu vismaz par 1 vairāk nekā B veikto zvanu). Ja A nav zvanījusi C, tad C ir zvanījusi A. Vajadzīgās 3 pļāpas ir atrastas.

8.1. $x^4+64=\left(x^2-4x+8\right)\left(x^2+4x+8\right)$.

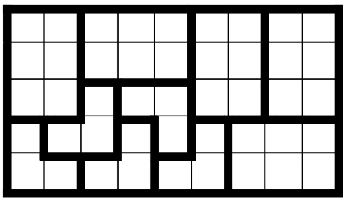
8.2. Ja a > b, uzvar Jānis. Apzīmēsim a = b + c, c > 0. Jānis sadala savu nogriezni gabalos $b+\frac{2c}{3}$, $\frac{c}{6}$, $\frac{c}{6}$. Tad daļa ar garumu $b+\frac{2c}{3}$ ir garāka par visām 5 citām daļām kopā, tāpēc tā nevar būt trijstūra mala.

Ja a ≤ b, uzvar Pēteris. Pieņemsim, ka Jāņa daļas ir x ≥ y ≥ z, x + y + z = a. Pēteris izveido daļas ar garumiem x, $\frac{b-x}{2}$, $\frac{b-x}{2}$. Tad var salikt vienādsānu trijstūri (x, x, y) un vienādsānu trijstūri ($\frac{b-x}{2}$, $\frac{b-x}{2}$, z) : ievērojam, ka x ≥ y un $\frac{b-x}{2}\geq z \Leftrightarrow b-x\geq 2z$. Pēdējā nevienādība ir pareiza, jo $b-x\geq a-x=y+z\geq 2z$.

8.3. Nē. Apskatām 4 pēc kārtas uzrakstītus skaitļus a, b, c, d. Tā kā a + b + c un b + c + d abi dalās ar 4, tad a un d jādod vienādi atlikumi, dalot ar 4. Tātad skaitļiem, kas rindā atrodas 1., 4., 7., 11., ..., 2005. vietā, jādod vienādi atlikumi, dalot ar 4; šo vietu ir 668. Bet skaitļiem no 1 līdz 2006 ieskaitot, dalot tos ar 4, atlikumi 1 un 2 ir 502 reizes, bet atlikumi 3 un 0 – 501 reizi.

8.4. a) Nē, jo 64 nedalās ar 3

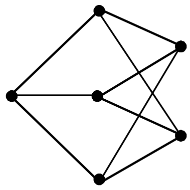
b) jā, jo kvadrātu 12×12 viegli sadalīt taisnstūros 2×3, bet katru šādu taisnstūri – divos stūrīšos.
c) jā, skat. 3. zīm.



3. zīm

8.5. To, ka kartiņa ar skaitli x ir Juliatai resp. Maijai, pierakstīsim kā x ~ j resp. x ~ m. Pēc dotā 13 ~ j. Apskatīsim jebkuru x, kur x ~ m. Ja 1 ~ j, tad $1 \cdot x \sim m$ dod pretrunu. Tāpēc 1 ~ m.
Ja 12 ~ j, tad $1+12=13 \sim j$ dod pretrunu. Tāpēc 12 ~ m.
Tā kā $6+7 \sim j$, tad 6 un 7 ir vienai un tai pašai meitenei. Ja būtu 6 ~ j un 7 ~ j, tad 1 + 6 ~ j dotu pretrunu. Tāpēc 6 ~ m un 7 ~ m.
Līdzīgi secinām, ka 3 ~ m, un 10 ~ m; 5 ~ m un 8 ~ m; 4 ~ m un 9 ~ m; 2 ~ m un 11 ~ m.
Tātad skaitļi no 1 līdz 12 ir Maijai. Tā kā 13 ~ j, tad skaitļi $13 \cdot k$ (k = 1; 2; 3; ...; 7) nav Maijai, tāpēc tie ir Juliatai. Savukārt šo skaitļu summas ar 1; 2; ...; 12 nav Juliatai, tāpēc tās ir Maijai. Tātad Juliatai ir 7 kartiņas ar skaitļiem, kuri dalās ar 13, bet Maijai ir 93 pārējās kartiņas.
(Viegli pārbaudīt, ka šis sadalījums apmierina uzdevuma prasības; pārbaude nepieciešama)

