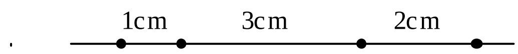
40. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1989./ 90. m.g.

ATRISINĀJUMI

90.1. Katrs no iedomātajiem skaitļiem var būt lielāks par 0, 1, 2, 3, 4 skaitļiem. Tā kā vērtības 0, 1, 2, 4 jau izmantotas, tad Andra iedomātais skaitlis ir lielāks par 3 citu iedomātajiem skaitļiem.

90.2. To var izdarīt, skat. 4. zīm.

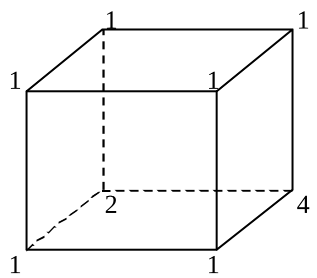


4. zīm.

90.3. Pirmajā svēršanā noliekam uz katra kausa 3 monētas. Viens no svaru kausiem noteikti nosvērsies uz leju. Šajā svaru kausā būs vismaz 2 smagās monētas. Otrajā svēršanā salīdzinām jebkuras divas monētas no šī kausa. Ja viens kauss pārsver otru, tad smagā monēta ir atrasta; ja abi kausi ir līdzsvarā, tad abas monētas ir smagās.

90.4. Jāizmanto apsvērums, ka vecākajās šķirās jāliek lielāki cipari.
Atbilde: $V=9, C=8, P=7, I=6, E=5, T=4, D=3, R=2, N=1, S=0$.

90.5. Sarkanais trijnieks varēja rasties tikai kā trīs vieninieku summa. Tālāk viennozīmīgi var atrast pārējos skaitļus.

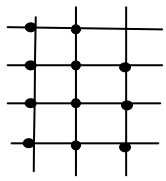


5. zīm.

90.6. Divus saskaitāmos pierakstot vienu otram galā, kopējā summa palielinās, jo pirmā pierakstītā skaitļa cipari "pāriet" vecākās šķirās. Tāpēc maksimums tiks sasniegts, ja ir tikai viens saskaitāmais. Skaidrs, ka tas ir 9876543210.

90.7. Nevienādība $|a+b|>|a-b|$ izpildās, ja skaitļu a un b zīmes ir vienādas. Nevienādība $|a-c|>|a+c|$ izpildās, ja skaitļu a un c zīmes ir dažādas. Tātad skaitļu b un c zīmes atšķiras, un izpildās nevienādība $|b-c|>|b+c|$.

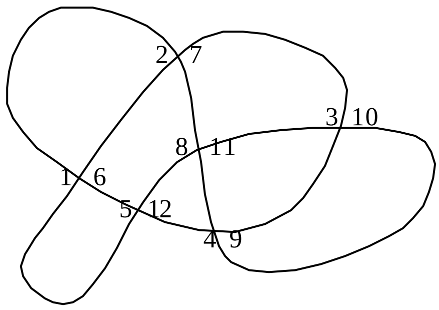
90.8. Var būt 7 taisnes. Skat. 6. zīmējumu.



6. zīm.

Nevar būt tikai 6 taisnes. Ja horizontālajā virzienā iet tikai n taisnes, bet vertikālajā virzienā $6-n$ taisnes, tad kopā veidojas $n\cdot(6-n)$ krustpunkti; kā viegli pārbaudīt šis skaitlis nav lielāks par 9.

90.9. Piemēram, tā, kā parādīts 7. zīmējumā.



7. zīm.

90.10. Nē, nevar. Pieņemsim, ka summa uz vienas taisnes ir S. Saskaitot visas summas uz visām taisnēm, iegūstam $4S$. Šajā summā katrs skaitlis ir ieskaitīts divas reizes; iegūstam vienādību

$$4S=2\cdot(1+2+3+4+5+6)=42 \quad\Rightarrow\quad S=10,5.$$

Bet tā ir pretruna, jo S ir vesels skaitlis.

90.11. Nē, nevar būt. Katra no 5 taisnēm var krustoties augstākais ar 4 taisnēm. Katrs no krustpunktiem tiek ieskaitīts 2 reizes. Tātad kopīgais krustpunktu skaits nevar pārsniegt $\frac{5\cdot 4}{2}=10$.

