LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 56. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

5. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. No četrciparu skaitļa A atņemot trīsciparu skaitli B, iegūst 8002. Šos pašus skaitļus A un B saskaitot, iegūst piecciparu skaitli. Atrast A un B.

2. Uz tāfeles uzrakstīta burtu virkne **a b a b a b a b a b a**. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuru daudzumu pēc kārtas uzrakstītu burtu, nodzēst tos un atbrīvotajā vietā uzrakstīt šos pašus burtus apgrieztā secībā (piemēram, abb var aizstāt ar bba).
Ar kādu mazāko daudzumu gājienu, izpildot tos vienu pēc otra, var uz tāfeles iegūt virkni **a a a a a a b b b b b**?

3. Parādīt, ka trijstūri var sagriezt a) četros, b) sešos trijstūros tā, ka neviena griežot iegūtā trijstūra mala pilnībā nesakrīt ne ar vienu citu griežot iegūtā trijstūra malu.

4. Uz katras no n kartiņām uzrakstīts pa naturālam skaitlim (starp tiem var būt arī vienādi). Zināms, ka vienlaicīgi izpildās šādas īpašības:
- starp uzrakstītajiem skaitļiem ir vismaz 5 dažādi,
- katrām divām kartiņām (apzīmēsim tās ar A un B) var atrast divas citas kartiņas (apzīmēsim tās ar C un D) tā, ka to skaitļu summa, kas uzrakstīti uz A un B, vienāda ar to skaitļu summu, kas uzrakstīti uz C un D.

Pierādiet, ka mazākā iespējamā n vērtība ir 13.

5. Kādā kolbā atrodas pa 10 baltām, sarkanām un zaļām amēbām. Ja satiekas tieši divas dažādu krāsu amēbas, tad tās saplūst un no tām izveidojas viena trešās krāsas amēba. Vai var gadīties, ka traukā paliek tikai viena amēba?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 56. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

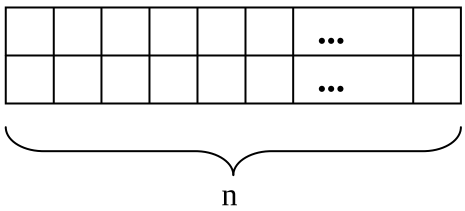
6. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Vai var uz taisnes izvietot 5 punktus A, B, C, D, E (varbūt citādā kārtībā) tā, ka AB=1, BC=3, CD=5, DE=7, EA=9?

2. Ap galdu sēž 7 cilvēki. Katriem trim pie galda sēdošiem cilvēkiem var atrast tādu pie galda sēdošu cilvēku, kurš pazīst tos visus trīs. Pierādīt: pie galda ir tāds cilvēks, kurš pazīst visus pārējos ap galdu sēdošos.
(Piezīme: ja A pazīst B, tad arī B pazīst A.)

3. Tabulā ir divas rindas un n kolonnas (skat. 1.zīm.)



1.zīm.

Katrā rindā jāieraksta visi naturālie skaitļi no 1 līdz n ieskaitot (katrs vienu reizi) tā, lai katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa būtu **kaut kāda** naturāla skaitļa reizinājums pašam ar sevi. Vai to var izdarīt, ja a) n=11, b) n=13 ?

4. Kādā valstī lieto 1; 2; 3; 5; 8; 10; 15; 20; 25; 29; 43; 50; 60; 68; 75; 100 santīmu monētas. Naudas automāts samaina jebkuru vienu monētu pret jebkurām 4 monētām (pēc mūsu izvēles) ar tādu pašu kopējo vērtību kā maināmajai monētai. Vai var ar šī automāta palīdzību samainīt vienu 100 santīmu monētu 100 viena santīma monētās?

5. No 9 dažādiem nenulles cipariem, katru izmantojot tieši vienu reizi, izveidoti 5 naturāli skaitļi. Mazākais no tiem ir visu četru pārējo skaitļu dalītājs. Kāds var būt šis mazākais skaitlis?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 56. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

7. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Plaknē atzīmēti 5 punkti. Cik var būt trijstūru, kam visas virsotnes atrodas šajos punktos?