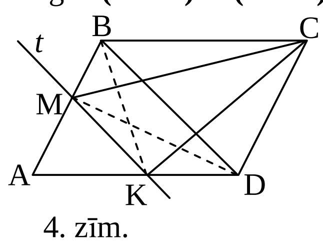
9.1. To, ka var būt 6 cilvēki, skat. 3. zīm.



3. zīm.

Pierādīsim, ka tas ir mazākais iespējamais skaits. Apzīmēsim ar A vienu cilvēku, ar B, C, D – viņa draugus. Tā kā B nevar draudzēties ne ar C, ne D, tad ir vismaz vēl divi citi cilvēki – B draugi, no kurienes seko vajadzīgais.

9.2. Tā kā ΔKDC un ΔKDB ir kopīgs pamats KD un vienādi augstumi pret šo pamatu, tad **L(KDC)=L(KDB)**. Līdzīgi **L(BMC)=L(BMD)**.



4. zīm.

Bet ΔKDB un ΔBMD ir kopīgs pamats BD un vienādi augstumi pret šo pamatu, tāpēc **L(KDB)=L(BMD)**. No šīm vienādībām seko vajadzīgais.

(Speciālajā kvadrāta gadījumā vajadzīgais seko arī, piemēram, no simetrijas dēļ spēkā esošās vienādības ΔBMC=ΔDKC.)

9.3. Pārrakstām sistēmu formā

$$\begin{cases}[x]+\{y\}=[z]+\{z\}\\ [y]+\{z\}=[x]+\{x\}\\ [z]+\{x\}=[y]+\{y\}\end{cases}$$

Tā kā skaitlis viennozīmīgi nosaka savu veselo daļu un daļveida daļu, tad no šejienes seko $[x]=[y]=[z]$ un $\{x\}=\{y\}=\{z\}$, tātad $x=y=z$. No otras puses, skaidrs, ka jebkurš vienādu skaitļu trijnieks $(a;a;a)$ der par atrisinājumu.

9.4. No uzdevumā dotajām pēdējām 4 prasībām seko, ka $2x$-5 dalās ar 5; ar 7; ar 9; ar 11 (piemēram, $2x-5=2(x+1)-7$ dalās ar 7 utml.). Tā kā 5; 7; 9; 11 pa pāriem ir savstarpēji pirmskaitļi, tad $2x$-5 dalās ar $5\cdot7\cdot9\cdot11=3465$. Tā kā $1\le x\le2006$, tad $-3\le2x-5\le4007$. Šajās robežās ar 3465 dalās tikai 0 un 3465. Bet $2x-5=0$ naturālam x nav iespējams, tāpēc $2x-5=3465$ un $\boldsymbol{x=1735}$**.**

9.5. Uzvar Gunārs.

Tā kā pēdējais (uzvarošais) gājiens tiek izdarīts vai nu no pozīcijas 500, vai no pozīcijas 999, tad zaudē tas, kurš uzraksta vienu no šiem skaitļiem. Pieņemsim, ka zaudētājs uzraksta 500. Tas tiek darīts tāpēc, ka citu iespēju (izņemot varbūt rakstīt 999) viņam nav. Tas nozīmē, ka visi skaitļi 1; 2; 3; ...; 499 jau ir uzrakstīti (citādi varētu rakstīt mazāko vēl neuzrakstīto no tiem) un tātad arī divas reizes lielākie skaitļi 502; 504; ... 998 ir uzrakstīti; no tā savukārt seko, ka arī 503; 505; ...; 997 ir jau uzrakstīti. Savukārt 999 vēl nav uzrakstīts (citādi spēle būtu beigusies jau ātrāk) un arī 501 vēl nav uzrakstīts (citādi jau iepriekš būtu uzrakstīts 500, un spēle būtu beigusies ātrāk). Tātad brīdī, kad zaudētājs uzrakstījis 500, uz tāfeles atrodas 997 skaitļi (ieskaitot 500). Tāpēc skaitli 500 uzraksta sācējs, proti, Dzintars. Tāpēc viņš zaudē.