90.12. Nē, šī vienādība nav identitāte. Piemēram, izvēlēsimies $x=1\frac{3}{4}$. Tad

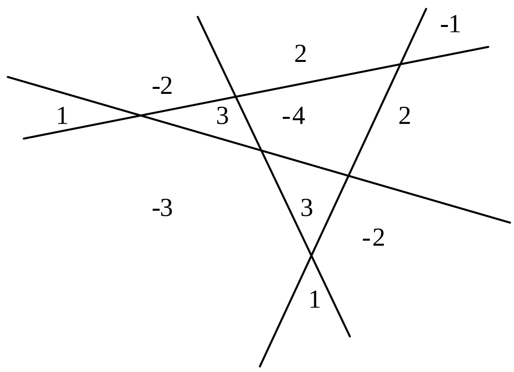
$[x]+[x]=1+1=2$, bet $[2x]=[3\frac{1}{2}]=3$.

90.13. Sadalīsim skaitli 1989 pirmreizinātājos: $1989 = 3^2 \cdot 13 \cdot 17$. No vienādībām $13 = 2^2 + 3^2$ un $17 = 1^2 + 4^2$ iegūstām prasītos sadalījumus:

$$1989 = 9 \cdot 17 \cdot (4 + 9) = 612 + 1377 \text{ un } 1989 = 9 \cdot 13 \cdot (1 + 16) = 117 + 1872.$$

90.14. Nē, nevar. No dotajiem skaitļiem tikai 4 skaitļi ir pāra skaitļi; tie ir 2, 4, 6, 8. Lai reizinājums dalītos ar 4, katrā rindiņā un katrā kolonnā jāatrodas vismaz vienam pāra skaitlim. Tātad katrā rindiņā atrodas tikai viens pāra skaitlis. Ja tas ir 2, tad skaitļu reizinājums nedalās ar 4.

90.15. To var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 8. zīmējumā.



8. zīm.

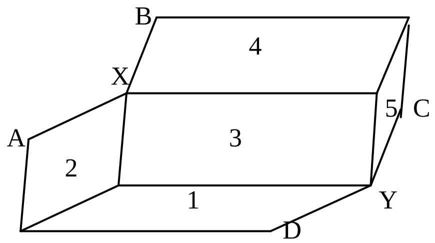
90.16. Atņemot no otrā vienādojuma pirmo, iegūstām $x = y + 1$. Ievietojot šo vienādību pirmajā vienādojumā, iegūstam $x = -1987$, $y = -1988$.

90.17. To var izdarīt, piemēram, šādi:

$$\{1, 2, 4, 10\}, \{5, 15\}, \{6, 14\}, \{7, 13\}, \{8, 12\}, \{9, 11\}.$$

Protams, pirms tam bija jāaprēķina, kādām jābūt šīm summām.

90.18. Skat. 9. zīm.



3. zīm.

No paralelogramiem 1 un 2 seko, ka *AX* ir vienāds un paralēls ar *DY*. Līdzīgi pierāda, ka *BX* ir vienāds un paralēls ar *CY*. Tātad trijstūri *AXB* un *DYC* ir vienādi un paralēli novietoti. Tātad *AB* un *DC* ir vienādi un paralēli. No tā seko, ka četrstūris *ABCD* ir paralelograms.

90.19. Daļa pirms pieskaitīšanas ir vienāda ar $1-\frac{b-a}{b}$, bet pēc pirmās pieskaitīšanas ar $1-\frac{b-a}{b+1}$. No dotā seko, ka $a<b$.

Savukārt pēc otrās pieskaitīšanas iegūstām daļu $1-\frac{b-a}{b+2}$. Redzam, ka daļas vērtība atkal palielinās.

90.20. Jā, var. Piemērs parādīts 10. zīmējumā.

1	1	1	1
0	-1	-1	-1
1	-1	1	1
1	-1	0	-1

10. zīm.

90.21. Piemērs parādīts 11. zīmējumā.

X				
			X	
	X			
				X
		X		

11. zīm.

90.22. No Pitagora teorēmas seko, ka jāatrod starp skaitļiem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 tik daudz trijnieku, ka divu skaitļu summa ir vienāda ar trešo. Tādu trijnieku kopskaits ir 12.

90.23. Nē, nevar. No pirmajiem diviem nosacījumiem seko, ka pirmās progresijas diference ir lielāka par otrās progresijas diferenci; bet tad no nevienādības $a_{100} > b_{100}$ sekotu nevienādība $a_{200} > b_{200}$, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.

90.24. Ja *n* ir pāra skaitlis, izteiksim *n* formā

$$n = 2 + (n-2).$$

Skaitlis 2 ir pirmskaitlis, bet $(n-2)$ ir salikts skaitlis (tas dalās ar 2 un ir lielāks par 2).

Ja n ir nepāra skaitlis, izteiksim n formā

$$n = 3 + (n-3).$$

Skaitlis 3 ir pirmskaitlis, bet $(n-3)$ ir salikts skaitlis (tas dalās ar 2 un ir lielāks par 2).

