39. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1988./ 89. m.g.

ATRISINĀJUMI

89.1. Uz katras no dotajām taisnēm var atrasties ne vairāk kā 15 krustpunkti ar citām no dotajām taisnēm (pa vienam ar katru taisni). Tie uz taisnes atzīmē 14 nogriežņus. Tātad kopējais nogriežņu skaits nepārsniedz $16 \cdot 14 = 224$.
Šāds skaits rodas, ja starp dotajām taisnēm nav paralēlu (tātad jebkuras divas krustojas) un nekādas trīs no tām neiet caur vienu punktu. Šādā gadījumā pieņemts teikt, ka taisnes atrodas vispārīgā stāvoklī.

89.2. Katrā no trim definīcijas apgabala punktiem funkcija var pieņemt jebkuru no divām vērtībām. Tātad pavisam iespējamas $2 \times 2 \times 2 = 8$ dažādas funkcijas.
Tas, ka iespēju skaits ir jāsareizina seko no principa, ko kombinatorikā sauc reizināšanas likumu.

89.3. Pieņemsim pretējo, ka visu doto vienādojumu atrisinājumi ir pozitīvi.
Aplūkosim vienu no vienādojumiem $ax + b = 0$. Tā atrisinājums ir skaitlis $x = -\frac{b}{a}$.
No tā, ka $-\frac{b}{a} > 0$, seko, ka skaitļu *a* un *b* zīmes ir pretējas.
Līdzīgi iegūstam, ka *b* un *c*, *c* un *d*, *d* un *e*, *e* un *a* zīmes ir pretējas.
No tā, ka *a* un *b* zīmes ir pretējas un *b* un *c* zīmes ir pretējas, seko, ka *a* zīme sakrīt ar *c* zīmi; līdzīgi *c* zīme sakrīt ar *e* zīmi. Rezultātā *a* zīmei jāsakrīt ar *e* zīmi. Iegūta pretruna; tas nozīmē, ka vismaz vienam no vienādojumiem atrisinājums ir negatīvs.

89.4. No dotā seko, ka $34(a+b) = 34a + 34b = 43b + 34b = 77b$. Tas nozīmē, ka skaitlis $34(a+b)$ dalās ar 77.

Tā kā skaitļiem 34 un 77 nav kopīgu dalītāju (lielāku par 1), tad ar 77 dalās skaitlis $a + b$; tātad tas nav pirmskaitlis (tam, piemēram, ir dalītājs 7, kas atšķirīgs no 1 un paša skaitļa).

89.5. Apzīmēsim zēnu skaitu klasē ar *n*, meiteņu skaitu – ar *m*, bet kopīgo draudzību skaitu (tās, protams, ir abpusējas) ar d.
No dotā seko vienādība $3z = d = 6m \quad \Rightarrow \quad z = 2m$.

Interesanti izpētīt šādu uzdevumu: kādam jābūt skolēnu skaitam klasē, lai prasītā situācija būtu iespējama?

89.6. Dotā izteiksme ir polinoms no *x*, kura pakāpe nepārsniedz 2.
Apzīmēsim to ar $f(x)$.

Ievērosim, ka

$$f(a)=\frac{(a-a)(a-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(a-a)(a-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)}=1;$$

Līdzīgi $f(b)=f(c)=1$.
Tātad funkcijai $f(x)$ ir vismaz 3 saknes. Tātad funkcija $f(x)$ nevar būt kvadrātfunkcija vai lineāra funkcija; tas nozīmē, ka $f(x)$ ir konstanta funkcija.
Tas nozīmē, ka $f(x)=1$; tātad aplūkojamās izteiksmes vērtība ir vienāda ar 1.

