43. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1992./ 93. m.g.

ATRISINĀJUMI

93.1. Uzrakstīti 172 vārdi.

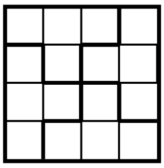
93.2. Nē, nevar. Sadalīsim kvadrātu četros kvadrātos 2×2. Katrā no tiem ierakstīto skaitļu reizinājumam jādalās ar 5; tas nozīmē, ka jābūt ierakstītam vismaz vienam skaitlim, kas dalās ar 5. Taču starp pirmajiem 16 skaitļiem ir tikai 3 skaitļi, kas dalās ar 5.

93.3. Tā kā $2\cdot2\cdot2=8<10$, tad apskatāmais reizinājums mazāks par

$$\underbrace{10\cdot10\cdot10\cdot\ldots\cdot10}_{100\quad \textit{reizes}},$$

tātad nesatur vairāk par 100 cipariem (uzrakstītais skaitlis ir mazākais 101-ciparu skaitlis).

93.4. Jā, var. Kvadrātu no 8×8 rūtiņām sagriežam četros kvadrātos ar izmēriem 4×4 rūtiņas. Katru 4×4 rūtiņu kvadrātu var sagriezt šādās figūrās tā, kā tas parādīts 6. zīm.



6. zīm.

93.5. Tā kā vienādība $a+a=a$ nav iespējama, jo $a\neq0$, tad $*$ apzīmē reizināšanu un $a=1$. No otrās vienādības secinām, ka $c=b+1$. Trešā vienādība norāda, ka $b\cdot(b+1)=d$. Tā kā d cipars, tad $b=2$, $c=3$, $d=6$.

Atliek aprēķināt dotās izteiksmes vērtību. Tā ir 20.

93.6. Neiekrāsotās rūtiņas izkrāso baltas un sarkanas šahveida kārtībā un baltajās rūtiņās patvaļīgā veidā ieraksta pāra skaitļus, bet sarkanajās nepāra skaitļus.

93.7. a) Jā, var: $1+2+3+4+5+6+7=28$.

b) Nē, nevar. Lai to pierādītu, sastādīsim tabulu, kurā ierakstīts skaitļa *n* pēdējais cipars un pirmo *n* skaitļu summas pēdējais cipars:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
S	1	3	6	0	5	1	8	6	5	5	6	8	1	5	0	6	3	1	0	0	1

Tā kā pēdējā kolonnā n un S pēdējie cipari ir tādi paši kā pirmajā, tad tālāk tabula periodiski atkārtosies. Tātad cipars 7 tās apakšējā rindā neparādīsies.

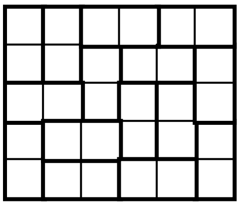
93.8. Skaitlis FFGG dalās ar 11 (dalījums ir F0G), bet neviens no kreisās puses reizinātājiem ar 11 nedalās; tā ir pretruna.

93. 9. Nē, nevar. Pieņemsim, ka visas summas ir vienādas ar S. Sasummēsim visas šīs summas un ievērosim, ka katrs skaitlis no 1 līdz 6 būs ieskaitīts divas reizes, jo katra šķautne pieder divām skaldnēm; iegūsim:

$$4S = 2 \cdot (1+2+3+4+5+6) = 42 .$$

No šejienes seko, ka $S = 10\frac{1}{2}$, bet S jābūt veselam skaitlim.

93.10. Skat., piemēram, 7. zīm.



7. zīm.

93.11. Visiem skaitļiem n izpildās vienādība

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Tāpēc

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{9\cdot 10} =$$

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

Pārējās daļas saīsinājās.

