43. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1992./ 93. m.g.

UZDEVUMI

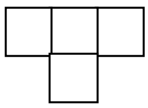
5. klase

93.1. Uzrakstām ar vārdiem skaitļus no 1 līdz 100:
viens, divi, trīs, ... , deviņdesmit deviņi, simts.
Cik pavisam vārdu uzrakstīts?

93.2. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Vai var katrā rūtiņā ierakstīt naturālu skaitli no 1 līdz 16 (katrā citu) tā, lai katrās 4 rūtiņās, kam ir kopīga virsotne, ierakstīto skaitļu reizinājums dalītos ar 5 ?

93.3. Pierādīt, ka trīssimt divnieku reizinājums nesatur vairāk par 100 cipariem.

93.4. Vai kvadrātu ar izmēriem 8×8 rūtiņas var sagriezt tādās figūrās, kāda parādīta 1. zīm.? (Figūras var būt novietotas arī citādi).



1. zīm.

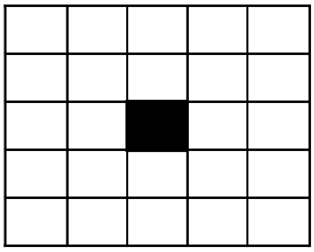
93.5. Smaragda karaļvalstī saskaitīšanu un reizināšanu apzīmē ar $*$ un $\circ$ (nav zināms, kuru darbību ar kuru simbolu). Ar *a*, *b*, *c*, *d* ir apzīmēti dažādi cipari, kas nav nulle. Lauva apgalvo, ka sekojošas vienādības

$$a*a=a$$
$$b\circ a=c$$
$$b*c=d$$

ir pareizas.
Aprēķināt vērtību $(a*b)\circ(c*d)$.

6. klase

93.6. Izrakstīt neiekrāsotajās rūtiņās (2. zīm.) skaitļus no 1 līdz 24 (katrā rūtiņā citu skaitli) tā, lai skaitļu summa katrās divās rūtiņās, kurām ir kopēja mala, būtu nepāra skaitlis.



2. zīm.

93.7. Vai, saskaitot visus naturālos skaitļus no 1 līdz kādai vietai (nevienu neizlaižot), var iegūt summu, kuras pēdējais cipars ir

a) 8,

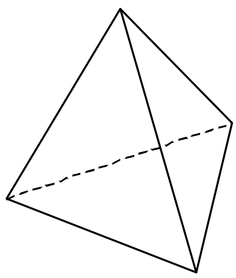
b) 7 ?

93.8. Ar vienādiem burtiem apzīmēti vienādi cipari, ar dažādiem burtiem – dažādi. Pierādīt, ka vienādība

JĀ×NĒ = FFGG

Nav pareiza.

93.9. Vai trijstūra piramīdas (skat. 3. zīm.) šķautnes (trijstūru malas) var sanumurēt ar skaitļiem no 1 līdz 6 tā, lai visiem 4 trijstūriem visu triju malu numuru summas būtu vienādas?



3. zīm.

93.10. Salikt taisnstūri ar izmēriem 5×6 rūtiņas no gabaliem ar izmēriem 1×2 rūtiņas tā, lai to nevarētu sadalīt divos taisnstūros, nepārgriežot nevienu gabalu. Pietiek paradīt vienu veidu, ka to izdarīt.

7. klase

93.11. Pierādīt, ka

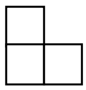
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}=\frac{9}{10}\ .$$

93.12. Rindā uzrakstīti skaitļi

1 2 3 4 5 ... 1992

Vai var katram no tiem priekšā pierakstīt "+" vai "-" zīmi tā, lai iegūtās summas vērtība būtu 0 ?

93.13. Kādu mazāko skaitu rūtiņu jāiekrāso kvadrātā ar izmēriem 6×6 rūtiņas, lai neiekrāsotajā daļā nevarētu ievietot tādu stūrīti (varbūt pagrieztu citā virzienā), kāds redzams 4. zīm. ?



4. zīm.

93.14. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Tajās ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 16 (visi dažādi). Katrām divām rūtiņām, kurām ir kopīga mala, aprēķinām tajās ierakstīto skaitļu summu. Vai var gadīties, ka tieši viena no tām (ne vairāk un ne mazāk) ir pāra skaitlis?

93.15. Turnīrā piedalās 10 komandas, katrai ar katru jāizspēlē viena spēle. Vai var gadīties tāds brīdis, kad visas komandas izspēlējušas dažādu spēļu skaitu?

8. klase

93.16. Slēgtā lauztā līnijā ir 10 posmi. Cik posmi var krustoties vienā punktā?

93. 17. Vai naturāla skaitļa kvadrāts var sākties tieši ar

a) diviem,

b) deviņiem

devītniekiem.

93.18. Kvadrāts sastāv no 6×6 rūtiņām. Kādu mazāko skaitu rūtiņu jāiekrāso, lai katrā taisnstūrī ar izmēriem 2×3 rūtiņas būtu iekrāsota vismaz viena?

93.19. Rindā uzrakstīti skaitļi

1 2 3 4 5 ... 100 101.

