LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 57. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

5. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Vai no taisnstūrveida papīra strēmelītēm ar izmēriem 1cm x 1 cm, 1cm x 2 cm, 1 cm x 3 cm, ... , 1 cm x 2007 cm, izmantojot katru no tām tieši vienā eksemplārā, var salikt taisnstūri? Strēmelītes nedrīkst pārklāties.

2. Uz katras no n kartiņām uzrakstīts pa naturālam skaitlim (starp tiem var būt arī vienādi). Zināms, ka vienlaicīgi izpildās šādas īpašības:

- starp uzrakstītajiem skaitļiem ir vismaz 5 dažādi,
- katrām divām kartiņām (apzīmēsim tās ar A un B) var atrast divas citas kartiņas (apzīmēsim tās ar C un D) tā, ka to skaitļu summa, kas uzrakstīti uz A un B, vienāda ar to skaitļu summu, kas uzrakstīti uz C un D.

Pierādiet, ka mazākā iespējamā n vērtība ir 13.

3. Kvadrāts sastāv no 6 x 6 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Vai dažas no tām var nokrāsot melnas tā, lai katrā 3 x 3 rūtiņu kvadrātā būtu tieši divas melnas rūtiņas?

4. Deju kolektīvā ir 5 zēni un 5 meitenes; visu bērnu augumi ir dažādi. Dejā „Alfa" bērni sadalīti 5 pāros tā, ka katrā pārī zēns ir garāks par meiteni.

a) Vai var gadīties, ka dejā „Beta" bērni sadalīti 5 pāros tā, ka **katrā** pārī meitene garāka par zēnu?

b) Vai var gadīties, ka dejā „Gamma" bērni sadalīti 5 pāros tā, ka **četros** pāros meitene garāka par zēnu?

5. Atrodiet mazāko piecciparu naturālo skaitli, kam visi cipari dažādi un kas dalās ar 61.

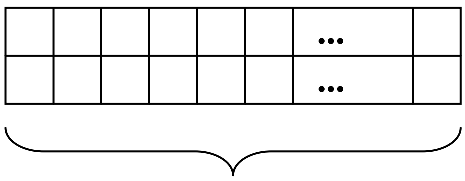
LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 57. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

6. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Katrs no trim rūķīšiem Alfa, Beta un Gamma vai nu vienmēr melo, vai vienmēr runā patiesību. Kādu dienu profesors Cipariņš dzirdēja, ka viens no viņiem paziņo: „Alfa un Beta abi ir meļi”, bet otrs – „Beta un Gamma abi ir meļi” (profesors nedzirdēja, **kuri** rūķīši to sacīja). Cik starp 3 rūķīšiem ir meļu?

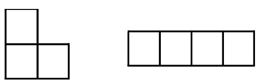
2. Tabulā ir divas rindas un n kolonnas (skat. 1.zīm.)



n 1.zīm.

Katrā rindā jāieraksta visi naturālie skaitļi no 1 līdz n ieskaitot (katrs vienu reizi) tā, lai katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa būtu **kaut kāda** naturāla skaitļa reizinājums pašam ar sevi. Vai to var izdarīt, ja a) n=11, b) n=13 ?

3. Andrim ir figūriņas, kas sastāv no vienādiem kvadrātiņiem (skat. 2. zīm) – pa 10 katra veida.



2. zīm.

Vai viņš var salikt kvadrātu ar izmēriem 7 x 7 rūtiņas, izmantojot a) tieši 12 figūriņas, b) tieši 14 figūriņas? Figūriņas savā starpā nedrīkst pārklāties.

4. Vai eksistē desmitciparu naturāls skaitlis, kura visi cipari ir dažādi un kuru var iegūt, sareizinot savā starpā vairākus divniekus, pieciniekus un septītniekus?

5. Veikalā pārdeva 5 dažādu nosaukumu saldos sieriņus; visas 5 cenas bija dažādas. Gunārs, Dzintars un Maija katrs nopirka trīs dažādu nosaukumu sieriņus; visi trīs bērni samaksāja vienu un to pašu naudas summu. Pierādīt: vismaz divi no bērniem nopirka vienu un to pašu nosaukumu sieriņus.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 57. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

7. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Kurus naturālos skaitļus n var izsacīt formā $n = \frac{x}{y}$, kur $x = a^5$, $y = b^3$, a un b – naturāli skaitļi?

2. Rindā uzrakstīti 13 veseli skaitļi (starp tiem var būt arī vienādi), kuru summa ir pozitīva. Katru 3 pēc kārtas uzrakstīto skaitļu summa ir negatīva.
a) parādīt kaut vienu piemēru, kā to izdarīt,
b) pierādīt: vismaz 5 no uzrakstītajiem skaitļiem ir pozitīvi.