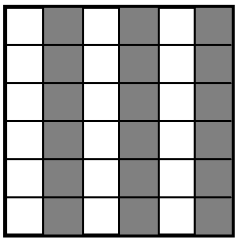
93.12. Jā, var. Ievērosim, ka 1982 dalās ar 4. Visus skaitļus sagrupēsim grupās pa četriem pēc kārtas ņemtiem skaitļiem. No šādiem skaitļiem var summā iegūt nulli:

$$+a - (a+1) - (a+2) + (a+3) = 0 .$$

Arī kopējā summa būs vienāda ar 0. Virkne izskatīsies šādi:

$$+1 - 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 + 9 - 10 - 11 + 12 \cdots.$$

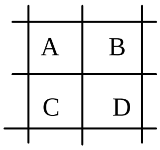
93.13. Mazākais daudzums rūtiņu, kāds jāiekrāso, ir 18. Var iekrāsot 18 rūtiņas, piemēram, kā parādīts 8. zīmējumā.



8. zīm.

Ar mazāku skaitu iekrāsoto rūtiņu nepietiek. Tiešām, sadalīsim kvadrātu 9 kvadrātos 2×2 . Ja iekrāsotas ne vairāk kā 17 rūtiņas, tad kādā no 9 kvadrātiem 2×2 iekrāsots ne vairāk par vienu rūtiņu. Atlikušajās 3 rūtiņās izvietosies stūrītis.

93.14. Nē, nevar. Pieņemsim pretējo, ka tas ir izdevies un aplūkosim tās blakus rūtiņas, kurās ierakstīto skaitļu *A* un *B* summa ir pāra skaitlis. Tām blakus atrodas rūtiņas, kurās ierakstīti skaitļi *C* un *D* (skat. 9. zīm.).

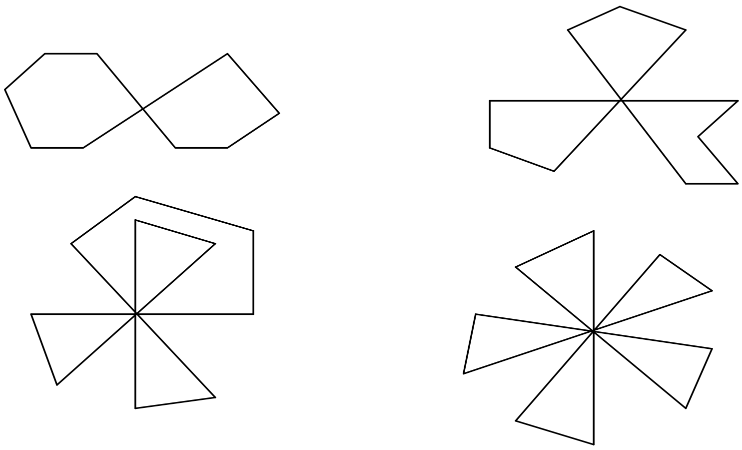


9. zīm.

Skaitļu *A* un *B* paritātes ir vienādas. Tā kā visām pārējām summām jābūt nepāra, tad skaitļu *C* un *D* paritātes ir pretējas skaitļu *A* un *B* paritātei; tātad vienādas. Bet tas nozīmē, ka skaitļu *C* un *D* summa arī ir pāra skaitlis; pretruna.

93.15. Nē. Komandu izspēlēto spēļu skaits var būt tikai 0, 1, 2, ... , 9. Ja visas 10 komandas izspēlējušas dažādu spēļu skaitu, tad visām norādītajām vērtībām (to ir 10) jābūt realizētām. Bet, ja kāda komanda ir izspēlējuši 9 spēles, tad tā ir spēlējusi ar visām komandām; tas nozīmē, ka nav komandas kurai ir 0 spēļu.

93.16. Vienā punktā var krustoties 2, 3, 4 vai 5 posmi (skat. 10. zīm).
Vairāk nekā 5 posmi krustoties vienā punktā nevar. Ja vienā punktā krustotos 6 posmi, tad kopā tiem ir 12 gali, kas jāsavieno; tātad vajadzīgi vēl vismaz 6 posmi, bet atlikusi tikai četri.



10. zīm.