Vai var katram no tiem priekšā pierakstīt "+" vai "-" zīmi tā, lai iegūtās summas vērtība būtu 0 ?

93.20. Uz 11 šķīvīšiem novietotas konfektes; šķīvīši izvietoti pa apli. Ar vienu gājienu atļauts 7 pēc kārtas ņemtos šķīvīšos pievienot pa konfektei.
Pierādīt, ka ar šādiem gājieniem var panākt, lai konfekšu skaits visos šķīvīšos būtu vienāds.

9. klase

93.21. Trijstūrī divu malu garumi ir 52 cm un 25 cm, bet augstuma garums, kas novilkts no to kopīgās virsotnes, ir 20 cm.
Aprēķināt trešās malas garumu.

93.22. Dots, ka $\sqrt{x}+\sqrt{y}<x+y$. Pierādīt, ka $x+y>1$.

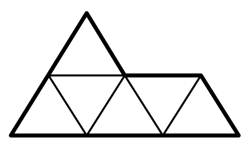
93. 23. Katrai veselai kvadrāttrinoma ax^2+bx+c vērtība ir vesels skaitlis.

a) Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem a, b, c ir vesels.

b) Vai noteikti visi šie skaitļi ir veseli?

93.24. Dots, ka $a+b+c+d=0$ un $a^2+b^2+c^2+d^2=1$.
Pierādīt, ka no skaitļiem a, b, c, d var izvēlēties divus, kuru reizinājums nav lielāks par $\left(-\frac{1}{4}\right)$.

93.25. Figūra (skat. 5. zīm.) sastāv no 6 vienādiem vienādmalu trijstūriem. Kā to sagriezt 4 vienādās daļās?



5. zīm

10. klase

93.26. Vai var uzzīmēt 5 riņķa līnijas tā, ka katra no tām pieskaras tieši trim citām?

93.27. Dots, ka $x^2 + y^2 = 1$. Pierādīt, ka $x^4 + y^4 \geq 2x^3y^3$.

93.28. Dots, ka n – naturāls skaitlis. Pierādīt, ka $3^n + 2 \cdot 17^n$ nav nekāda naturāla skaitļa kvadrāts.

93.29. Diagonāles sadala izliektu četrstūri 4 trijstūros. Šo trijstūru laukumiem ir 3 dažādas vērtības. Pierādīt, ka četrstūris ir trapece.

93.30. Doti sviras svari. To pleci ir dažāda garuma un svaru kausiem ir dažādas masas. Novietojot priekšmetus *A*, *B*, *C* uz kreisā svaru kausa, tie attiecīgi tiek līdzsvaroti ar masām A_1, B_1, C_1 uz labā kausa. Novietojot priekšmetus *A*, *B* uz labā svaru kausa, tie attiecīgi tiek līdzsvaroti ar masām A_2, B_2 uz kreisā kausa. Atrast priekšmeta *C* patieso masu.

11. klase

93.31. Dots, ka $abc = 1$. Pierādīt, ka

$$(a+1)(b+1)(c+1) = 2 + a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

93.32. Pierādīt, ka katram naturālam n skaitlis

$$(n+1)(n+9)(n+9)(n+2)$$

dalās ar 3.

93.33. Izliekta sešstūra *ABCDEF* visu malu garumi mazāki par 1 cm. Pierādīt, ka vismaz viena no diagonālēm *AD*, *BE*, *CF* īsāka par 2 cm.

93.34. Skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ir pozitīvi. Pierādīt, ka

$$\frac{x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_n + x_1} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2}.$$

93.35. Pilī ir 500 istabas. No katras istabas var aiziet uz katru. Starp katrām divām istabām nav vairāk par vienām durvīm. Ja starp divām istabām ir durvis, tad no vienas istabas var aiziet uz otru tikai pa šīm durvīm.

Pierādīt, ka 9 sargi var noķert pilī ielavījušos zagli. (Zaglis skaitās noķerts, ja sargs nonāk ar to vienā istabā.)

12. klase

93.36. Atrisināt vienādojumu

$\cos x = 1 + x^2$

93.37. Četru pēc ārējā izskata vienādu priekšmetu masas veido ģeometrisko progresiju, kas nav konstanta. Atrast smagāko priekšmetu, veicot 2 svēršanas uz sviras svariem bez atsvariem.

93.38. Uz trijstūra malas *AB* ņemts tās iekšējs punkts *M*. Zināms, ka $\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC}$. Pierādīt, ka leņķis *ACB* ir plats.

93.39. Katram no skaitļiem m un n aprēķināja tā visu pozitīvo dalītāju reizinājumu; šie reizinājumi izrādījās vienādi. Pierādīt, ka $m = n$.

93.40. Rūķīšu ziemassvētku ballē katri divi rūķīši sasveicinās, vai nu pamājot viens otram, vai sarokojoties, vai saskūpstoties, vai apkampjoties. Do saskūpstījās ar Mo, bet nesaskūpstījās ar Lo. Lai kurus trīs rūķīšus mēs izvēlētos, tie vai nu visi savā starpā sasveicinās vienā veidā, vai arī visas trīs sasveicināšanās ir dažāda veida. Parādiet, ka ballē varēja piedalīties 9 rūķīši.