Gadījumu, ja „zaudējošais gājiens” ir 999 uzrakstīšana, analizē līdzīgi.

10.1. Visiem cipariem, izņemot pirmo, jābūt 1; 3; 7; 9. No šiem cipariem var sastādīt 10 pirmskaitļus 11; 13; 17; 19; 31; 37; 71; ; 73; 79; 97. Tātad visi tie būs atrodami meklējamā skaitlī, un vienpadsmitais pirmskaitlis būs tas, kas sāksies ar skaitļa pirmo ciparu.

Ar 1 sākas 4 pirmskaitļi, bet beidzas 3; tāpēc 1 ir meklējamā skaitļa otrais cipars. Vislielākais iespējamais pirmais cipars ir 6 (jo 71 būs sastopams tālāk, bet 81 un 91 nav pirmskaitļi).

Ar 9 sākas sākas 1 pirmskaitlis, bet beidzas 2; tāpēc 9 ir meklējamā skaitļa pēdējais cipars. Aiz otrā cipara lielākie iespējamie rakstāmi cipari 9 un 7. Tātad skaitlis jāmeklē formā

$$6197abcdefg9.$$

Citu devītnieku skaitlī nevar būt (aiz tiem neko nevar uzrakstīt). Tāpēc $g=7$. Izvēloties a un b iespējami lielus, iegūstam

$$619737cdef79.$$

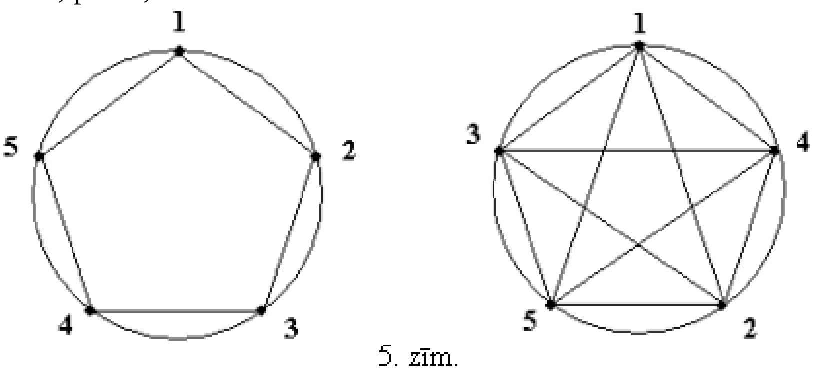
Tā kā $c\neq9$ un $c\neq3$ (73 jau sastopams agrāk), tad $c=1$. Iegūstam formu

$$6197371def79.$$

Tā kā $d\neq7$ (aiz d nebūtu ko rakstīt), liekam iespējami lielāko vērtību d=3. Atliek e=f=1 (lai parādītos pirmskaitlis11).

Atbilde: **619737131179**.

10.2. a) nē. Skat., piem., 5. zīm.



5. zīm.

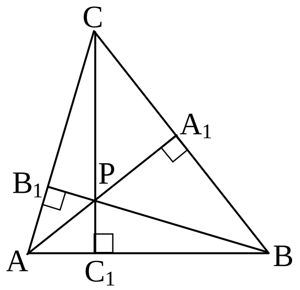
b) jā. Apvelkam ap abiem 2006-stūriem riņķa līnijas. Ja eksistē kaut viens skaitļu pāris, kas abos 2006-stūros ir diametra galapunktos, tad par trešajām virsotnēm var ņemt jebkuras ar vienādiem numuriem – abi trijstūri būs taisnleņķa.

Ja tāda pāra nav, tad ņemam divus skaitļus, kas pirmajā 2006-stūrī ir pretējās virsotnēs (pieņemsim, tie ir x un y). Pieņemsim, ka skaitlis z otrā 2006-stūrī ir pretējā virsotnē skaitlim x. Tad skaitļi x, y, z ir meklējamie: abi ar tiem sanumurētie trijstūri ir taisnleņķa.