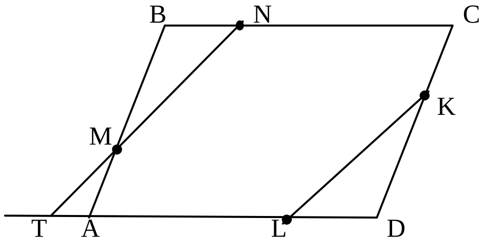
89.7. Uzdevuma pirmo daļu var pārformulēt šādi: kāds lielākais skaits naturālu skaitļu kvadrātu atrodas intervālā $[n, n+100]$.

Ja $n=1$, tad šajā intervālā atrodas 10 kvadrāti.
Vairāk kvadrātu būt nevar. Tiešām, pieņemsim, ka intervālā $[n, n+100]$ atrodas 11 kvadrāti; mazāko no tiem apzīmēsim ar *m*. Tad izpildās nevienādības

$$m^2 \geq n, (m+10)^2 \leq n+100 \quad \Rightarrow$$
$$(m+10)^2-m^2 \leq 100 \quad \Rightarrow$$
$$2m+100 \leq 100 \quad \Rightarrow \quad m \leq 0.$$

Iegūta pretruna.
Lai starp skaitļiem $\sqrt{n}; \sqrt{n+1}; \sqrt{n+2}; \ldots; \sqrt{n+1000\,000}$ nebūtu veselu skaitļu nepieciešams, lai atrastos 1000001 nekvadrāti pēc kārtas.
Tā kā starp m^2 un $(m+1)^2$ atrodas 2*m* nekvadrāti, tad 1000001 nekvadrāti pēc kārtas pirmo reizi parādās intervālā no 500001^2+1 līdz $500001^2+1000001$.
Atbilde: $n=500001^2+1$.

89.8 Aplūkosim 2. zīm.



2. zīm.

Trijstūri *BMN* un *DKL* ir vienādi (leņķis un divas piemalas).Tātad

$$\angle NTL = \angle BNM = \angle DLK .$$

No šejienes seko, ka taisnes *MN* un *KL* ir paralēlas (vienādi kāpšļu leņķi).

Līdzīgi pierāda nogriežņu *NK* un *ML* paralelitāti. Līdz ar to pierādīts, ka *MNKL* ir paralelograms.

89.9. Nē, nevar būt.

Apzīmēsim ar *A* pionieri , kas draudzējas ar deviņiem citiem, ar *X* un *Y* pionierus, kuriem ir tieši 1 draugs. Pionieris *A* draudzējas ar visiem pionieriem, tātad arī ar *X* un *Y*. Bet tādā gadījumā nav tāda pioniera *B*, kuram ir tieši 8 draugi. Tiešām, no atlikušajiem 9 pionieriem viņam var būt augstākais 7 draugi, jo *X* un *Y* nedraudzējas ne ar vienu citu izņemot *A*.

89.10. Varam uzskatīt, ka $a \le b \le c$.

Ja $a \ge 3$, tad $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{11}{12}<\frac{41}{42}$.

Atliek aplūkot gadījumu $a = 2$.

Ja $b \ge 4$, tad $\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ un $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}<\frac{41}{42}$.

Ja $b = 2$, tad $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} > 1$, bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.

Atliek aplūkot gadījumu $b = 3$. Tad no dotās nevienādības

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{c}<1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{c}<\frac{1}{6}$$

seko, ka $c \ge 7$. Tātad arī šajā gadījumā

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42} .$$

89.11. Šīs parabolas vienādojums ir

$$y = (x-2)^2 + 2 .$$

89.12. Tā kā nevienādības izteiksme ir simetriska attiecībā pret x un y, tad varam uzskatīt, ka $x \le y$. Iegūstam

$$\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x} \le \frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}=\frac{x+1}{1+x}=1.$$

Otrs risinājums.

$$\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x} \le \frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+x}=\frac{x+y}{y+x}=1.$$

89.13. Pakāpeniski iegūstam

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=$$

$$\frac{bc+ac+ab}{abc}=ab+ac+bc \quad \Rightarrow$$

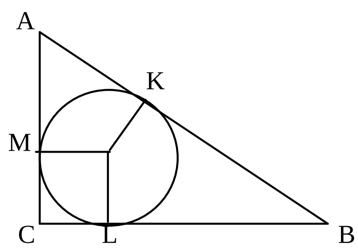
$$abc+a+b+c=1+ab+ac+bc \quad \Rightarrow$$

$$abc-ab-ac-bc+a+b+c-1=0 \quad \Rightarrow$$

$$(a-1)\cdot(b-1)\cdot(c-1)=0.$$

Tātad vismaz viens no skaitļiem a, b, c ir vienāds ar 1.

