LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 58. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

5. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

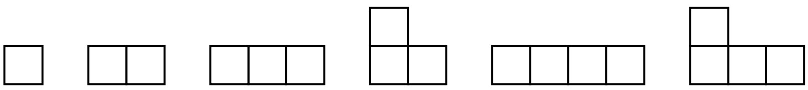
1. Starp katriem diviem blakus uzrakstītiem cipariem vienādības zīmes kreisajā pusē jāievieto „+” vai „–” zīme tā, lai iegūtu pareizu vienādību. Jābūt sešām „+” zīmēm un divām „–” zīmēm. Pacentieties atrast trīs dažādus zīmju izvietojumus.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 19

2. Vai var pa apli izrakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 10 katru tieši vienu reizi tā, lai katru divu blakus uzrakstītu skaitļu starpība būtu:
a) vismaz 4,
b) vismaz 5?

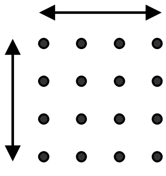
3. Deju kolektīvā ir 5 zēni un 5 meitenes; visu bērnu augumi ir dažādi. Dejā „Alfa” bērni sadalīti 5 pāros tā, ka katrā pārī zēns ir garāks par meiteni.
a) Vai var gadīties, ka dejā „Beta” bērni sadalīti 5 pāros tā, ka **katrā** pārī meitene garāka par zēnu?
b) Vai var gadīties, ka dejā „Gamma” bērni sadalīti 5 pāros tā, ka **četros** pāros meitene garāka par zēnu?

4. Vai no figūrām, kas parādītas 1. zīm., var salikt kaut kādu taisnstūri? Katru figūru jāņem tieši vienā eksemplārā. Visas rūtiņas ir vienādi kvadrātiņi. Figūras drīkst pagriezt un pat apgriezt „uz mutes”, bet tās nedrīkst pārklāties viena ar otru.



1.zīm.

5. Sešpadsmit punkti izvietoti kvadrātiska režģa formā (skat. 2. zīm.). Kādu mazāko daudzumu punktu jāizdzēš, lai nekādi 4 palikušie punkti nebūtu tāda kvadrāta virsotnes, kura malas vērstas bultiņu virzienos?



2.zīm.

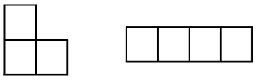
LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 58. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

6. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Basketbola spēlē starp votivapām un šillišallām uzvarēja votivapas ar rezultātu 68:62. Spēles gaitā bija tāds brīdis, kad votivapas bija guvuši tik punktu, cik šillišallām vēl bija atlicis gūt līdz spēles beigām. Cik punktu šai brīdī bija guvušas abas komandas kopā?

2. Andrim ir figūriņas, kas sastāv no vienādiem kvadrātiņiem (skat. 3. zīm) – pa 10 katra veida.



3. zīm.

Vai viņš var salikt kvadrātu 7×7 rūtiņas, izmantojot a) 12 figūriņas; b) 14 figūriņas? Figūriņas nedrīkst pārklāties.

3. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi x un y, ka
a) $xy(x-y) = 20082007$?
b) $xy(x-y) = 240$?

4. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka reizinājums $n \cdot n$ sākas ar 1234567...?

5. Karnevāla zālē ir 5 lampas; katras divas lampas savieno viena vītne. Lampu un vītņu krāsošanai kopā izmantotas n krāsas. Ir zināms, ka vienlaicīgi izpildās šādas divas īpašības:
a) nekādas divas vītnes, kas piestiprinātas vienai lampai, nav vienā krāsā,
b) neviena vītne nav piestiprināta lampai ar tādu pašu krāsu.
Kāda ir mazākā iespējamā n vērtība?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola

Latvijas 58. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

7. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Kurus naturālos skaitļus n var izsacīt formā $n = \frac{x}{y}$, kur $x = a^3$, $y = b^4$, a un b – naturāli skaitļi?

2. Ir 4 tortes gabali ar masām x, y, z, t; dots, ka $x < y < z < t$. Andris un Maija spēlē šādu spēli. Andris izvēlas vienu tortes gabalu, pēc tam Maija – otru; abi bērni nekavējoties sāk ēst. Tikko kāds savu gabalu apēdis, viņš nekavējoties izvēlas kādu gabalu no atlikušajiem un sāk ēst to, utt. Spēles mērķis ir apēst vairāk tortes nekā otram. Abi bērni torti ēd vienmērīgi un ar vienādiem ātrumiem.
Vai var gadīties, ka Andris uzvar, no sākuma izvēloties gabalu x? Uzskatām, ka Maija noteikti ēd torti sev visizdevīgākajā veidā.

3. Sporta klubā sapulcējušies cīkstoņi un vingrotājas. Cīkstoņu vidējais svars ir 84 kg; vingrotāju vidējais svars ir 54 kg; visu sportistu vidējais svars ir 71 kg. Pierādīt, ka cīkstoņu skaits dalās ar 17.