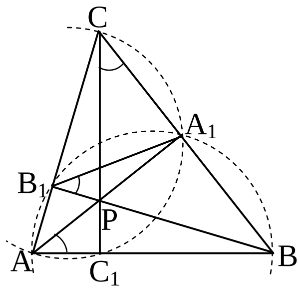
10.3. Varam pieņemt, ka a ir mazākais no skaitļiem a; b; c. Tad $\frac{a}{bc+1} \le \frac{a}{a^2+1}$.

Nevienādība $\frac{a}{a^2+1} \le \frac{1}{2}$ ir pareiza, jo $(a-1)^2 \ge 0 \Rightarrow a^2+1 \ge 2a$.

10.4. Ja P ir ΔABC augstumu krustpunkts, tad (6. zīm.)



6. zīm.



7. zīm.

$\angle AB_1B=\angle AA_1B$ (un tātad A, B, A_1, B_1 ir uz vienas riņķa līnijas) un $\angle AC_1C=\angle AA_1C$ (un tātad A, C, A_1, C_1 ir uz vienas riņķa līnijas). No otras puses, ja uzdevumā minētās divas riņķa līnijas eksistē, tad (7. zīm.) ievilktu leņķu īpašības dēļ $\angle A_1CC_1=\angle A_1AB=\angle A_1B_1P$. No šejienes seko, ka B_1, C, A_1, P ir uz vienas riņķa līnijas un tātad $\boldsymbol{\angle CA_1P+\angle CB_1P=180^\circ}$. No tā, ka A, B_1, A_1, B ir uz vienas riņķa līnijas, seko, ka $\angle AB_1B=\angle AA_1B$ un tātad $\boldsymbol{\angle CB_1P=\angle CA_1P}$. No abām izceltajām vienādībām seko, ka $\angle CB_1P=\angle CA_1P=90^\circ$, t.i., P ir ΔABC augstumu krustpunkts.

10.5. Salīdzinām divas monētas A un B. Pastāv divas iespējas.

1. A un B ir dažādas masas. Tad viena no tām ir viltota, otra – īsta. Sadalām atlikušās 2004 monētas 1002 pāros un katru no tiem salīdzinām ar pāri (A, B).

Katrā svēršanā mēs noskaidrosim, cik viltoto monētu ir konkrētajā pārī. Pavisam tiks izmantotas 1 + 1002 = 1003 svēršanas.

2. A un B ir vienādas masas. Kā iepriekš salīdzinām pāri (A, B) ar citiem monētu pāriem, kamēr atrodam pāri (C, D), kura masa atšķiras no (A, B) masas. Pieņemsim, ka (C, D) kopējā masa ir mazāka nekā (A, B) kopējā masa (otrs gadījums ir „simetrisks”). Tad A un B, kā arī visas citas līdz šim svērtās monētas ir īstas. Salīdzinām C un D. Rezultātā mēs atrodam vismaz vienu monētu no pāra (C, D), kura ir viltota. Tagad izveidojam pāri (īsta monēta, viltota monēta) un turpinām kā 1. gadījumā. Pavisam tiks izmantotas 1 + 1002 + 1 = 1004 svēršanas.

