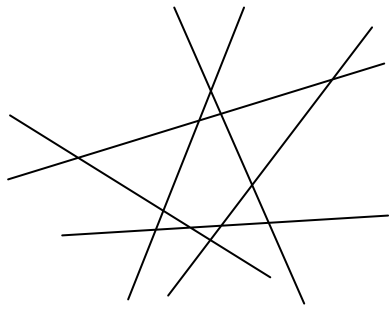
42. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1991./ 92. m.g.

ATRISINĀJUMI

92.1. Var; skat., piemēram, 6. zīm.

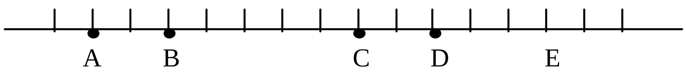


6. zīm.

92.2. Kolonnās ierakstīto skaitļu summas saskaitot, iegūsim visu tabulā ierakstīto skaitļu summu. To pašu var teikt arī par rindiņās ierakstīto skaitļu summām. Tāpēc trešajā rindiņā ierakstīto skaitļu summa ir

$$(32+34+35)-(42+27)=32.$$

92.3. Skat. 7. zīm.



7. zīm.

Ja divi skaitļi dalās ar 5, tad arī to starpība dalās ar 5. No atzīmētajiem skaitļiem tikai skaitļu *C* un *B* starpība dalās ar 5 . Nākošais skaitlis aiz *C*, kas dalās ar 5 ir *E*. Tā kā abi atlikušie skaitļi *A* un *D* dalās ar 3, un $E-D=3$, tad arī *E* dalās ar 3.
Tā kā skaitlis *E* dalās ar 3 un 5, tad dalās arī ar 15.

92.4. Nosveram vispirms kopā 4 monētas; svēršanas rezultātā uzzinām, cik smagāko monētu ir svērto monētu grupā (ja kopsvars ir 20 g, tad smago monētu nav; ja – 21 g, tad smagā monēta ir viena; ja – 22 g, tad ir divas smagās monētas). Aplūkosim šos gadījumus.

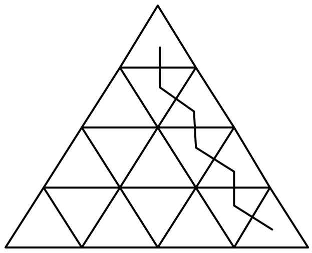
1) Ja monētu četriniekā ir divas smagās monētas, tad nosveram katru no tām atsevišķi.

2) Ja monētu četriniekā (A, B, C, D) ir viena smagā monēta, tad arī otrā četriniekā ir viena smagā monēta. Parādīsim, kā ar divām svēršanām katrā no četriniekiem mēs atradīsim smago monētu.

Vispirms nosveram kopā A un B; tā rezultātā uzzinām, vai smagā monēta ir starp A un B, vai starp C un D; ar otro svēršanu nosakām, kura no divām ir smagā.

3) Ja monētu četriniekā nav smago monētu, tad šīs monētas vairāk nav jāsver, un nosveram pa vienai atlikušās 4 monētas.

92.5. Skat. 8. zīm.



8. zīm.

Kā redzams no zīmējuma, no viena trijstūrīša uz otru var pāriet augstākais ar 6 gājieniem, katru reizi šķērsojot divu trijstūrīšu kopējo malu. Aplūkosim ceļu no trijstūrīša, kurā ierakstīts skaitlis 1, līdz trijstūrītim, kurā ierakstīts skaitlis 16. Ja apskatāmās starpības nepārsniegtu 2, tad 6 gājienu rezultātā no skaitļa 1 mēs varētu nonākt augstākais līdz skaitlim $1+2\cdot 6=13$; tātad kādai no starpībām šajā ceļā ir jābūt ne mazākai par 3.

92.6. Atlikumi ir veseli nenegatīvi skaitļi. Ja četru atlikumu summa ir 3, tad vismaz viens no tiem ir 0; atbilstošais skaitlis un līdz ar to visu skaitļu reizinājums dalās ar 5.