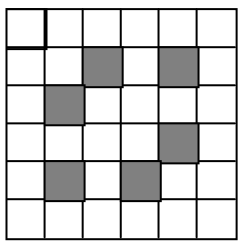
93.17. Jā. Piemēram, skaitlis 995^2 sākas ar 2 devītniekiem, bet skaitlis $\underbrace{99\ldots9}_{9}5^2$ sākas ar 9 devītniekiem.

Vispār skaitļa $\underbrace{99\ldots9}_{n}5$ kvadrāts sākas ar *n* devītniekiem. Tiešām,

$$\underbrace{99\ldots9}_{n}5^2 = \left(10^{n+1}-5\right)^2 = 10^{2n+2} - 2\cdot 5\cdot 10^{n+1} + 25 =$$

$$10^{2n+2} - 10^{n+2} + 25 = \underbrace{99\ldots9}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n}25.$$

93.18. Kvadrātu no 6×6 rūtiņām var sagriezt 6 taisnstūros ar izmēriem 2×3. Tā kā katrā taisnstūrī jāiekrāso vismaz viena rūtiņa, tad jāiekrāso vismaz 6 rūtiņas. Ar 6 rūtiņām pietiek; piemērs parādīts 11. zīmējumā.

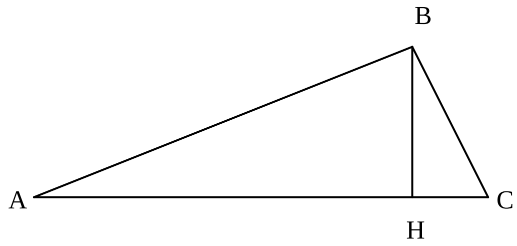


11. zīm.

93.19. Tā kā starp dotajiem skaitļiem ir 51 (nepāra skaits) nepāra skaitļu, tad iegūtā vērtība vienmēr būs nepāra skaitlis, tātad nevar būt vienāda ar 0.

93.20. Pieliekot pa vienai konfektei septiņos šķīvīšos, tad nākošajos septiņos šķīvīšos, utt. (8 reizes), rezultātā 10 šķīvīšos pievienots pa 5 konfektēm, bet vienā – 6 konfektes. Tā kā kopējais konfekšu skaits šķīvīšos mūs neinteresē, varam uzskatīt, ka vienā šķīvītī ielikta konfekte. Skaidrs, ka tādā gadījumā mēs varam izlīdzināt konfekšu skaitu visos šķīvīšos.

93.21. Skat 12. zīm.



12. zīm.

Izmantojot Pitagora teorēmu aprēķinām

$$AC = AH + HC = \sqrt{52^2 - 20^2} + \sqrt{25^2 - 20^2} = 64 .$$

93.22. Vismaz viens no skaitļiem x, y lielāks par 1; pretējā gadījumā būtu $\sqrt{x} \geq x$ un $\sqrt{y} \geq y$, tātad būtu $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq x + y$; iegūta pretruna.

Ja viens no skaitļiem x, y lielāks par 1, tad, protams, $x + y > 1$.

93.23. a) Ievietojot $x = 0$, iegūstam, ka c ir vesels skaitlis.

b) Nē, ne noteikti. Piemēram, kvadrāttrinoms $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ viesiem veseliem skaitļiem x pieņem veselas vērtības.

93.24. Apzīmējam dotos skaitļus dilstošā kārtībā ar $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4$. Katram i, $1 \leq i \leq 4$, iegūstam $(x_1 - x_i)(x_i - x_4) \geq 0$ (abi reizinātāji ir nenegatīvi), no kurienes seko

$$x_i(x_1 + x_4) \geq x_i^2 + x_1 x_4 .$$

Saskaitot šīs nevienādības pie $i = 1, 2, 3, 4$, iegūstam

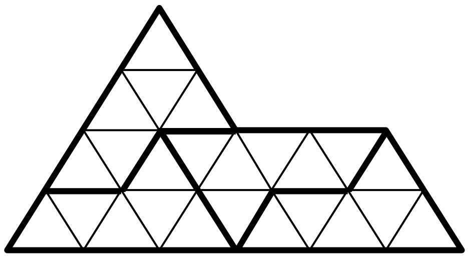
$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1 + x_4) \geq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 4x_1 x_4 .$$

Ievērojot uzdevuma nosacījumos dotās vienādības, iegūstam

$$0 \geq 1 + 4x_1 x_4 ,$$

no kurienes $x_1 x_4 \leq -\frac{1}{4}$.