90.25. Ja neviens no skaitļiem x, y, z pēc absolūtās vērtības nav mazāks par 1, tad

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x + y + z \geq xyz.$$

Ja kaut viens no šiem skaitļiem (piemēram, z) pēc moduļa mazāks par 1, tad

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x^2 + y^2 \geq |2xy| \geq |xyz| \geq xyz.$$

90.26. Nē, nevar, jo tikai vienā rindiņā skaitļu reizinājums var dalīties ar 13 (tajā, kurā ierakstīts skaitlis 13),

90.27. Ievērosim, ka $3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$. Tā kā

$$633 \cdot 3{,}1416 = 1988{,}6328 < 1989 \text{ un}$$

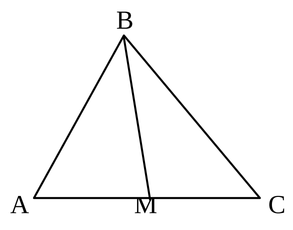
$$634 \cdot 3{,}1415 = 1991{,}711 > 1989 \text{, tad}$$

$$633 \cdot \pi < 1989 < 634 \cdot \pi.$$

Tāpēc 1989 (radiāni) ir 3. vai 4. kvadranta leņķis. Tas nozīmē, ka $\sin 1989 < 0$.

90.28. Nē, nevar. Pretējā gadījumā šķēlumā izveidotos piecstūris (jo daudzstūrim būtu 5 virsotnes – plaknes krustpunkti ar piramīdas šķautnēm). Taču šķēluma daudzstūrim var būt augstākais 4 malas, jo trijstūra piramīdai ir tikai 4 skaldnes (katra no tām šķeļoties ar plakni var dot tikai vienu šķēluma daudzstūra malu).

90.29. Nē, nevar. Aplūkosim 12. zīmējumu



13. zīm.

Apzīmēsim trijstūrī *ABM* ievilktās riņķa līnijas rādiusu ar r_1, bet trijstūrī *CBM* ievilktās riņķa līnijas rādiusu ar r_2 un pieņemsim, ka $r_1 = 2r_2$.

Trijstūru *AMB* un *CBM* laukumi ir vienādi (vienādi pamati un augstumi).

No formulas $S = p \cdot r$ seko, trijstūra *CBM* perimetrs ir divas reizes lielāks par trijstūra *AMB* perimetru, jeb

$$(MB + MC + BC) = 2 \cdot (AM + BM + AB).$$

No šejienes seko, ka

$$BC = AM + BM + 2AB = CM + BM + 2AB > CM + BM \ ,$$

kas ir pretrunā ar trijstūra nevienādību.

90.30. Pārveidojot iegūstam:

$$a^2 + 3b^2 + 5c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2c^2 \leq$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc =$$
$$(a + b + c)^2 \leq 1.$$

90.31. Mediāna ir garāka vai vienāda par augstumu, kas vilkts no tās pašas virsotnes; pie kam vienādība izpildās tikai tad, kad malas, kas iziet no atbilstošās virsotnes, ir vienādas. Tātad

$$m_a + m_b + m_c \geq h_a + h_b + h_c \, ,$$

un uzdevumā dotā vienādība var izpildīties tikai tad, ja

$$m_a = h_a \, , \; m_b = h_b \, , \; m_c = h_c \, .$$

Tas nozīmē, ka

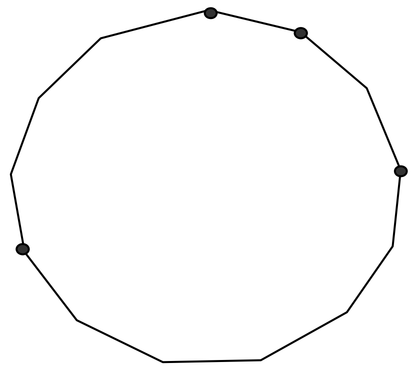
$$AB = AC, \; BA = BC, \; CA = CB \ ,$$

t.i., trijstūris ir regulārs.

90.32. Piemēram, tāds ir polinoms $P(x) = \frac{1}{4}x^2$.

Trešās pakāpes polinoma atvasinājums ir otrās pakāpes polinoms, atvasinājuma kvadrāts ir ceturtās pakāpes polinoms. Tātad šajā gadījumā prasīta vienādība nav iespējama.

90.33. Jā, var. Ņemam pēc kārtas 1., 2.,4.,10. virsotnes. Skat.14. zīm.



14. zīm.