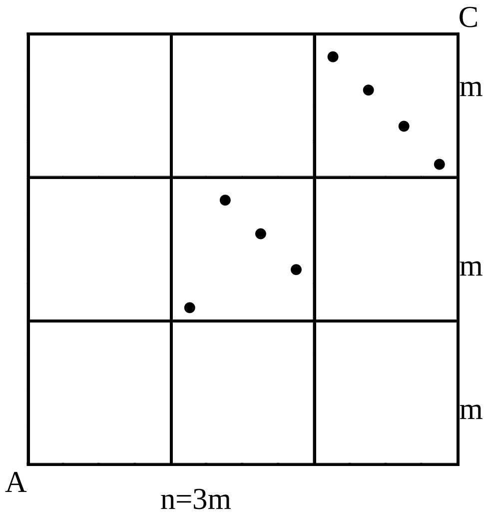
11.1. Apzīmēsim apskatāmos skaitļus ar n; n + 1; n + 2; n + 3; n + 4; n + 5. Ja n (un tātad arī n + 5) nedalās ar 5, tad tieši viens no apskatāmajiem skaitļiem dalās ar 5. Ja n dalās ar 5, tad neviens no skaitļiem n + 1; n + 2; n + 3; n + 4 nedalās ar 5; divi no tiem (to starpība ir 2) nedalās ar 2; vismaz viens no šiem abiem nedalās ar 3. Šis skaitlis tāpēc dalās ar kādu pirmskaitli p, p > 5; tātad $p \geq 7$. Bet no 6 pēc kārtas ņemtiem skaitļiem tikai viens var dalīties ar p, ja p > 6.

11.2. Atbilde**:** vajag vismaz $k = \left\lceil \frac{2n-1}{3} \right\rceil$ lēdijas, un ar šo daudzumu pietiek.

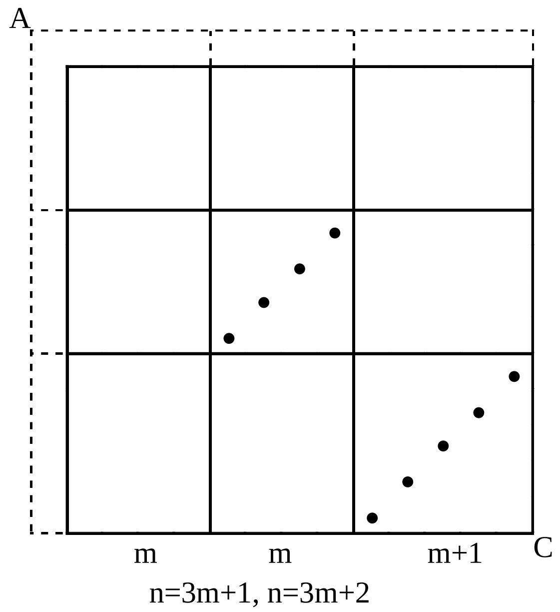
(Tātad 2m, ja n=3m;
2m+1, ja n=3m+1;
2m+1, ja n=3m+2.)

Atrisinājums: Pieņemsim, ka ir k lēdijas, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. Tad ir vismaz n-k rindas (kolonnas) bez lēdijām.

Pieņemsim, ka augšējā "bezlēdiju" rindā r_1, r_2, ..., r_{n-k} ir rūtiņas, kuru kolonnās nav lēdiju, un labējā "bezlēdiju" kolonnā R_1, R_2, ..., R_{n-k} ir rūtiņas, kuru rindās nav lēdiju (ievērojam: **viena** r_i sakrīt ar **vienu** R_j). Tad ir vismaz 2(n-k)-1 šādas rūtiņas uz dažādām diagonālēm, kas paralēlas AC. Tāpēc jābūt $k \geq 2(n-k)$, $3k \geq 2n-1$, $k \geq \frac{2n-1}{3}$.



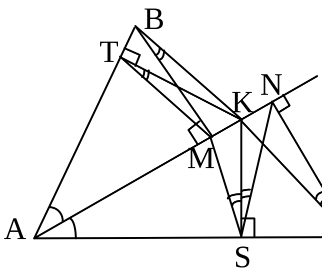
8.zīm.



9.zīm.

11.3. Novelkam perpendikulu KT pret AB. Tā kā $\angle BTK = \angle BMK$, tad ap BTMK var apvilkt riņķa līniju. Tāpēc $\angle KBM = \angle KTM$. Simetrijas pēc (attiecībā pret AM) $\angle KTM = \angle KSM$, tāpēc $\angle KBM = \angle KSM$.