93.25. Skat., piemēram, 13.zīm.



13.zīm.

93.26. Nē. Ja tas būtu iespējams, tad, saskaitot visām riņķa līnijām to pieskaršanās punktu skaitu, iegūtu $5\cdot 3=15$. Bet šai summai jābūt pāra skaitlim, jo katra pieskaršanās ieskaitīta divas reizes.

93.27. No nevienādības par divu skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko seko

$$x^4+y^4\geq 2\sqrt{x^4y^4}=2x^2y^2\geq 2x^3y^3.$$

Pēdējā nevienādība seko no tā, ka $x^2\leq 1$, un $y^2\leq 1$. Tiešām $x^2\leq 1\Rightarrow |x|\leq 1\Rightarrow x^2\geq |x^3|$, līdzīgi $y^2\geq |y^3|$; tātad $x^2y^2\geq x^3y^3$.

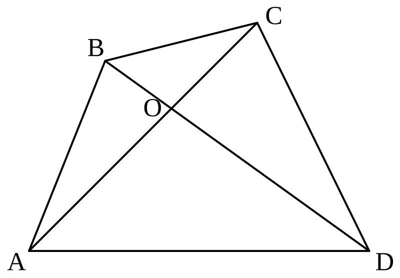
93.28. Noskaidrosim, kādi var būt šo skaitļu pēdējie cipari. Lai to izdarītu sastādīsim tabulu:

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**...**
$3^n(\mathrm{mod}10)$	3	9	7	1	3	...
$17^n(\mathrm{mod}10)$	7	9	3	1	7	...
$2\cdot 17^n(\mathrm{mod}10)$	4	8	6	2	4	...
$3^n+2\cdot 17^n(\mathrm{mod}10)$	7	7	3	3	7	...

Tālāk skaitļi periodiski atkārtojas. No tabulas redzam, ka skaitļa $3^n+2\cdot 17^n$ pēdējais cipars var būt tikai 3 vai 7, bet vesela skaitļa kvadrāts nevar beigties ar 3 vai 7.

93.29. Skat. 14. zīmējumu. Divu trijstūru laukumi ir vienādi. Tie nevar atrasties blakus. Tiešām, ja, piemēram $S_{ABO}=S_{CBO}$, tad $AO=CO$ un $S_{AOD}=S_{COD}$; tas nozīmē, ka trijstūru laukumi pieņem ne vairāk ka divas vērtības.

Tātad vienādi laukumi ir diviem pretējiem trijstūriem, teiksim *ABO* un *COD*. Tad vienādi laukumi ir arī trijstūriem *ABD* un *ACD* (pievienots trijstūris *AOD*). Tā kā šiem trijstūriem ir kopīgs pamats *AD*, tad punkti *B* un *C* atrodas vienādos attālumos no taisnes *AD*. Tas nozīmē, ka malas *AD* un *BC* ir paralēlas. Ievērojot, ka četrstūris nav paralelograms (tad visu trijstūru laukumi ir vienādi), iegūstam, ka *ABCD* ir trapece.



14. zīm.