90.34. Ja $n = 6k$, ņemam saskaitāmos $2k - 1, \quad 2k, \quad 2k + 1$.

Blakus esošiem naturāliem skaitļiem LKD vienmēr ir 1. Atliek pārbaudīt, ka arī skaitļu $2k-1$ un $2k+1$ LKD ir 1. Tiešām, ja skaitļi $2k-1$ un $2k+1$ abi dalās ar *x*, tad arī to starpība (skaitlis 2) dalās ar *x*. Tātad $x=1$ vai $x=2$. Tā kā $2k+1$ nedalās ar 2, tad skaitļu $2k-1$ un $2k+1$ LKD ir 1.

90.35. Tā kā gan funkcija $\sin t$, gan funkcija $\mathrm{tg}\, t$ aplūkojamā intervālā ir augošas, tad arī funkcija $f(t)=\sin t+\mathrm{tg}^3 t$ ir augoša.

Uzdevumā doto vienādību var pārrakstīt formā:

$$f(x)=f(y).$$

Stingri augošai funkcijai *f* no šejienes seko, ka $x=y$.

90.36. Jā, ja, piemēram, *ABCD* ir kvadrāts. Visi aplūkojamie trijstūri šajā gadījumā ir vienādi vienādsānu taisnleņķa trijstūri.

Padomājiet, vai iespējams izdomāt citu piemēru.

90.37. Ja $x=0$, tad $\sin x+\sin 2x=0$. Tā kā $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}>1$, tad, izmantojot funkcijas $\sin x+\sin 2x$ nepārtrauktību, secinām, ka intervālā $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$ atradīsies tāds skaitlis *a*, kuram izpildās vienādība

$$\sin a+\sin 2a=1.$$

Tā kā $\sin x\le 1$ un $\sin 2x\le 1$, tad izteiksmes var pieņemt vērtību 2 tikai tad, ja $\sin x=1$ un $\sin 2x=1$. Taču, ja $\sin x=1$, tad

$$|\sin 2x|=\left|2\sin x\cdot\sqrt{1-\sin^2 x}\right|=0.$$

Tātad lielākas veselas vērtības par 1 dotā izteiksme pieņemt nevar.

Tā kā $\sin x+\sin 2x$ ir nepāra funkcija, tad vienīgā negatīvā veselā vērtība, ko var pieņemt dotā izteiksme ir -1.

Atbilde: Dotā izteiksme var pieņemt tikai veselas vērtības -1, 0, 1.

90.38. Apzīmēsim dotos skaitļus ar *x* un *y*. Tad

$$\begin{cases} x+y=n \\ xy=m \end{cases} \Rightarrow \quad x+\frac{m}{x}=n \quad \Rightarrow \quad x^2+m=nx.$$

Pieņemsim, ka $x=\frac{p}{q}$ nesaīsināma daļa un $q>1$. Pēc pārveidojumiem iegūstam vienādību $p^2=q(np-qm)$.

Šī vienādība nav iespējama, jo vienādības labās puses izteiksme dalās ar *q*, bet kreisās puses izteiksme nedalās (*p* un *q* nav kopīgu dalītāju). Tātad *x* (un līdz arī y) ir veseli skaitļi.

Iracionāliem skaitļiem apgalvojums nav spēkā. Piemēram, skaitļiem

$$x = 2 + \sqrt{2}, \quad y = 2 - \sqrt{2}$$

gan summa, gan reizinājums ir veseli skaitļi.

90.39. Jānis to var izdarīt. Pierādīsim to ar indukciju.

Ja $n = 2$ (n – sējumu skaits), tad pārkārtošanas gaita ir sekojoša:

$1,2 \quad \to \quad 2,1$

Induktīvā pāreja ($n \Rightarrow n+1$).

Katru reizi, pirms mainīt vietām kādus divus sējumus no pirmajiem *n*, Jānis "izdzen" pēdējo sējumu no viena gala līdz otram (nav svarīgi kurā galā tajā brīdī atrodas pēdējais sējums) "caur" visiem pirmajiem *n* sējumiem.

Skaidrības labad paskatīsimies, kā pārkārtošanas gaita izskatās trim sējumiem.

$1,2,3 \to 1,3,2 \to 3,1,2 \to 3,2,1 \to 2,3,1 \to 2,1,3$.

90.40. Kuba projekciju plaknē *Q* veido triju tā skaldņu projekcijas (paralelogramu) ar kopīgu virsotni; šīs projekcijas nepārklājas. Savukārt kuba projekciju uz taisni *t* veido šīm 3 skaldnēm perpendikulāro šķautņu projekcijas, kas saliktas cita citai galā. Atliek ievērot, ka skaldne ar *Q* veido tādu pašu leņķi, kā tai perpendikulārā šķautne ar *t*, un atcerēties formulas $S_{proj} = S \cdot \cos\alpha$, $a_{proj} = a \cdot \cos\alpha$.