89.14. Aplūkosim 3. zīmējumu.



3. zīm.

Pieskares riņķa līnijai, kas vilktas no viena punkta, ir vienādas. Tātad

$$AK=AM, \quad BK=BL, \quad CL=CM=r.$$

No šejienes iegūstam

$$a+b-c=(BL+CL)+(AM+MC)-(BK+AK)=$$

$$(BL-BK)+(AM-AK)+CL+MC=$$

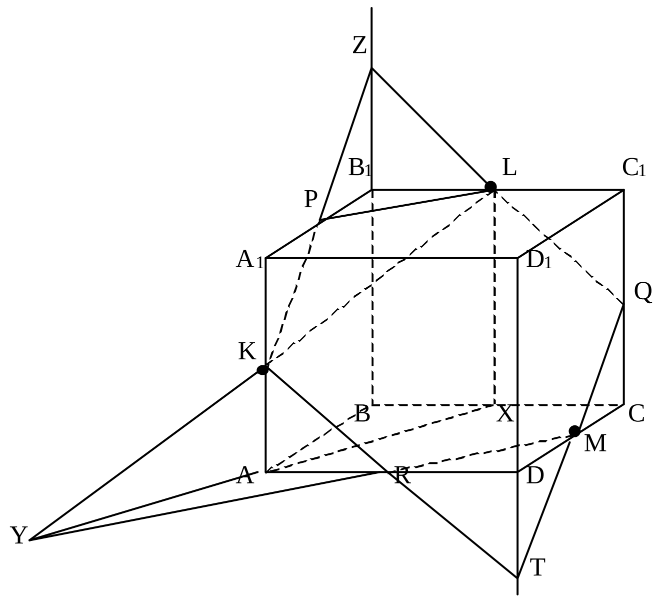
$$0+0+r+r=2r.$$

Tātad $r=\dfrac{a+b-c}{2}$.

89.15. To var izdarīt, piemēram, šādi: uzrakstīt skaitli, kura ciparu summa ir 125 un kurš dalās ar 125. Dalāmība ar 125 ir atkarīga tikai no skaitļa trim pēdējiem cipariem, jo 1000 dalās ar 125.

Var, piemēram, izvēlēties skaitli $\underbrace{111\ldots111}_{94}995125$.

89.16. Skat. 4. zīmējumu.



4. zīm.

Velkam LX paralēli BB_1. Tad punkti A, K, L, X atrodas vienā plaknē.

Konstruējam $Y = KL \cap AX$. Punkts Y pieder šķēluma plaknei, jo taisne KL pieder šķēluma plaknei. Tālākā konstrukcijas gaita ir vienkārša:

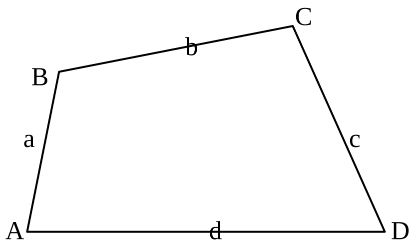
$$R = YM \cap AD$$
$$T = KR \cap DD_1$$
$$Q = TM \cap CC_1$$
$$Z = QL \cap BB_1$$
$$P = ZK \cap A_1B_1.$$

Meklējamais šķēlums ir regulārs sešstūris $KPLQMR$.