Tā kā BM || CN, tad $\angle KBM = \angle KCN$. Tā kā ap CNKS var apvilkt riņķa līniju (pretējo leņķu summa ir 180^0), tad $\angle NCK = \angle NSK$. No šejienes seko vajadzīgais (skat. 10. zīm.).



10. zīm.

11.4. a) pieņemsim, ka $0 \le x < y < 1$. No dotā $f(y) - 3y > f(x) - 3x$,

tāpēc $f(y) - f(x) \ge 3(y - x)$. Tā kā 0 < x + y + 1 < 3, tad $f(y) - f(x) \ge (x + y + 1)(y - x)$ jeb $f(y) - f(x) \ge xy - x^2 + y^2 - yx + y - x$, jeb $f(y) - y^2 - y \ge f(x) - x^2 - x$, k.b.j.

b) pieņemsim, ka $1 \le x < y$. Tad no dotā $f(y) - y^3 > f(x) - x^3$, tāpēc $f(y) - f(x) > (y - x)(y^2 + xy + x^2)$.

Tā kā $y^2 + xy + x^2 > y + x + 1$, tad $f(y) - f(x) > (x + y + 1)(y - x)$, no kurienes kā a) gadījumā seko vajadzīgais.

Ja $f(x) - x^2 - x$ ir augoša apgabalos [0; 1] un $[1; \infty)$, tad tā ir augoša arī apgabalā $[0; \infty)$

11.5. Tā kā visi trīs skaitļi nav dažādi, apzīmēsim tos ar x; x; y (varbūt x = y). Reizinājums $x \cdot x \cdot y = x^2 y$ ir vesela skaitļa kvadrāts tad un tikai tad, ja y ir vesela skaitļa kvadrāts. Tātad viens no šiem skaitļiem ir 4, un abi pārējie ir savā starpā vienādi.

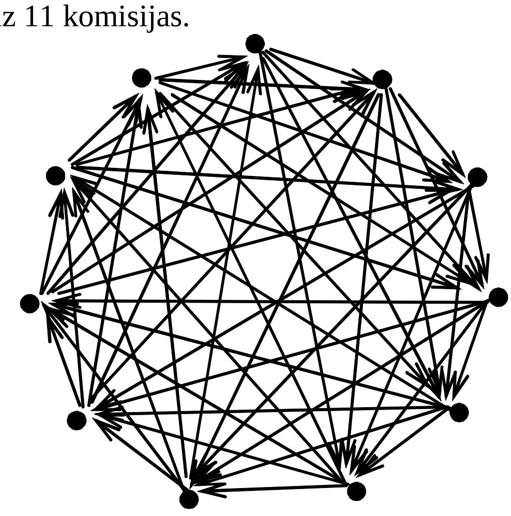
Ja **visi** skaitļi ir 4, tad katrs zēns redz divus četriniekus. Tā kā katrs zina, ka 4 ir lietots vai nu vienu, vai trīs reizes, tad katrs secina, ka viņam uz pieres ir skaitlis 4. Ja visi skaitļi nav 4, tad viens zēns redz divus vienādus skaitļus, kas nav 4; tāpēc viņš secina, ka viņam uz pieres ir 4. Katrs no abiem pārējiem redz skaitļus 4 un $x \neq 4$, tāpēc no iepriekšējā secina, ka viņam uz pieres ir x (x ir viens no skaitļiem2; 3; 5; 6; ;7; 8).

12.1. Apskatāmo krustpunktu abscisas ir vienādojuma $x^4 - 2x^2 + 7 = ax + b$ saknes (ja $y = ax + b$ ir novilktās taisnes vienādojums; skaidrs, ka taisne **nav** perpendikulāra Ox asij, jo tad tā krustotu grafiku vienā punktā; tāpēc tās vienādojums ir formā $y = ax + b$). Šo vienādojumu var pierakstīt formā

$$x^4 + 0 \cdot x^3 - 2x^2 - ax + (7 - b) = 0$$

Apzīmējot krustpunktu abscisas ar x_1; x_2; x_3; x_4, no Bezū teorēmas seko, ka kreisā puse identiski vienāda ar $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$. Pielīdzinot koeficientus pie x^3, iegūstam vajadzīgo.