2. Dotas 8 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Ir zināms, ka vai nu visām tām masas ir vienādas, vai arī 4 monētām ir viena masa, bet 4 monētām – cita masa. Kā ar 3 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem var noskaidrot, kura no iespējām pastāv īstenībā?

3. Apskatām visus naturālos skaitļus no 1 līdz 200 ieskaitot.

a) vai no tiem var izvēlēties 101 skaitli tā, lai neviens izvēlētais skaitlis nebūtu divu citu izvēlēto skaitļu starpība?

b) vai tā var izvēlēties 102 skaitļus?

4. Kuri naturālie skaitļi ir vienādi ar trīs savu dažādu pozitīvu dalītāju summu ?

5. Kādā ciemā dzīvo n pļāpas; katrai mājās ir telefons. Šodien katra pļāpa piezvanīja vismaz vienai citai. Starp katrām divām pļāpām notika tieši viena saruna. Pierādīt: var atrast trīs tādas pļāpas A, B un C, ka A piezvanīja B, B piezvanīja C un C piezvanīja A.

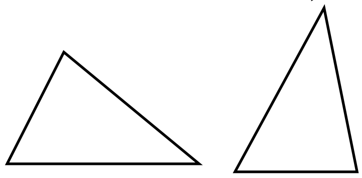
LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 56. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

8. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Ir zināms, ka visiem x pastāv vienādība $x^4+64=(x^2-4x+8)\cdot A$, kur A ir izteiksme, kas izveidota no x un naturāliem skaitļiem ar saskaitīšanas, atņemšanas un reizināšanas operāciju palīdzību. Atrast A.

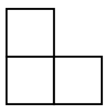
2. Jānis sadala *a* metrus garu nogriezni 3 mazākos nogriežņos; pēc tam Pēteris sadala *b* metrus garu nogriezni 3 mazākos nogriežņos. Pēteris grib, lai no iegūtajiem 6 nogriežņiem varētu vienlaicīgi salikt divu trijstūru kontūras, skat. 2.zīm.; Jānis cenšas to nepieļaut. Kurš no zēniem var sasniegt savu mērķi? (Atbilde **varbūt** ir atkarīga no *a* un *b* vērtībām.)



2. zīm.

3. Vai var izrakstīt rindā visus naturālos skaitļus no 1 līdz 2006 ieskaitot katru vienu reizi tā, lai katru 3 pēc kārtas uzrakstīto skaitļu summa dalītos ar 4?

4. Par stūrīti sauc no 3 vienādiem kvadrātiem sastāvošu figūru, kas redzama 3.zīm. Kvadrāta malas garums ir 1.



3.zīm.

Vai taisnstūri ar izmēriem a) 8x8, b) 12x12, c) 5x9 var sagriezt stūrīšos?

5. Uz katras no 100 kartiņām ir pa naturālam skaitlim no 1 līdz 100 ieskaitot (visi skaitļi uz kartiņām ir dažādi). Daļa kartiņu ir Juliatai, pārējās – Maijai. Zināms: ja paņem pa vienai kartiņai no katras meitenes, tad uz tām uzrakstīto skaitļu summa nav ne uz vienas Juliatas kartiņas, bet uz tām uzrakstīto skaitļu reizinājums nav ne uz vienas Maijas kartiņas. Maijai nav kartiņas ar skaitli 13. Cik kartiņu ir Maijai?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 56. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Kādā kolektīvā katram cilvēkam ir tieši 3 draugi (ja A ir B draugs, tad arī B ir A draugs). Nav tādu triju cilvēku, kas visi savā starpā draudzētos. Kāds ir mazākais iespējamais cilvēku skaits šajā kolektīvā?

2. Dots, ka ABCD – paralelograms. Taisne t ir paralēla diagonālei BD un krusto malu AB punktā M, bet malu AD – punktā K. Pierādīt, ka trijstūru BMC un KCD laukumi ir vienādi.
Ja nevarat atrisināt uzdevumu vispārīgajā gadījumā, apskatiet gadījumu, kad ABCD – kvadrāts (protams, iegūto punktu skaits tad būs mazāks).