92.7. Nē, nevar. Katrs nogrieznis var krustoties ar 0, 1, 2, ..., 7 citiem. Ja katrs nogrieznis krustojas ar atšķirīgu skaitu citiem nogriežņiem, tad jābūt realizētām visām 8 pieminētajām vērtībām. Bet, ja kāds nogrieznis krustojas ar 7 citiem (tātad ar visiem), tad nav nogriežņa, kam būtu 0 krustpunktu.

92.8. Izmantojot dalāmības pazīmes ar 3 un 9, noskaidrojam, ka skaitļu reizinājums dalās ar 9, bet otrais reizinātājs nedalās ar 3. Tātad pirmais reizinātājs dalās ar 9. Tā kā pirmā reizinātāja ierakstīto ciparu summa ir 24, lai tas dalītos ar 9, zvaigznītes vietā ir jāieraksta cipars 3.

92.9. Nē. Pieņemsim, ka tas iespējams un katra trijstūra malu numuru summa ir S. Tad, saskaitot tās visas, iegūstam

$$10 \cdot S = 3 \cdot (1+2+\cdots+10) = 165,$$

jo katrs nogrieznis ietilpst kā mala trijos trijstūros; tātad $S = 16{,}5$, bet tā ir pretruna, jo S jābūt veselam skaitlim.

92.10. Turnīrā kopā izspēlē 45 partijas un izcīna 45 punktus.

Ja lielmeistaru būtu ne mazāk par 7, tad viņu kopējais punktu skaits būtu vismaz $7 \cdot 7 = 49$ -- pretruna.

Ja lielmeistaru būtu 6, tad viņiem kopā jāizcīna vismaz $6 \cdot 7 = 42$ punkti; bet atlikušie 4 dalībnieki jau savā starpā vien izcīna 6 punktus. Tātad kopā būtu vismaz 48 punkti; tā ir pretruna.

Tātad lielmeistaru nevar būt vairāk par 5. Pieci lielmeistari var būt – piemēram, ja katrs no viņiem uzvar visus citus dalībniekus, bet savā starpā lielmeistari visas partijas nospēlē neizšķirti; tad katrs iegūst 7 punktus.

92.11. Doto vienādojumu saknes ir $\frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{a}{c}$. Dots, ka tās ir vienādas; šo kopīgo sakni apzīmēsim ar s. Tad

$$s^3 = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1.$$

No šejienes seko, ka $s = 1$.

92.12. Dotās vienādības pierakstām proporciju veidā:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{c}{d} = \frac{e}{f}, \quad \frac{e}{f} = \frac{g}{h}.$$

No šejienes iegūstam, ka $\frac{a}{b} = \frac{g}{h}$, jeb $ah = gb$.

92.13. Pieņemsim pretējo, ka $a \cdot b$ dalās ar 210.

Ievērosim, ka $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Ar p apzīmēsim jebkuru no pirmskaitļiem 2, 3, 5, 7. Tad $a \cdot b$ dalās ar p. Tātad vismaz viens no skaitļiem a, b dalās ar p. Tā kā $a + b = 210$ dalās ar p, tad arī otrs skaitlis dalās ar p.

Tātad gan a, gan b dalās ar $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, bet tādā gadījumā $a \geq 210$, $b \geq 210$ un $a + b > 210$. Iegūta pretruna.

92.14. Divas taisnes sadala plakni 4 apgabalos. Trešā taisne, krustojot abas jau novilktās, ar 2 krustpunktiem sadalās 3 daļās. Katra no šīm daļām sadala vienu apgabalu divos, tātad trīs taisnes veido $4 + 3 = 7$ apgabalus. Pakāpeniski pierāda, ka 7 taisnes veido

$$7 + 4 + 5 + 6 + 7 = 29 \text{ apgabalus.}$$

Septiņu taišņu 14 "gali" veido 14 bezgalīgus apgabalus; tātad galīgo apgabalu skaits ir $29-14=15$. Tātad uzdevumā minētais nav iespējams.

92.15. Apzīmēsim skaitļus pēc kārtas ar $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$.

Izdarot zīmju maiņas trijniekos

$$abc,\ def,\ ghi,\ jab,\ cde,\ fgh,\ ija,$$

skaitļa a zīme tiek mainīta 3 reizes, bet citu skaitļu zīmes – pa 2 reizēm. Tātad varam mainīt zīmi patvaļīgam vienam skaitlim, tātad arī iegūt jebkuru zīmju kombināciju.