4. Vai eksistē
   a) sešstūris, kuru var sagriezt divos trijstūros,
   b) sešstūris, kuru nevar sagriezt divos četrstūros?

5. Kvadrāts sastāv no $n \times n$ vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts nenegatīvs vesels skaitlis. Visu ierakstīto skaitļu summa ir 101. Katrās divās rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstītie skaitļi atšķiras viens no otra tieši par 1. Kāda ir lielākā iespējamā n vērtība?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 58. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

8. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Sešciparu naturālu skaitli sauc par laimīgu, ja kaut kādu 3 ciparu summa vienāda ar pārējo 3 ciparu summu. Divi viens otram sekojoši skaitļi ir laimīgi. Pierādīt, ka viens no tiem dalās ar 10.

2. Kvadrāts sastāv no 2008×2008 vienādām kvadrātiskām rūtiņām, kas izkrāsotas šaha galdiņa kārtībā. Griežot pa rūtiņu līnijām, tas sagriezts mazākos kvadrātos ar nepāra skaitu rūtiņu katrā. Pierādiet: no šo kvadrātu centrālajām rūtiņām tieši puse ir baltas un puse – melnas. (Ja kvadrāts sastāv no 1 rūtiņas, tad šo vienīgo rūtiņu uzskata par tā centrālo).

3. Skaitļi a, b, c visi nav vienādi savā starpā. Pierādīt, ka $a^2+b^2+c^2\neq ab+ac+bc$.

4. Katrīna katru dienu nēsā citas krāsas cepuri. Viņa nolēmusi, ka pēc sarkanas cepures viņa nēsā dzeltenu, pēc dzeltenas – zaļu, pēc zaļas – brūnu, pēc brūnas – violetu, pēc violetas – atkal sarkanu, utt. Pirmajā dienā Katrīnai bija zaļa cepure, 2008. dienā – dzeltena. Ir zināms, ka Katrīna pieļāva **tieši vienu kļūdu**, valkājot sarkanu cepuri dienā, kad to nevajadzēja darīt. Kādas krāsas cepuri viņa valkāja iepriekšējā dienā?

5. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkts augstums CH; izrādījās, ka AH=BC. Caur H paralēli malai BC novilkta taisne; tā krusto augstumu AA_1 punktā K. Pierādīt, ka K atrodas uz $\angle ABC$ bisektrises.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 58. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Atrodiet vismaz 5 dažādus pirmskaitļus, ar kuriem dalās skaitlis $3^{32}-2^{32}$.

2. Trijstūrī ABC ar h_a, h_b un h_c apzīmēti to augstumu garumi, kas vilkti attiecīgi no virsotnēm A, B, C. Dots, ka $h_a \geq 3$, $h_b \geq 4$, $h_c \geq 5$.
Kāds ir mazākais iespējamais ΔABC laukums?

3. Ceļu policijas vienībā ir 7 policisti. Katru vakaru dežurēt dodas 3 no tiem. Pēc kāda laika izrādījās, ka katri divi policisti kopā dežurējuši tieši n reizes.
a) atrodiet kaut vienu iespējamu n vērtību,
b) vai var būt, ka n=3?

4. Katram no kvadrāttrinomiem x^2+ax+b un x^2+cx+d ir divas dažādas saknes; visi skaitļi a, b, c, d ir dažādi. Minēto četru sakņu summas puse ir vienādojuma $x^2+ax+b=x^2+cx+d$ sakne. Pierādīt, ka pirmā kvadrāttrinoma sakņu kvadrātu summa vienāda ar otrā kvadrāttrinoma sakņu kvadrātu summu.

5. Kādā valstī ir 100 pilsētas. No katras pilsētas iziet 5 ceļi. Katrs ceļš savieno divas pilsētas, neiegriežoties citās; starp katrām divām pilsētām ir ne vairāk par vienu ceļu; visu ceļu garumi ir dažādi. Visu ceļu kopgarums ir 30 000 km. Ja izvēlas katrai pilsētai visīsāko no tās izejošo ceļu un saskaita visu 100 izvēlēto ceļu garumus (varbūt dažu ceļu garumus ieskaita summā divreiz), iegūst 10 000 km. Pierādīt, ka šajā valstī ir tāds ceļš, kura garums nav mazāks par 125 km.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 58. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

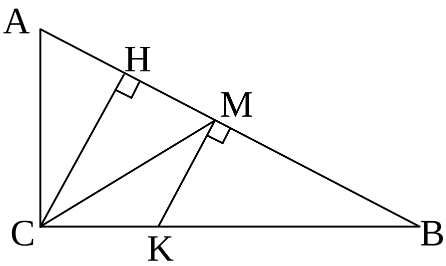
10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Atrodiet mazāko naturālo skaitli, ko var izsacīt gan kā 15, gan kā 16, gan kā 17 pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summu.