3. Kvadrāts sastāv no 6 x 6 rūtiņām. Vai var dažas no tām izkrāsot melnas tā, lai vienlaicīgi būtu apmierinātas šādas prasības:
a) katrā rindiņā un katrā kolonnā ir tieši 4 melnas rūtiņas,
b) no katras melnas rūtiņas var aiziet uz katru citu melnu rūtiņu, ar katru soli šķērsojot kādu divu melnu rūtiņu kopējo malu?

4. Kuri naturālie skaitļi ir vienādi ar trīs savu dažādu pozitīvu dalītāju summu ?

5. Profesoram Cipariņam ir 10 monētas; tieši 2 no tām ir viltotas, bet viņš nezina, kuras. Cipariņš pazīst burvi, kuram vienā reizē var iedot pārbaudīt 3 monētas; pēc pārbaudes burvis atdod monētas atpakaļ un klusējot norāda uz vienu no tām. Ir zināms: burvis **nenorāda** uz īstu monētu, ja starp viņam iedotajām trim monētām ir kaut viena viltota. Kā ar 4 pārbaudēm Cipariņš var garantēti noskaidrot vismaz vienu viltoto monētu?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 57. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

8. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Kontroldarbu latviešu valodā rakstīja 50 pirmklasnieki. Daži no viņiem zina visus burtus, izņemot „l”, kuru rakstot izlaiž; pārējie zina visus burtus, izņemot „d”, kuru rakstot izlaiž. Skolotājs lūdza 10 skolēniem uzrakstīt vārdu „gads”, citiem 18 skolēniem – vārdu „gals”, pārējiem skolēniem – vārdu „galds”. Vārdus „gads” un „gals” uzrakstīja pa 15 skolēniem katru. Cik skolēni pareizi izpildīja sev doto uzdevumu?

2. Atrisināt vienādojumu

$$x^3(x^2-7)^2-36x=0$$

3. Trijstūra ABC iekšpusē atrodas punkts O. Vai var būt, ka vienlaicīgi $\angle OAB > \angle OBA, \angle OBC > \angle OCB$ un $\angle OCA > \angle OAC$?

4. Atrast mazāko naturālo skaitli, kas dalās ar katru no kaut kādiem 12 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem.

5. Kvadrāts sastāv no 100×100 vienādām kvadrātiskām rūtiņām, kas izkrāsotas šaha galdiņa kārtībā. Griežot pa rūtiņu līnijām, tas sagriezts mazākos kvadrātos ar nepāra skaita rūtiņām katrā. Pierādiet: no šo kvadrātu centrālajām rūtiņām tieši puse ir baltas un puse – melnas. (Ja kvadrāts sastāv no 1 rūtiņas, tad šo vienīgo rūtiņu uzskata par tā centrālo).

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 57. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Kāda var būt četru tādu divciparu pirmskaitļu summa, kas sastādīti no cipariem 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9, izmantojot katru no tiem tieši vienu reizi?

2. Dots, ka $3 \le x \le 6$ un $3 \le y \le 6$. Pierādīt, ka $2x^2 + 2y^2 \le 5xy$.

3. Taisnleņķa trijstūrī ABC ($\angle ACB = 90°$) novilkta mediāna CM. Riņķa līnija, kas ievilkta ΔACM, pieskaras AC un AM attiecīgi punktos X un Y; dots, ka $XY \parallel CM$. Aprēķināt ΔABC leņķu lielumus.

4. Ceļu policijas vienībā ir 7 policisti. Katru vakaru dežurēt dodas 3 no tiem. Pēc kāda laika izrādījās, ka katri divi policisti kopā dežurējuši tieši n reizes.

a) atrodiet kaut vienu iespējamu n vērtību,

b) vai var būt, ka n=3?

5. Kvadrāts sastāv no 10×10 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis, kas nepārsniedz 10. Ja divām rūtiņām ir kopēja mala vai kopējs stūris, tad tajās ierakstīto skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

a) pierādīt, ka kāds skaitlis ierakstīts vismaz 15 rūtiņās,

b) pierādīt, ka kāds skaitlis ierakstīts vismaz 17 rūtiņās.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 57. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Ir 2006 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Dažas (vismaz viena) ir īstas un dažas (vismaz viena) ir viltotas. Visām īstajām monētām ir vienādas masas; arī visām viltotajām monētām ir vienādas masas. Viltotās monētas ir vieglākas par īstajām. Kā, izmantojot sviras svarus bez atsvariem, ar 1004 svēršanām noskaidrot, cik ir viltoto monētu?

2. Kvadrāts sastāv no $n \times n$ rūtiņām, $n \geq 3$. Pierādīt, ka katru rūtiņu var nokrāsot baltu, melnu vai sarkanu tā, lai izpildītos īpašība: katrai rūtiņai x eksistē tādas divas kaimiņu rūtiņas y un z, ka x, y un z visas nokrāsotas dažādās krāsās. (Divas rūtiņas sauc par kaimiņu rūtiņām, ja tām ir kopēja mala.)