12.2. **a)** Var gadīties, ka ir 11 deputāti, kuru „aizspriedumu struktūra" attēlota 11. zīm. (zīmējumā no katra punkta iziet bultiņas uz 5 tam sekojošiem punktiem pulksteņrādītāja kustības virzienā). Nekādus divus no tiem nevar iekļaut vienā komisijā. Tātad var gadīties, ka nepieciešamas vismaz 11 komisijas.



11. zīm.

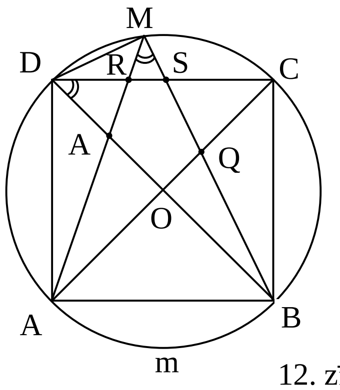
b) Parādīsim, ka ar 11 komisijām vienmēr pietiek. Pierādīsim to ar matemātisko indukciju patvaļīgam deputātu skaitam n. Pie n = 1; 2; ...; 11 tas ir acīmredzams (katrā komisijā iekļauj vienu deputātu).

Pieņemsim, ka apgalvojums ir pareizs pie n = 1; 2; 3; ...; m – 1, kur m≥12. Apskatīsim m deputātus. Ja katru no šiem deputātiem „ienīst" vairāk nekā 5 citi, tad kopējais „ienaidu" skaits ir lielāks par 5m, tā ir pretruna, jo katram deputātam ir aizspriedumi pret augstākais 5 citiem, tāpēc „ienaidu" nav vairāk par 5m.

Tāpēc eksistē deputāts A, pret kuru aizspriedumu nav vairāk kā 5 citiem. Apskatīsim visus m-1 deputātus, izņemot A. Saskaņā ar induktīvo hipotēzi tos var sadalīt 11 komisijās vajadzīgā veidā. Deputāts A ir „nepieņemams" ne vairāk kā 10 no tām (jo ir ≤ 5 deputāti, kam ir aizspriedumi pret viņu, un ir ≤ 5 deputāti, pret kuriem viņam ir aizspriedumi). Tātad A var pievienot vismaz 1 komisijai. Induktīvā pāreja izdarīta.

12.3. Pārbaude parāda, ka der p = 2; 3; 5 un neder p = 7; p = 11. Pieņemsim, ka $p > 11$. Ja $p = 3k + 1$, tad $p^2 = 9k^2 + 6k + 1$; ja $p = 3k + 2$, tad $p^2 = 9k^2 + 12k + 4$. Tātad $p^2 + 11$ dalās ar 3. Bez tam p ir nepāra skaitlis, $p = 2q + 1$; tāpēc $p^2 + 11 = 4q^2 + 4q + 12$ dalās ar 4. Tāpēc $p^2 + 11 = 12a$, kur $a \geq 12$ (jo $p^2 + 11 > 11^2 + 11 = 12 \cdot 11$). Šim skaitlim ir vismaz 11 dažādi dalītāji 1; 2; 3; 4; 6; 12; 2a; 3a; 4a; 6a; 12a. Tātad šie p neapmierina uzdevuma prasības.

12.4.



12. zīm.

Tā kā $\angle PMS = \frac{1}{2} \cup AmB = 45^o = \angle PDS$, tad ap PDMS var apvilkt riņķa līniju. Tā kā $\angle DMS = 90^o$ (balstās uz 180^o „lielajā" riņķa līnijā), tad arī $\angle DPS = 90^o$. Tāpēc **$PS \perp BD$.** Līdzīgi pierāda, ka **$RQ \perp AC$.** No izceltajiem faktiem seko vajadzīgais, jo $BD \perp AC$.