2. Dots, ka $f(x) = x^2 + 8x + 12$. Atrisināt vienādojumu $f(f(f(f(x)))) = 0$.

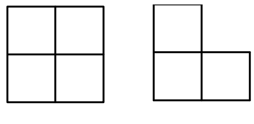
3. Dots, ka ΔABC ir taisnleņķa, $\angle ACB = 90°$. Zināms, ka CH ir šī trijstūra augstums, $CM = 2 \cdot HM$ un $KM \perp AB$ (skat. 1. zīm.). Aprēķināt $\angle AKC$.



1. zīm.

4. Dots, ka x un y - reāli skaitļi. Pierādīt, ka $(1 + x^2)(1 + y^2) \geq x(1 + y^2) + y(1 + x^2)$.

5. Kvadrāts sastāv no $n \times n$ vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Ir zināms, ka to var sagriezt tādos gabalos, kādi parādīti 2. zīm., pie tam abu veidu gabali ir vienādā skaitā. Atrast mazāko iespējamo n vērtību.


2. zīm.

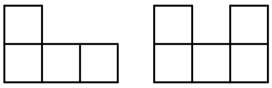
LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 58. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkti augstumi AX un CY; malas AC viduspunkts ir M. Uz augstuma AX atzīmēts tāds punkts Z, ka YZ=ZX. Pierādīt, ka punkti A; Y; Z; M atrodas uz vienas riņķa līnijas.

2. Kvadrāts sastāv no $n \times n$ vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Ir zināms, ka to var sagriezt tādos gabalos, kādi parādīti 3. zīm., pie tam viena veida gabalu ir tikpat, cik otra. Atrast mazāko iespējamo n vērtību.



3. zīm.

3. Ir zināms, ka $f(x)$ un $g(x)$ - kvadrāttrinomi, pie tam gan $2f(x)+g(x)$, gan $f(x)-g(x)$ ir tāds kvadrāttrinoms, kuram ir tikai viena sakne (jeb, citādi sakot, abas saknes ir vienādas). Dots arī, ka kvadrāttrinomam $f(x)$ ir divas dažādas saknes. Pierādīt, ka kvadrāttrinomam $g(x)$ sakņu nav.

4. Apzīmējam $f(n)=1^n+2^n+3^n+4^n$, n=1; 2; 3; ... . Ar kādu lielāko daudzumu nuļļu var beigties skaitlis $f(n)$?

5. Regulāra n-stūra virsotnēs ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz n (katrā virsotnē cits skaitlis) ar īpašību: ja A, B, C – trīs n-stūra virsotnes un AB=AC, tad virsotnē A ierakstītais skaitlis vai nu lielāks par **abiem** skaitļiem, kas ierakstīti virsotnēs B un C, vai arī mazāks par tiem abiem.

Vai var būt, ka a) $n=8$, b) $n=7$, c) $n=10$, d) $n=16$?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 58. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. No 10 skaitļiem izveidotu virkni sauc par **labu**, ja tā vienlaicīgi apmierina šādas 3 prasības:

a) tā satur visus naturālos skaitļus no 1 līdz 10 ieskaitot,

b) ja no virknes izsvītro trīs skaitļus 8, 9 un 10, tad atlikušie 7 virknes locekļi nav augošā secībā,

c) ja no virknes izsvītro **vēl arī** skaitli 7, tad atlikušie virknes locekļi ir augošā secībā.

Cik ir labu virkņu? Atbilde jādod decimālā pierakstā.

2. Kādiem naturāliem skaitļiem n vienlaicīgi piemīt sekojošas īpašības:

a) n-1 un n+1 ir pirmskaitļi,

b) skaitļa n visu naturālo dalītāju summa (ieskaitot 1 un n) ir 2n?

3. Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem x un y pastāv nevienādība

$$\cos(x^2) + \cos(y^2) - \cos(xy) < 3.$$

4. Trijstūrī ABC dots, ka AC<BC. Apzīmējam apvilkto riņķa līniju ar w. Punkts E ir viduspunkts tam no w lokiem AB, kurš satur C. Punkts D atrodas uz nogriežņa BC un BD=AC. Stars ED krusto w punktā F, kas nesakrīt ar A. Pierādīt, ka AF||BC.

5. Klasē ir 10 skolēni. Viņiem jāreģistrējas 1023 eksāmenu kārtošanai, turklāt nedrīkst būt divu tādu eksāmenu, kurus kārto vieni un tie paši skolnieki. katru eksāmenu jākārto vismaz vienam skolniekam. Dots, ka n – vesels skaitlis, $0 \le n \le 1023$. Pierādīt, ka eksāmenam reģistrējušos skolnieku sarakstus var nodrukāt uz baltām un zaļām lapām tā, ka vienlaicīgi izpildās šādas prasības:

- ja divas lapas X un Y ir vienā krāsā, tad tā lapa, uz kuras pierakstīti tieši tie skolnieki, kas pierakstīti vismaz uz vienas no lapām X un Y, ir tādā pašā krāsā kā X un Y,
- ir tieši n baltas lapas.