93.30. Pieņemam, ka kreisā pleca garums ir *k*, labā pleca garums *l*, kreisā kausa masa *K* un labā pleca masa *L*. Iegūstam vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} k\cdot(K+A)=l\cdot(L+A_1) \\ k\cdot(K+B)=l\cdot(L+B_1) \\ k\cdot(K+C)=l\cdot(L+C_1) \\ k\cdot(K+A_2)=l\cdot(L+A) \\ k\cdot(K+B_2)=l\cdot(L+B) \end{cases}$$

Izslēdzot mainīgos *k*, *l*, *K*, *L*, iegūstam atbildi:

$$C=\frac{C_1\left(\sqrt{(A_1-B_1)(A_2-B_2)}+(A_2-B_2)\right)+A_1B_2-A_2B_1}{\sqrt{(A_1-B_1)(A_2-B_2)}+A_1-B_1}$$

93.31. Identitātē

$$(a+1)(b+1)(c+1)=$$
$$abc+(ab+ac+bc)+a+b+c+1$$

aizvietojot abc ar 1 un izdalot $(ab+ac+bc)$ ar *abc*, iegūstam prasīto vienādību.

93.32. Ja $n=3k$, tad $n+9$ dalās ar 3, un arī viss reizinājums dalās ar 3;

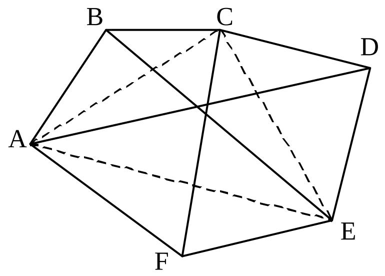
ja $n=3k+1$, tad $n+2$ dalās ar 3, un arī viss reizinājums dalās ar 3;

ja $n=3k+2$, tad $n+1$ dalās ar 3, un arī viss reizinājums dalās ar 3.

93.33. Skat. 15. zīmējumu. Ievērojam, ka

$$\angle CAD+\angle EAD+\angle ACF+\angle ECF+\angle CEB+\angle AEB=$$
$$\angle EAC+\angle ACE+\angle CEA=180°.$$

Tātad vismaz viens no šiem 6 leņķiem nepārsniedz $30°$; varam pieņemt, ka $\angle CAD\le 30°$. Tad $1>CD\ge AD\sin 30°=\frac{1}{2}AD$, no kurienes $AD<2$.



15. zīm.

93.34. Ievērojam, ka

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2 - x_3^2}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{x_n^2 - x_1^2}{x_n + x_1} =$$
$$(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \cdots + (x_n - x_1) = 0.$$

Tāpēc

$$\frac{x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_n + x_1} = \frac{x_2^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_3^2}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{x_1^2}{x_n + x_1},$$

un prasītais būs pierādīts, ja pierādīsim, ka

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{x_n^2 + x_1^2}{x_n + x_1} \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_n .$$

Tas seko no nevienādības

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} \geq \frac{a + b}{2}$$

(tā pārveidojas formā $(a - b)^2 \geq 0$),
pielietojot to skaitļu pāriem $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_n, x_1)$ un iegūtās nevienādības saskaitot.

93.35. Pilī var atrast istabu, uz katru pusi no kuras ir ne vairāk kā 250 istabas. To pierāda, izvēloties patvaļīgu istabu un, ja kādas durvis ved virzienā ar vairāk nekā 250 istabām, tad pavirzāmies pa šīm durvīm uz blakus istabu; atkārtojot šo procesu atrodam vajadzīgo istabu.

Nostādām šajā istabā sargu. Pa katrām šīs istabas durvīm var nokļūt kādā pils istabu grupā. No vienas istabu grupas otrā nonākt, nesastopot šo sargu nevar. Tāpēc atlikušie 8 sargi pēc kārtas var pārmeklēt šīs neatkarīgās istabu grupas (tajās ir ne vairāk par 250 istabām).

Katrā no šīm grupām sargi rīkojas analoģiski. Vienu no sargiem ievieto "centrālajā" istabā, un atlikušie 7 sargi pārmeklē atsevišķas istabu grupas, kurās tagad ir ne vairāk kā 125 istabas.

Tā turpinot redzam, ka 6 sargiem būs jāpārmeklē istabu grupas ar ne vairāk kā 64 istabām, 5 sargiem – 32 istabām, 4 sargiem – 16 istabām, 3 sargiem – 8 istabām, 2 sargiem – 4 istabām, 1 sargam – 2 istabām.