3. Ja a - reāls skaitlis, tad ar [a] apzīmē lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz a (skaitļa a veselo daļu). Piemēram, [4,8]=4; [-3,3]=-4; [5]=5.
Savukārt pēc definīcijas $\{a\}=a-[a]$ (skaitļa a daļveida daļa). Piemēram, $\{4,8\}=0,8$; $\{-3,3\}=0,7$; $\{5\}=0$.
Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} [x]+\{y\}=z \\ [y]+\{z\}=x \\ [z]+\{x\}=y \end{cases}$$

4. Kuri naturālie skaitļi x apmierina vienlaicīgi visas sekojošās prasības:
- $x \leq 2006$,
- x dalās ar 5,
- x+1 dalās ar 7,
- x+2 dalās ar 9,
- x+3 dalās ar 11 ?

5. Gunārs un Dzintars pamīšus raksta uz tāfeles pa vienam naturālam skaitlim, kas nepārsniedz 1000. Sāk Dzintars, uzrakstot skaitli 1. Neviens jau uzrakstīts skaitlis netiek nodzēsts; nevienu skaitli nedrīkst rakstīt otrreiz.
Ja kaut kāds skaitlis x jau ir uz tāfeles, tad ar kārtējo gājienu drīkst uzrakstīt vai nu x+1, vai 2x (ja izvēlētais rakstāmais skaitlis nepārsniedz 1000). Tas, kurš uzraksta 1000, uzvar. Kurš no zēniem uzvar, pareizi spēlējot?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 56. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Atrodiet lielāko 12-ciparu skaitli ar īpašību: katri divi blakus uzrakstīti cipari veido pirmskaitli, un visi šie 11 pirmskaitļi ir dažādi.

2. Katram no diviem vienādiem regulāriem n-stūriem virsotnes kaut kādā kārtībā sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz n (katrā n-stūrī visi numuri ir dažādi).

Noskaidrojiet, vai noteikti katrā n-stūrī var izvēlēties 3 virsotnes tā, ka vienlaicīgi izpildās sekojošas īpašības:

- abos n-stūros izvēlētas virsotnes ar vieniem un tiem pašiem numuriem,
- pirmajā n-stūrī izvēlēto virsotņu veidotais trijstūris un otrajā n-stūrī izvēlēto virsotņu veidotais trijstūris abi ir viena tipa: vai nu abi ir šaurleņķu, vai abi taisnleņķa, vai abi platleņķa.

Atbildiet uz šo jautājumu, ja a) n = 5; b) n = 2006.

3. Dots, ka a, b un c – pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem $\frac{a}{bc+1}$, $\frac{b}{ac+1}$, $\frac{c}{ab+1}$ nepārsniedz $\frac{1}{2}$.

4. Šaurleņķu trijstūra ABC iekšpusē atrodas punkts P. Stari AP, BP, CP krusto attiecīgi malas BC ,AC, AB attiecīgi punktos A_1, B_1, C_1. Pierādīt: ap abiem četrstūriem ABA_1B_1 un ACA_1C_1 var apvilkt riņķa līnijas tad un tikai tad, ja P ir ΔABC augstumu krustpunkts.

5. Ir 2006 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Dažas (vismaz viena) ir īstas un dažas (vismaz viena) ir viltotas. Visām īstajām monētām ir vienādas masas; arī visām viltotajām monētām ir vienādas masas. Viltotās monētas ir vieglākas par īstajām. Kā, izmantojot sviras svarus bez atsvariem, ar 1004 svēršanām noskaidrot, cik ir viltoto monētu?

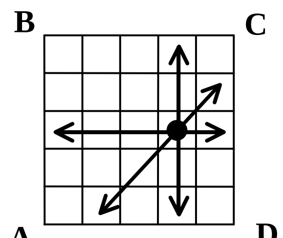
LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 56. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Doti 6 viens otram sekojoši naturāli skaitļi. Pierādīt: eksistē pirmskaitlis, ar kuru dalās tieši viens no šiem skaitļiem.