89.17. Katram leņķim x un y atbilst punkts uz vienības riņķa līnijas. Tā kā sakrīt gan to abscisas (kosinusi), gan ordinātas (sinusi), tad šie leņķi atšķiras par pilna leņķa daudzkārtni, t.i. par $2\pi k$.

Tātad $x - y = 2\pi k \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x-y}{\pi} = 2k,\ k \in Z$.

89.18. Skat. 5. zīm.



5. zīm.

Izmantojot trijstūra laukuma formulu $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$, iegūstam

$$L = \frac{1}{2}\left[\left(S_{ABD} + S_{BCD}\right) + \left(S_{ABC} + S_{ACD}\right)\right] \le$$
$$\frac{1}{2}\left[\left(\tfrac{1}{2} ad + \tfrac{1}{2} bc\right) + \left(\tfrac{1}{2} ab + \tfrac{1}{2} cd\right)\right] =$$
$$\frac{ab + bc + cd + da}{4}.$$

89.19. Pieņemsim, ka

$$a = x \cdot (ab - cd)$$
$$b = y \cdot (ab - cd)$$
$$c = z \cdot (ab - cd)$$
$$d = t \cdot (ab - cd),$$

kur x, y, z, t – veseli skaitļi.Tad

$$ab - cd = (xy - zt) \cdot (ab - cd)^2 .$$

No šejienes seko, ka

$$1 = (xy - zt) \cdot (ab - cd) .$$

Tas iespējams tikai tad, ja $ab - cd = 1$.

89.20. Tā kā skaitļa 2^n pēdējais cipars var būt tikai 2, 4, 6 vai 8, tad skaitļa 2^n ciparu summa var būt 3 tikai tad, ja $2^n = 1\underbrace{00\ldots00}_{k}2$.

Ja $k = 0$, tad skaitlis 12 nav divnieka pakāpe.
Ja $k > 0$, tad skaitlis $1\underbrace{00\ldots00}_{k}2$ dalās ar 2, bet nedalās ar 4; tātad nav divnieka pakāpe.

89.21. Izmantojot atvasināšanas formulas, iegūstam

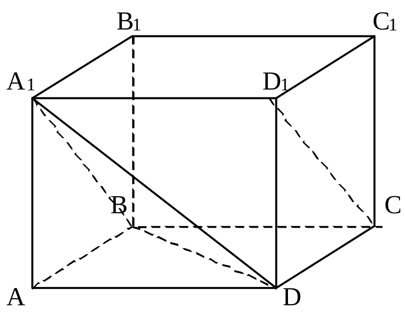
$$\left(\frac{1-\sin x}{1+\cos x}\right)' = \frac{(1-\sin x)'(1+\cos x)-(1-\sin x)\cdot(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2} =$$

$$\frac{-\cos x\cdot(1+\cos x)-(1-\sin x)\cdot(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} =$$

$$\frac{-\cos x-\cos^2 x+\sin x-\sin^2 x}{(1+\cos x)^2} =$$

$$\frac{\sin x-\cos x-1}{(1+\cos x)^2}$$

89.22. Aplūkosim 6. zīmējumu.



6. zīm.

Tā kā nogrieznis CD_1 ir paralēls nogrieznim BA_1, tad mums jāaprēķina leņķis $\angle BA_1D$ trijstūrī BA_1D. Tā kā trijstūris BA_1D ir vienādmalu (visas malas vienādas ar $\sqrt{2}\cdot a$, a – kuba malas garums), tad prasītais kosinuss ir vienāds ar $\cos 60° = \frac{1}{2}$.

89.23. Pieņemsim, ka n^3+3 dalās ar n^2-n+1.

Izdalīsim polinomu n^3+3 ar n^2-n+1 ar atlikumu. Iegūsim

$$n^3+3=\left(n^2-n+1\right)\cdot(n+1)+2.$$

Tātad arī skaitlis 2 dalās ar skaitli n^2-n+1.

Tas nozīmē, ka $n^2-n+1\in\{\pm 1,\pm 2\}$.