3. Sauksim naturālu skaitli $n > 1$ par labu, ja visus tā pozitīvos dalītājus var sadalīt divās daļās, kuru summas ir vienādas.
a) atrodiet kaut vienu labu skaitli, kas lielāks par 10,
b) vai eksistē labi skaitļi, kas lielāki par 20072007?

4. Taisnleņķa trapecē ABCD ($\angle A = \angle B = 90°$) diagonāles krustojas punktā S. Punkts M atrodas uz nogriežņa AB un $SM \perp AB$. Pierādīt, ka $\angle CMS = \angle DMS$.

5. Dots, ka $f(x) = x^2 + 8x + 12$. Atrisināt vienādojumu $f(f(f(x))) = 0$.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 57. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$x^2 + 3x = 2^y$$

2. Kādā klasē ir n zēni un n meitenes. Katrai meitenei patīk x zēni. Katram zēnam patīk y meitenes. Pierādīt, ka:

a) ja x+y>n, tad noteikti var atrast tādu zēnu un tādu meiteni, kas patīk viens otram,

b) ja x+y≤n, tad var gadīties, ka šādu zēnu un meiteni atrast neizdodas.

3. Vai eksistē 3 kvadrāttrinomi ar īpašību: lai kā arī apzīmētu vienu no tiem ar $f_1(x)$, otru ar $f_2(x)$ un trešo ar $f_3(x)$, atradīsies tāds skaitlis a, ka $f_1(a) < f_2(a) < f_3(a)$?

4. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkti augstumi AX un CY; malas AC viduspunkts ir M. Uz augstuma AX atzīmēts tāds punkts Z, ka YZ=ZX. Pierādīt, ka punkti A; Y; Z; M atrodas uz vienas riņķa līnijas.

5. Rindā izrakstīti 6 pozitīvi skaitļi; pirmais no tiem ir 1, sestais ir 6. Par šo rindu ir zināms: ja skaitļi x, y, z atrodas tajā viens aiz otra tieši šādā secībā, tad $y = \frac{2xz}{x+z}$.

Kādi skaitļi izrakstīti rindā?

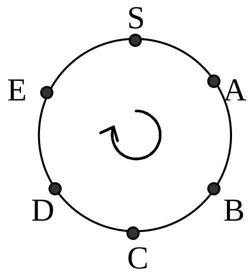
LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 57. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Skaitļi a_1; a_2; a_3; a_4 šādā secībā veido ģeometrisku progresiju, kuras visi locekļi ir dažādi; f(x) ir kvadrāttrinoms. Vai var vienlaicīgi pastāvēt vienādības $f(a_1)=a_2$, $f(a_2)=a_3$, $f(a_3)=a_4$?
Vai var vienlaicīgi pastāvēt tikai divas no šīm vienādībām?

2. Pa apli izvietotas n spuldzes; sākotnēji tās visas ir izslēgtas. Viena spuldze apzīmēta ar S. Atrodam visus skaitļa n pozitīvos dalītājus, ieskaitot 1 un n. **Katram** šādam dalītājam d veicam sekojošu operāciju: mainām katras d-tās spuldzes stāvokli (sākot ar spuldzi S), pavisam izdarot n maiņas. (Piemēram, ja 1. zīm attēlotajā situācijā pie $n = 6$ ņemts dalītājs $d = 3$, tad pakāpeniski mainīsim spuldžu S; C; S; C; S; C stāvokļus.)



1. zīm.

Kurām n vērtībām, beidzot šīs darbības, visas spuldzes būs ieslēgtas?

3. Kādiem naturāliem skaitļiem n vienlaicīgi piemīt sekojošas īpašības:
a) n-1 un n+1 ir pirmskaitļi,
b) skaitļa n visu naturālo dalītāju summa (ieskaitot 1 un n) ir 2n?

4. Trijstūra ABC leņķa A bisektrise krusto malas AB vidusperpendikulu punktā X, malas AC vidusperpendikulu punktā Y, bet ΔABC apvilkto riņķa līniju punktā Z. Punkti A, X, Y, Z atrodas uz bisektrises šajā secībā. Pierādiet, ka AX=YZ.

5. Kvadrāts sastāv no 12×12 rūtiņām, kas izkrāsotas melnas un baltas šaha galdiņa kārtībā. Ar vienu gājienu var izvēlēties divas rūtiņas, kam ir kopīga mala, un pārkrāsot tās: melnu – par sarkanu, sarkanu – par baltu, baltu – par melnu. Ar kādu mazāko gājienu skaitu var panākt, lai vienlaicīgi visas sākotnēji melnās rūtiņas būtu baltas, bet visas sākotnēji baltās rūtiņas – melnas?