92.16. Var ņemt, piemēram, skaitļus

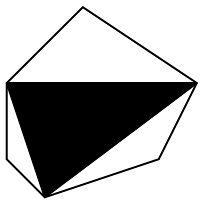
$$m = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7+2 \quad \text{un} \quad n = 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7+2.$$

92.17. To var izdarīt šādi:

$$1\to 2\to 2^2\to 2^4\to 2^5\to 2^{10}\to 2^{11}\to 2^{22}\to 2^{44}\to 2^{88}\to 2^{89}.$$

92.18. Ar katru melno trijstūri robežojas ne vairāk kā trīs balti, pie tam daži baltie trijstūri var robežoties reizē ar vairākiem melnajiem. Tātad balto trijstūru skaits nevar vairāk kā trīs reizes pārsniegt melno trijstūru skaitu.

Balto trijstūru skaits var tieši trīs reizes pārsniegt melno trijstūru skaitu, piemēram, tā kā parādīts 9.zīmējumā



9. zīm.

92.19. Ievērosim šādas vienādības

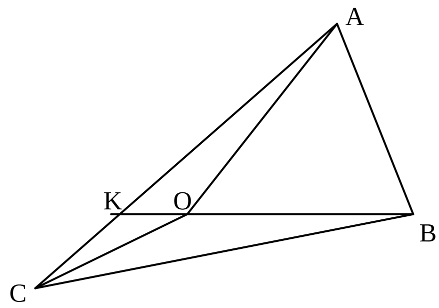
$$17-12\sqrt{2}=\left(3-2\sqrt{2}\right)^2,\quad 3\pm 2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}\pm 1\right)^2.$$

Tātad doto summu var pārveidot šādi:

$$\begin{aligned}&\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\\&\left(3-2\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{2}+1\right)+\left(\sqrt{2}-1\right)=3\end{aligned}.$$

92.20. Apzīmēsim ar K taisnes OB krustpunktu ar AC (skat. 10. zīm.)

.



10. zīm.

No trijstūra nevienādības seko

$$BO + AO < BO + OK + AK = BK + AK <$$
$$BC + CK + OK = BC + AC.$$

Līdzīgi pierāda šādas nevienādības

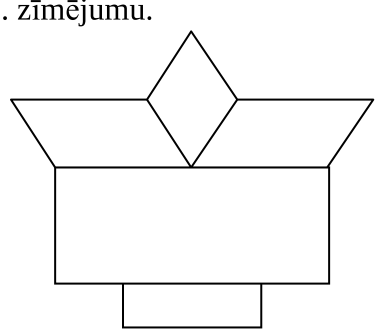
$$BO + CO < BA + CA, \qquad CO + AO < CB + AB.$$

Summējot šīs trīs nevienādības iegūstam prasīto.

92.21. Jā, tie veido aritmētisko progresiju. Lai to pierādītu, parādīsim, ka divu sekojošu virknes locekļu starpība ir konstanta.

$$f(a_{k+1}) - f(a_k) = f(a_1 + kd) - f(a_1 + (k-1)d) =$$
$$A(a_1 + kd) + B - A(a_1 + (k-1)d) - B = Ad.$$

92.22. Piemēram, skat. 11. zīmējumu.



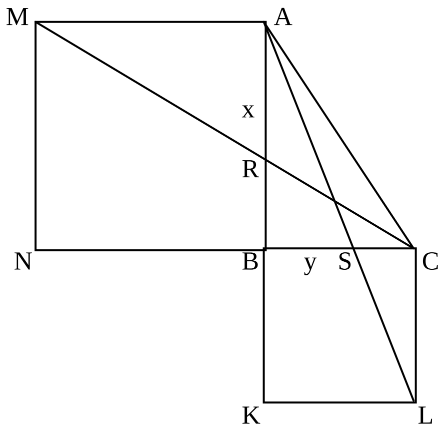
11. zīm.

92.23. Izmantojot Vjeta teorēmu, pārveidojam nevienādību:

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \geq 2(x_1 + x_2) \Leftrightarrow$$
$$a^2 - 2a \geq 2a \Leftrightarrow a^2 - 4a \geq 0.$$

Izteiksme $a^2 - 4a$ ir dotā kvadrāttrinoma diskriminants, un tas nav negatīvs, jo vienādojumam ir saknes.

