38. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1987./88. m.g.

ATRISINĀJUMI

88.1. Apzīmēsim ciparus, kā parādīts 2.zīmējumā

$$\begin{array}{r} abc6d \\ +\,cf3g1 \\ \hline r98236 \end{array}$$

2. zīm.

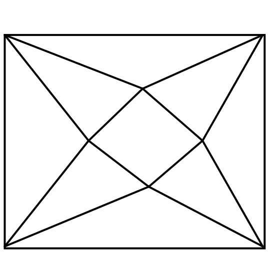
Skaidrs, ka $d=5$, tātad vienu šķirā pārnesums nerodas, un $g=8$, tāpēc $c=8$. Tā kā $r\neq 0$ (citādi tas nebūtu rakstīts), tad, saskaitot *a* un *e*, rodas pārnesums; tātad $r=1$ un uz desmit tūkstošu šķiru ir bijis pārnesums no tūkstošu šķiras. Tāpēc $1+b+f=18; b+f=17; a+e=18 \Rightarrow a=e=9$. Var būt vai nu $b=9$; $f=8$, vai arī $b=8$; $f=9$. Tā kā pirmais saskaitāmais lielāks par otru, tad $b=9; f=8$ un saskaitīšanas piemērs ir

$$\begin{array}{r} 99865 \\ +\,98371 \\ \hline 198236 \end{array}$$

88.2. Pavisam ir 9 viencipara skaitļi 90 divciparu skaitļi 900 trīsciparu skaitļi un 988 četrciparu skaitļi; tāpēc kopējais ciparu skaits ir

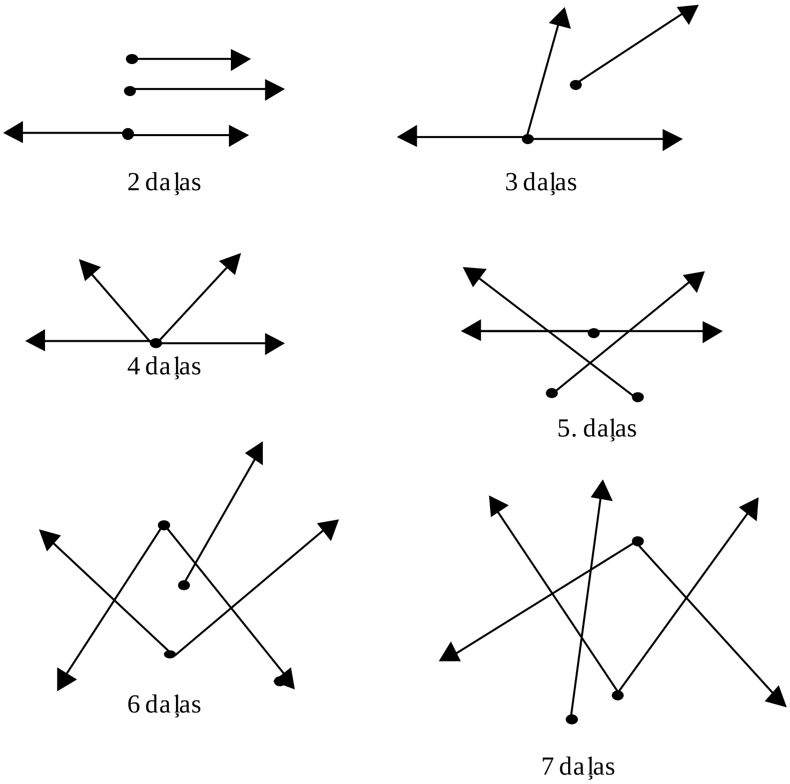
$$9\cdot 1+90\cdot 2+900\cdot 3+988\cdot 4=6821.$$

88.3. Jā, var. Skat. 3. zīmējumu.



3. zīm.

88.4. Skat. 4. zīm.



4. zīm.