2. Kvadrāts ABCD sastāv no $n \times n$ vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Par "lēdiju" sauc figūru, kas var atrasties jebkurā rūtiņā; tā apdraud visas tās rūtiņas, kas atrodas ar to vienā horizontālē, vienā vertikālē un vienā "diagonālē", kura paralēla AC (skat. 1.zīm.)



1. zīm.

Kādu mazāko lēdiju skaitu var novietot kvadrātā, lai visas neaizņemtās rūtiņas būtu apdraudētas?

3. Stars t ir ΔABC leņķa A bisektrise. Tā krusto malu BC punktā K. Punkti M un N ir to perpendikulu pamati, kas no B un C vilkti pret t (M un N nesakrīt). Tā perpendikula pamats, kas no K vilkts pret AC, ir S. Pierādīt, ka $\angle MSK = \angle NSK$.

4. Funkcija f(x) definēta visiem $x \geq 0$. Ir zināms, ka funkcijas $f(x) - x^3$ un $f(x) - 3x$ ir augošas visā definīcijas apgabalā. Pierādīt, ka funkcija $f(x) - x^2 - x$ ir augoša

a) segmentā [0; 1],

b) visā definīcijas apgabalā.

5. Andrim, Dzintaram un Gunāram ir liels daudzums zīmīšu. Uz katras zīmītes ir uzrakstīts viens no skaitļiem 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Maija uzlīmēja katram no viņiem uz pieres pa vienai zīmītei. Katrs zēns redz zīmītes uz abu draugu pierēm, bet neredz zīmīti uz savas pieres. Maija, visiem dzirdot, paziņoja: „Ne visi skaitļi uz jūsu pierēm ir dažādi. Visu triju skaitļu reizinājums ir vesela skaitļa kvadrāts."

Vai zēni nesarunājoties var noskaidrot, kādi skaitļi ir uz viņu pierēm?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 56. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

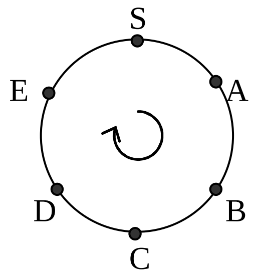
1. Koordinātu plaknē uzzīmēts funkcijas $y = x^4 - 2x^2 + 7$ grafiks un taisne, kas krusto šo grafiku 4 dažādos punktos. Pierādīt, ka krustpunktu abscisu summa ir 0.

2. Parlamentā ir 100 deputātu. Ir zināms, ka nevienam deputātam nav aizspriedumu pret vairāk nekā 5 citiem deputātiem. (Ja A ir aizspriedumi pret B, tad B var arī nebūt aizspriedumu pret A.)
Kāds ir mazākais komisiju skaits, kurās noteikti var sadalīt jebkura šāda parlamenta deputātus (katram deputātam jāpiedalās vismaz vienā komisijā) tā, ka nevienā komisijā nevienam deputātam nav aizspriedumu ne pret vienu citu?

3. Kuriem pirmskaitļiem p piemīt īpašība: skaitlim $p^2 + 11$ ir mazāk nekā 11 naturālu dalītāju?

4. Riņķa līnijā ievilkts kvadrāts ABCD. Punkts M atrodas uz mazākā no lokiem CD un nesakrīt ne ar C, ne ar D. Taisne AM krusto taisnes BD un CD attiecīgi punktos P un R. Taisne BM krusto taisnes AC un DC attiecīgi punktos Q un S. Pierādiet, ka $PS \perp QR$.

5. Pa apli izvietotas n spuldzes; sākotnēji tās visas ir izslēgtas. Viena spuldze apzīmēta ar S. Atrodam visus skaitļa n pozitīvos dalītājus, ieskaitot 1 un n. **Katram** šādam dalītājam d veicam sekojošu operāciju: maināstory katras d-tās spuldzes stāvokli (sākot ar spuldzi S), pavisam izdarot n maiņas. (Piemēram, ja 2. zīm attēlotajā situācijā pie $n = 6$ ņemts dalītājs $d = 3$, tad pakāpeniski mainīsim spuldžu S; C; S; C; S; C stāvokļus.)



2. zīm.

Kurām n vērtībām, beidzot šīs darbības, visas spuldzes būs ieslēgtas?