92.24. Skat. 12. zīm.



12. zīm.

Apzīmējam $AB = x$, $BC = y$. No trijstūru CBR un CNM līdzības seko, ka

$$\frac{BC}{BR} = \frac{NC}{NM} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{BR} = \frac{x+y}{x} \quad \Rightarrow \quad BR = \frac{xy}{x+y}.$$

Līdzīgi pierāda, ka arī $BS = \dfrac{xy}{x+y}$.

92.25. Viegli atrast vienu atrisinājumu $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$. Izmantojot šo atrisinājumu, var norādīt bezgalīgu atrisinājumu sēriju. Tiešām, katram naturālam n der atrisinājums $x = 1 \cdot n^6,\ y = 2 \cdot n^{10},\ z = 3 \cdot n^{15}$.

92.26. Nē, ne noteikti. Kā pretpiemēru var ņemt skaitļus

$$a = 3,\ b = -1,\ c = -1 .$$

92.27. Nē, nevar būt, jo šāds skaitlis dalās ar 11. Tiešām

$$\overline{abba} = 1000a + 100b + 10b + a =$$
$$1001a + 110b = 11 \cdot (91a + 10b).$$

92.28. Apzīmēsim $\dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{4 + \cdots \dfrac{1}{1991}}} = a$.

Tad pierādāmo vienādību var pierakstīt šādi:

$$\frac{1}{2+a} + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1+a}} = 1.$$

To var pārbaudīt ar tiešiem pārveidojumiem:

$$\frac{1}{2+a} + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1+a}} = \frac{1}{2+a} + \frac{1+a}{2+a} = \frac{2+a}{2+a} = 1$$

92.29. Aplūkosim plaknē punktus ar sekojošām koordinātēm:

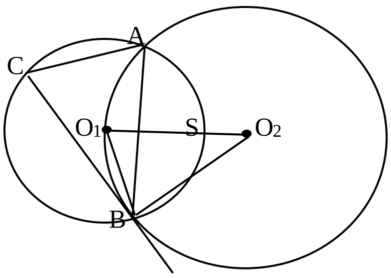
$$A(0,0),\quad X(x,3),\quad B(44,33).$$

Tad aplūkojamā izteiksme *S* ir vienāda ar nogriežņu *AX* un *BX* garumu summu. Tātad

$$S = AX + XB \le AB = \sqrt{44^2 + 33^2} = 55.$$

Vērtību 55 izteiksme S pieņems, ja punktu *X* izvēlēsimies uz nogriežņa *AB*; t.i., ja $x = 4$.

92.30. Skat. 13. zīm.



13. zīm.

$\angle O_1O_2B = \angle CBA$ kā leņķi ar savstarpēji perpendikularām malām.

$$\angle O_2O_1B = \overset{\smile}{SB} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AB} = \angle ACB.$$

Tātad trijstūri O_1O_2B un CBA ir līdzīgi. Tā kā trijstūris O_1O_2B ir vienādsānu, tad tāds ir arī trijstūris *CBA*. Tas nozīmē, ka $CB = BA$.

92.31. Tā kā $1991 = ka + 9$, tad $ka = 1982 = 2 \cdot 991$, kur abi reizinātāji ir pirmskaitļi. Tātad $a \in \{1, 2, 991, 1982\}$. Tā kā $a > 9$, tad der tikai skaitļi 991 un 1982.

92.32. Uzskatīsim, ka $a < b < c < d$.

Funkcija $P(x)$ punktā *a* maina zīmi no "+" uz "-". Tātad $P'(a) < 0$.

Funkcija $P(x)$ punktā *b* maina zīmi no "-" uz "+". Tātad $P'(b) > 0$.

Tā kā $P'(x)$ ir nepārtraukta funkcija, tad intervālā (a, b) tai ir sakne.

Līdzīgi pamato, ka funkcijai $P'(x)$ ir saknes intervālos (b, c) un (c, d).

92.33. Zebra to var izdarīt; gājienu secība parādīta 14. zīmējumā.

12	16	9	13
6	2	7	3
11	15	10	14
5	1	8	4

14. zīm.