88.5. 1) Robots var rīkoties šādi:

$$ABCDE \to DEABC \to BCDEA \to BACDE.$$

2) Mēs redzam, ka varam mainīt vietām patvaļīgas divas blakus esošas grāmatas, ja pa labi no tām ir vismaz 3 citas. To var izdarīt arī, ja pa kreisi no tām ir 3 citas (jārīkojas simetriski). Ja pavisam ir 7 grāmatas, tad, vai nu pa labi, vai pa kreisi nu jebkurām blakus esošām grāmatām atrodas vismaz 3 grāmatas; tātad mēs varam mainīt vietām jebkuras divas blakus esošas grāmatas. Skaidrs, ka šādā veidā mēs varam iegūt jebkuru grāmatu izkārtojumu, tai skaitā arī pretējo.

88.6. Ja $a = 0$, tad b var pieņemt 11 vērtības $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$.

Ja $a = \pm 1$, tad b var pieņemt 9 vērtības.

Ja $a = \pm 2$, tad b var pieņemt 7 vērtības, utt.

Tātad dažādo iespēju skaits ir $11 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 61$.

88.7. a) rūtiņu virsotnes un to centri,

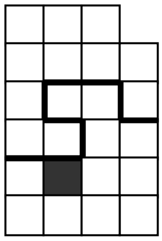
b) rūtiņu malu viduspunkti.

88.8. Jā, var. Ievērosim, ka

$$(1 + 2 - 3) + (4 - 5 - 6 + 7) + (8 - 9 - 10 + 11) + \ldots (1984 - 1985 - 1986 + 1987) = 0.$$

Tātad sienāzis ar pēdējo gājienu var atgriezties sākuma punktā.

88.9. Skat. 5. zīmējumu.



5. zīm.

88.10. Aizstājam skaitļus ar to atlikumiem, dalot ar 3: tie var būt 0, 1, 2. Ja trīs atlikumi ir vienādi, varam izvēlēties atbilstošos trīs skaitļus. Pretējā gadījumā paliek 3 iespējas, kuras pārbauda tieši:

a) 2, 2, 1, 1, 0 ; izvēlamies 2, 1 un 0;

b) 2, 2, 1, 0, 0 ; izvēlamies 2, 1 un 0;

c) 2, 1, 1, 0, 0 ; izvēlamies 2, 1 un 0.

88.11. Identitāti pārbauda, atverot iekavas:

$$a(b-c)+b(c-d)+c(d-a)+d(a-b)=$$
$$ab-ac+bc-bd+cd-ca+da-db=$$
$$ad-ac+ba-bd+cb-ca+dc-db=$$
$$a(d-c)+b(a-d)+c(b-a)+d(c-b).$$

Ģeometriskā interpretācija: skaitļus uzraksta pa riņķa līniju. Katru skaitli pareizina ar divu nākošo skaitļu starpību un visus reizinājumus saskaita. Vienreiz to izdara pulksteņa rādītāja kustības virzienā – otrreiz pretējā virzienā. Abos gadījumos summā divu blakusstāvošo skaitļu reizinājums ieiet ar + zīmi, bet divu pretējo skaitļu reizinājums ar – zīmi.

88.12. No dotā seko. ka $AB = BC$, $BC = CA$ un $CA = AB$. Tātad trijstūris ABC ir regulārs; protams tas nozīmē, ka $\Delta BCA = \Delta CAB$.

88.13. 1) $3x+1=2x+1$;

2) $3x+1=3x+2$;

3) Vienādojumam nav atrisinājuma, $a=c$ un $b \neq d$. Vienādība $a=c$ var izpildīties 3 veidos; katrā no tiem b un d var izvēlēties 6 veidos. Tātad tādu vienādojumu ir 18.

88.14. Paliks saskaitāmie, kuros pakāpju reizinājumi ir

$$x^3,\ y^3,\ z^3,\ x^2y,\ xy^2,\ x^2z,\ xz^2,\ y^2z,\ xyz,$$

t.i., 10 saskaitāmie.