Skaidrs, ka sargs var noķert zagli divās blakus istabās, pārejot no vienas uz otru.

93.36. Visiem *x* izpildās nevienādības

$$\cos x \le 1 \quad \text{un} \quad 1 \le 1 + x^2,$$

turklāt, ja $x \ne 0$, tad $1 < 1 + x^2$.

Tātad, ja $x \ne 0$, $\cos x < 1 + x^2$. Atliek pārbaudīt vērtību $x = 0$; tā ir vienādojuma sakne.

93.37. Viegli pierādīt, ka ģeometriskās progresijas (visi locekļi pozitīvi) pirmā un ceturtā locekļu summa lielāka par otrā un trešā locekļa summu. Tiešām, jāpierāda, ka

$$b + bq^3 > bq + bq^2.$$

Nevienādība pārveidojas formā:

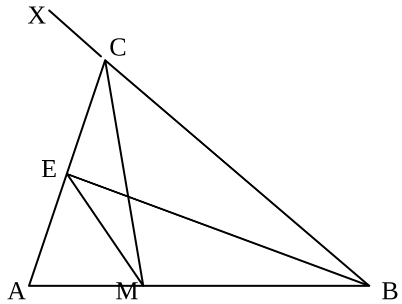
$$q^3 - q^2 - q + 1 > 0 \Leftrightarrow (q^2 - 1)(q - 1) > 0 \Leftrightarrow (q + 1)(q - 1)^2 > 0.$$

Tā ir patiesa, jo $q > 0$ un $q \ne 1$; abi reizinātāji pozitīvi.

Tāpēc vispirms sadalām priekšmetus pa divi un salīdzinām vienu pāri ar otru. No pierādītā seko, ka smagākais priekšmets būs smagākajā pārī.

Ar otro svēršanu salīdzinām abus smagākā pāra priekšmetus.

93.38. Novelkam leņķa *B* bisektrisi *BE* (skat. 16. zīm.).



16. zīm.

Tad $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MC}$. Tāpēc *ME* ir leņķa *AMC* bisektrise. Tātad *E* atrodas vienādos attālumos no *AB*, *CM*, *BC*, tātad atrodas uz leņķa *XCM* bisektrises.

Tātad $\angle BCA > \angle MCA = \angle XCA$; no šejienes seko, ka leņķis *BCA* ir plats.

93.39. Apzīmēsim naturāla skaitļa *x* visus pozitīvos dalītājus ar $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$, bet to reizinājumu ar $r(x)$. Ievērosim, ka $x = d_1 \cdot d_n = d_2 \cdot d_{n-1} = \ldots$. no šejienes iegūstam formulu

$$r^2(x) = (d_1 \cdot d_k) \cdot (d_2 \cdot d_{k-1}) \cdot \ldots \cdot (d_k \cdot d_1) = x^k .$$

Dots, ka $r(n) = r(m)$. Tātad eksistē tādi naturāli p un q, ka

$$n^p = m^q .$$

Varam uzskatīt, ka $p \geq q$. Tad $m^q = n^p \vdots n^q \Rightarrow m \vdots n$.

Ja m dalās ar n un nav vienāds ar n, tad, acīmredzami, m dalītāju reizinājums ir lielāks par n dalītāju reizinājumu. Tātad $m = n$.

93.40. Lūk piemērs, kad ballē ir 9 rūķīši. Apzīmēsim rūķīšus ar burtiem un izvietosim tos kvadrātā 3×3.

Do	Mo	A
B	C	Lo
G	E	F

Rūķīši vienā rindiņā saskūpstās.

Rūķīši vienā kolonnā samājas.

Rūķīši kopās {Do, C, F}, {Mo, Lo, G}, {A, B, E} sarokojas.

Rūķīši kopās {A, C, G}, {Mo, B, F}, {Do, E, Lo} apkampjas.

Viegli pārbaudīt, ka visi uzdevuma nosacījumi izpildās.