92.34. Nē, ne noteikti. Pretpiemērs: ārējā piramīdā *ABCD* šķautnes *AB*, *AC*, *BC* izvēlas ļoti īsas, bet *AD*, *BD*, *CD* garas; bet iekšējās piramīdas divas virsotnes novieto tuvu punktam *D*, bet pārējās divas tuvu trijstūrim *ABC*. Rezultātā Ārējai piramīdai ir 3 garas šķautnes, bet iekšējai 4 garas šķautnes. Pārējo šķautņu garumi uz nevienādību neietekmē.

92.35. Trijstūrī *ABC* izpildās nevienādības $\angle A < \angle B < \angle C$.
Tā kā $90° > \angle B > 90° - \angle A$, tad $\cos B < \cos(90° - A) = \sin A$.
Līdzīgi $\cos A < \sin B$. Tāpēc $(1 - \cos A)(1 - \cos B) > (1 - \sin A)(1 - \sin B)$, no kurienes pēc pārveidojumiem iegūstam

$$\sin A + \sin B > \cos A + \cos B + \cos C.$$

Tā kā $\sin A = \dfrac{a}{2R}$ un $\sin B = \dfrac{b}{2R}$, tad $\sin A + \sin B = \dfrac{a+b}{2R}$.
No kosinusu teorēmas, izmantojot formulas $r = \dfrac{S}{p}$, $R = \dfrac{abc}{4S}$ un Herona formulu iegūstam $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \dfrac{r}{R}$.
No šejienes $\dfrac{a+b}{2R} > \dfrac{R+r}{R}$; tātad $\dfrac{a+b}{2} > R + r$. Tā kā $b > a$, tad iegūstam prasīto nevienādību $b > R + r$.

92.36. Doto nevienādību pārveidojam formā

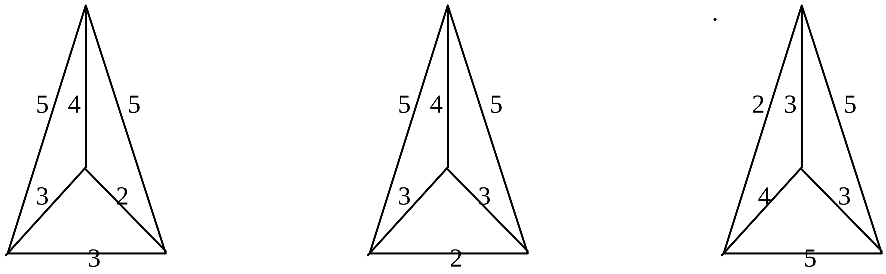
$$4 \sin x (1 - \cos x \cos 2x) > 0$$

Iekavas vērtība nevar būt negatīva; viegli pārbaudīt, ka tā nav 0. Tas nozīmē, ka $\sin x > 0$.

92.37. Apzīmēsim doto riņķa līniju rādiusus ar *r* un *R*. Tad $AB = r + R$ un trešās riņķa līnijas rādiuss ir $\dfrac{r+R}{2}$. No trapeces viduslīnijas garuma formulas seko, ka attālums no trešās riņķa līnijas centra – *AB* viduspunkta līdz leņķa malām ir $\dfrac{r+R}{2}$.

Tātad trešā riņķa līnija pieskaras leņķa malām.

92.38. No trijstūra nevienādībām seko, ka iespējams izveidot 3 dažādas piramīdas ar norādītajiem šķautņu garumiem (skat. 15. zīm.).



15. zīm.

92.39. Apskatām skaitļu virkni $x_n = a_n + 1$. Tad

$$x_{n+1} = a_n^2 + 2a_n + 1 = (a_n + 1)^2 = x_n^2 \quad \text{un} \quad x_n = 10 .$$

Tātad $x_{10} = 10^{1024}$ un $a_{10} = 10^{1024} - 1 = \underbrace{999\ldots9}_{1024}$.

92.40. No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko seko

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{xy}{z} \cdot \frac{xz}{y} \cdot \frac{yz}{x}} = 3 \cdot \sqrt[3]{xyz} \geq 3 .$$

Turklāt vienādība var izpildīties tikai, ja $xyz = 1$.

Tā kā *x*, *y*, *z* naturāli skaitļi, tad $x = y = z = 1$.