Pēc moduļa 2 šo izteiksmi var pārrakstīt veidā:

$$(x+y+z)(x+y+z)(x+z).$$

Redzam, ka pāra koeficienti būs locekļiem, kas satur y^3, x^2y, yz^2, xyz, t.i., pie četriem locekļiem.

88.15. Skaidrs, ka skaitlis dalās ar 3 neatkarīgi no *x* un *y*. Parādīsim, ka tas nav trijnieka pakāpe. Tiešām, ja *x* ir trijnieka pakāpe, tad $x+2y+1$ ir pāra skaitlis, tātad dalās ar 2.

Tātad apskatāmais skaitlis satur vismaz divus pirmreizinātājus. Piemērs parāda, ka tas var saturēt tieši divus pirmreizinātājus:

$$3x(x+2y+1)(7y+1) = 3\cdot 24\cdot 27\cdot 8 = 2^6\cdot 3^5.$$

88.16. Vienādojot saucējus, iegūstam vienādību

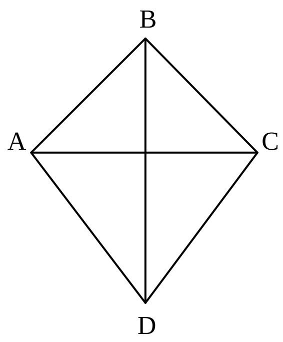
$$A(x+2)+B(x+1) = 7x+10.$$

No šejienes iegūstam vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} A+B=7 \\ 2A+B=10. \end{cases}$$

Tātad $A=3, B=4$.

88.17. Skat 6.zīm.



6. zīm.

No dotā seko ka trijstūri *BAD* un *BCD* ir vienādi. Tātad *BD* ir četrstūra *ABCD* leņķa *B* bisektrise. Tā kā *ABC* ir vienādsānu trijstūris, tad bisektrise ir arī šā trijstūra augstums. Tātad $BD \perp AC$.

88.18. Pakāpeniski aprēķinām analogas izteiksmes ar divām, trijām, ... daļsvītrām. Iegūstam $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8},$ utt. Izpētot daļu veidošanās procesu, viegli saprast, ka katras nākošās daļas skaitītājs vienāds ar iepriekšējo saucēju, bet saucējs – ar iepriekšējās skaitītāja un saucēja summu. Tātad daļu virkne ir

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \frac{89}{144}, \frac{144}{233}, \frac{233}{377}, \frac{377}{610}, \frac{610}{987}.$$

Pēdējā uzrakstītā daļa ir tā, kas jāaprēķina.

88.19. Apzīmēsim zēnu skaitu ar Z, meiteņu kopu ar M, pīrādziņu cenu ar p, bulciņu cenu ar b (cenas izteiktas kapeikās). Tad

$$(Zp + Mb) - (Zb + Mp) = 1 \text{ jeb}$$

$$(Z - M)(p - b) = 1.$$

Tā kā Z, M, p, b – veseli skaitļi un $Z > M$, tad $Z - M = 1$. Tātad zēnu ir par vienu vairāk nekā meiteņu.

88.20. Aizstāsim katru sarkanu kartiņu, uz kuras uzrakstīts skaitlis x, ar dzeltenu kartiņu, uz kuras ir uzrakstīts $1000 - x$. Tad uzdevuma apgalvojums izsakāms šādi: eksistē zila un dzeltena kartiņa uz kurām uzrakstītie skaitļi ir vienādi.

Ievērosim, ka zilo un dzelteno kartiņu kopā ir 1000, bet uz tām uzrakstīti augstākais 999 dažādi skaitļi. Tātad uz kaut kādām divām kartiņām uzrakstīti vienādi skaitļi. Tā kā gan "zilie" skaitļi, gan "dzeltenie" skaitļi savā starpā nav vienādi, tad kāds "zilais" skaitlis ir vienāds ar "dzelteno" skaitli, ko arī vajadzēja pierādīt.