Risinot atbilstošos vienādojumus, atrodam tikai vienu naturālu n vērtību $n=1$.

89.24. Vienādības kreisās puses izteiksmi apzīmēsim ar $f(x)$.

Intervālā (a,b) funkcija ir nepārtraukta.

Ja $x=a+\varepsilon$ (ε -- "ļoti mazs skaitlis"), tad $f(x)>0$.

(Funkcijas vērtības zīmi nosaka loceklis $\frac{1}{x-a}=\frac{1}{\varepsilon}$, kas var kļūt patvaļīgi liels).

Ja $x=b-\varepsilon$ (ε -- "ļoti mazs skaitlis"), tad $f(x)<0$.

Tātad intervālā (a,b) funkcijai ir sakne.

Līdzīgi pierāda, ka funkcijai $f(x)$ ir saknes intervālos (b, c) un (c, d). Kopā iegūstam vismaz trīs saknes.

89.25. Apskatīsim rūtiņu, kurā atrodas pats mazākais no ierakstītajiem skaitļiem *a*. Tad skaitlis *a* ir astoņu tādu skaitļu vidējais aritmētiskais, kuri visi ir ne mazāki par *a*. Tātad

$$a = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_8}{8} \quad \Rightarrow \quad b_1 + b_2 + \cdots + b_8 = 8a .$$

Turklāt visiem *i* izpildās nevienādība $b_i \geq a$.

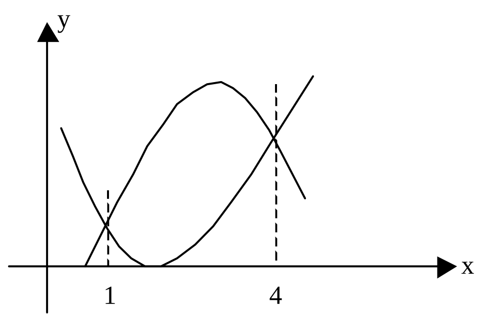
Ja kāds no skaitļiem b_i būtu lielāks par *a*, tad izpildītos stingrā nevienādība

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_8 > 8a .$$

Iegūta pretruna; tātad visi skaitļa *a* kaimiņi ir vienādi ar *a*.

Šo kaimiņu kaimiņi arī būs vienādi ar *a*, utt. Tā kā no jebkuras rūtiņas uz jebkuru var nonākt, pārejot uz kaimiņu rūtiņu vairākas reizes, tad visiem skaitļiem rūtiņu lapā jābūt vienādiem.

89.26. Atrisinot vienādojumu $(x-2)^2 = -4 + 6x - x^2$, iegūstam, ka dotās parabolas krustojas punktos, kuru abscisas ir 1 un 4. Šajā intervālā otrās parabolas grafiks atrodas virs pirmās parabolas grafika (skat. 7. zīm.).



7. zīm.

Tātad meklētais laukums ir vienāds ar

$$\int_1^4 \left(\left(-4 + 6x - x^2\right) - (x-2)^2\right) dx =$$

$$\int_1^4 \left(10x - 8 - 2x^2\right) \cdots dx =$$

$$\left.\left(5x^2 - 8x - \frac{2x^3}{3}\right)\right|_1^4 = 9.$$

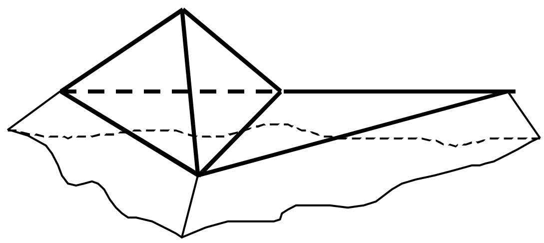
89.27. Visos gadījumos šādi daudzskaldņi eksistē.

Saliekot kopā ar pamatiem divas vienādas trijstūra piramīdas, iegūstam daudzskaldni ar 6 skaldnēm.

Saliekot kopā ar pamatiem divas vienādas 994-stūra piramīdas, iegūstam daudzskaldni ar 1988 skaldnēm.