12.5. Atbilde: $n = 2^k$, k = 0; 1; 2; … .

Risinājums. Ja k = 0, tad n = 1; vienīgā spuldze tiek ieslēgta, un tālāk nekas netiek darīts. Pie $n = 2^k$, $k \in N$, katram no dalītājiem d= 2; 4; 8; …; 2^{k-1}; 2^k atbilstošā maiņu sērija skar katru spuldzi 0 vai d reizes (tātad kopumā neietekmē tās stāvokli), kamēr dalītājam 1 atbilstošā sērija maina katras spuldzes stāvokli 1 reizi. Tāpēc beigās visas spuldzes būs ieslēgtas.

Ja turpretī skaitlim n ir kāds nepāra pirmskaitlis p, ar kuru n dalās, tad (p+1)-ā spuldze (uzskatot S par pirmo spuldzi) tiks „aizskārta" tieši divas reizes (sērijās, kas atbilst n dalītājiem 1 un p) un tāpēc beigās paliks izslēgta.

Īsi norādījumi vērtēšanai

5.1. Par atbildi bez pamatojuma, ka tā ir vienīgā – 5 punkti.

5.2. Par uzrādītu īsāko gājienu virkni bez pamatojuma, ka tā tiešām ir īsākā – 5 punkti.

5.3. Par katru daļu – 5 punkti. Ja kādā daļā ir kaut viena neprecizitāte, tad šai daļā augstākais 1 punkts.

5.4. Piemērs – 5 punkti

5.5. Par nepilnu risinājumu ne vairāk kā 4 punkti

6.1. Par nepilnīgu pamatojumu – ne vairāk kā 6 punktus. Atbilde un nekas cits – 1 punkts.

6.2. Par nepilnīgu risinājumu – ne vairāk kā 6 punktus. Par piemēriem (un neko citu) – augstākais 2 punkti.

6.3. Par katru daļu – 5 punkti.

6.5. Par piemēriem ar 1; 3; 9 – 1 punkts par katru.

7.1. Par katras iespējas uzrādīšanu – 1 punkts. Par spriedumu, ka citu nav – atlikušie 5 punkti.

7.2. Par nepareizu algoritmu (t.i., tādu, kas dažreiz var dot aplamus rezultātus) – līdz 3 punktiem.

7.3. Par katru daļu – 5 punkti.

7.4. Par atbildi (skaitļi 6n, $n \in N$) – 4 punkti.

7.5. Par piemēriem – līdz 2 punktiem.

8.1. Ja atbilde nav pareiza, ne vairāk kā 3 punktus.

8.2. Par spriedumu, kas aptver vienu no abām principālajām iespējām – līdz 5 punktiem.

8.4. Par a) daļu 2 punkti, par b) daļu 3 punkti, par c) daļu 5 punkti.

8.5. Par piemēra uzrādīšanu bez pierādījuma, ka tas ir vienīgais – 5 punkti.

9.1. Par piemēru bez pamatojuma, ka tas ir minimālais - 3 punkti.

9.2. Par speciālgadījuma apskatīšanu - līdz 4 punktiem.

9.3. Par atbildi - 2 punkti.

9.4. Par atbildi - 3 punkti.

9.5. Par atbildi, kuru „pamato” vienas partijas piemērs - 2 punkti.

10.1. Par atbildi bez pamatojuma, ka tā ir maksimālā - 6 punkti.

10.2. Par katru daļu 5 punkti.

10.4. Par „vieglo” daļu - 3 punkti.

10.5. Par atsevišķu piemēru izanalizēšanu - līdz 3 punktiem.

11.2. Par „apakšējo robežu” - 4 punkti. Par katru piemēru - pa 2 punktiem.

11.4. Par a) daļu - 5 punkti, par b) daļu - 4 punkti, par rezultējošo slēdzienu - 1 punkts.

11.5. Par atsevišķu piemēru analīzi - līdz 3 punktiem.

12.1. Par atsevišķu piemēru analīzi - līdz 3 punktiem.

12.2. Par katru daļu - 5 punkti.

12.3. Par atbilžu uzrādīšanu - 4 punkti.

12.5. Par katru daļu - 5 punkti.

Labu veiksmi Jums un Jūsu skolēniem!

A.Liepas NMS