Lai iegūtu trešo piemēru, saliekam kopā ar pamatiem divas vienādas 993-stūra piramīdas un iegūstam daudzskaldni ar 1986 skaldnēm.

Uz vienas skaldnes daļas konstruējam trijstūra piramīdu tā, kā parādīts 8. zīmējumā.



8. zīm.

Tādējādi skaldņu skaits palielinās par 3 un kļūst vienāds ar 1989.

Ievērosim, ka iegūtais daudzskaldnis ir ieliekts. Izliektu daudzskaldni ar 1989 skaldnēm – trijstūriem konstruēt nevar. Pamēģiniet to pierādīt.

89.28. Apskatīsim kubiņu, kurā atrodas pats mazākais no ierakstītajiem skaitļiem *a*. Tad skaitlis *a* ir sešu tādu skaitļu vidējais aritmētiskais, kuri visi ir ne mazāki par *a*. Tātad

$$a = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_6}{6} \quad \Rightarrow \quad b_1 + b_2 + \cdots + b_6 = 6a .$$

Turklāt visiem *i* izpildās nevienādība $b_i \geq a$.

Ja kāds no skaitļiem b_i būtu lielāks par *a*, tad izpildītos stingrā nevienādība

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_6 > 6a .$$

Iegūta pretruna; tātad visi skaitļa *a* kaimiņi ir vienādi ar *a*.

Šo kaimiņu kaimiņi arī būs vienādi ar *a*, utt. Tā kā no jebkura kubiņa uz jebkuru var nonākt, pārejot uz kaimiņu kubiņu vairākas reizes, tad visiem ierakstītajiem skaitļiem ir jābūt vienādiem.

Ja kubiņos ierakstīti veseli skaitļi, tad apgalvojums neizpildās. Visus kubiskā režģa kubiņus sadala pa slāņiem vienā no virzieniem (teiksim *x* ass virzienā). Kubiņos, kuri atrodas slānī ar kreisās skaldnes abscisu *n*, ierakstām skaitli *n*. Viegli pārbaudīt, ka uzdevuma nosacījums izpildās; tiešām, katram skaitlim *n* blakus atrodas 4 skaitļi *n*, skaitlis $(n-1)$ un skaitlis $(n+1)$. To vidējais aritmētiskais ir vienāds ar *n*.

89.29. Ja $n = 2$, tad $\sin a_2 = -\frac{1}{2}$.

Ja $n \geq 3$, tad

$$\sin a_1 + \sin a_3 = 2\sin a_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2\sin\frac{a_1 + a_3}{2} \cdot \cos 2\frac{a_1 - a_3}{2} = 2\sin a_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2\sin a_2 \cdot \cos\frac{a_1 - a_3}{2} = 2\sin a_2 \quad .$$

Pastāv divas iespējas:

1) $\sin a_2 = 0$;

2) $\cos\frac{a_1 - a_3}{2} = 1$. Tad $a_3 = a_1 + 4\pi k,\ k \in Z$, un $a_2 = a_1 + 2\pi k$. Šajā gadījumā

$$\sin a_1 = \sin a_2 = \cdots = \sin a_n .$$

Tā ir pretruna.

Tātad, ja $n \geq 3$, tad $\sin a_2 = 0$.

Tagad viegli pierādīt, ka *n* nevar būt lielāks par 3.

89.30. Jā, tas ir iespējams.

Ja zirdziņš aiziet no rūtiņas *a* uz rūtiņu *b* un atgriežas atpakaļ pa to pašu maršrutu, tad mainās *a* un *b* krāsas, bet nemainās citu rūtiņu krāsas. Atkārtojot šādas ekskursijas no sākuma rūtiņas *a* uz visām melnajām rūtiņām, tās kļūs baltas. Ja šajā brīdī *a* ir melna, tad zirdziņš izdara vēl vienu gājienu, un arī *a* kļūst balta.