44. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1993./ 94. m.g.

ATRISINĀJUMI

94.1. Jā, var. Piemēram, ņemam divus kvadrātus no 3×3 rūtiņām; pirmajam izgriežam stūra rūtiņu, bet otrajam – malas vidējo rūtiņu. Protams, ka iegūtās figūras nav vienādas.

94.2. a) Nē. No desmit pēc kārtas ņemtiem skaitļiem tieši 5 ir nepāra skaitļi; tātad šo desmit skaitļu summa ir nepāra skaitlis, bet 1000 ir pāra skaitlis.

b) Nē. Desmit pēc kārtas ņemtu skaitļu pēdējie cipari ir visi cipari no 0 līdz 9; tātad desmit pēc kārtas ņemtu skaitļu summas pēdējais cipars ir skaitļa

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$

pēdējais cipars; tātad 5.

c) Jā: $100+101+102+\cdots109=1045$.

94.3. Tādi, piemēram, ir skaitļi 1, 4, 6, 10.

94.4. Nē. Sadalīsim uzrakstītos skaitļus 200 grupās pa pieciem pēc kārtas ņemtiem skaitļiem. Katrā no grupām jābūt vismaz diviem skaitļiem, kas dalās ar 3; tātad kopā jābūt vismaz 400 skaitļiem, kas dalās ar 3, bet starp pirmajiem 1000 skaitļiem ir tikai 333 skaitļi, kas dalās ar 3.

94.5. Nē, nevar. Izkrāsojam rūtiņas šaha galdiņa kārtībā; tad abi vieninieki atrodas uz vienas (teiksim, melnās) krāsas laucinięm.

Tātad sākumā skaitļu summa, kas atrodas melnajos lauciņos, ir 2, bet sākumā skaitļu summa, kas atrodas baltajos lauciņos ir nulle. Ar katru gājienu gan melnajās, gan baltajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summas palielinās par 1 katra. Tātad tās nevar kļūt vienādas.

(Ja visi skaitļi vienādi, tad abas summas arī ir vienādas.)

94.6. Skaitļu ciparu reizinājums ir nulle, ja kaut viens no tā cipariem ir nulle.

Atradīsim, cik starp pirmajiem 1000 skaitļiem ir tādu, kuri nesatur ciparu 0.

Ir 9 tādi vienciparu skaitļi;

ir $9\times9=81$ tādi divciparu skaitļi;

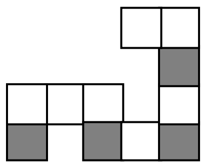
ir $9\times9\times9=729$ tādi trīsciparu skaitļi.

Kopā šādu skaitļu ir $9+81+729=819$. Pārējie $1000-819=181$ satur nulles.

Tātad nulli ieguva 181 reizi.

94.7. Nē, nevar. Visu kolonnu reizinājumu reizinājumam jābūt vienādam ar visu rindu reizinājumu reizinājumu (jo tie abi ir vienādi ar visu tabulā ierakstīto skaitļu reizinājumu).
Taču tie nevar būt vienādi, jo pirmais dalās ar 3, otrais – nē.

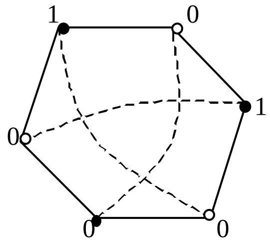
94.8. Atbilde parādīta 8.zīmējumā.



8.zīm.

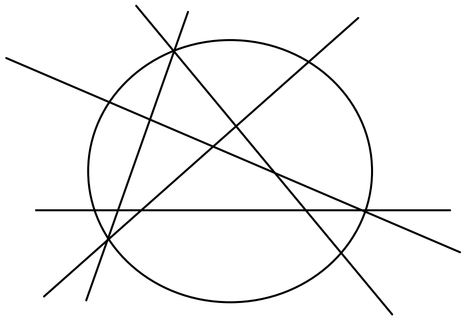
94.9. Pieņemsim pretējo. Palūgsim piecelties kājās votus un šillus. Starp katriem diviem sēdošajiem tagad ir vismaz viena brīva vieta. Tā kā voti un šilli nesēdēja blakus, tad divu brīvu vietu blakus nav. Tāpēc aizņemtās un brīvās vietas atrodas pamīšus; tātad kopā jābūt pāra skaitam vietu. Pretruna.

94.10. Nē. Izkrāsojam virsotnes, kā parādīts 9. zīm. Ar katru gājienu par 1 palielinās gan melnajās, gan baltajās virsotnēs ierakstīto skaitļu summas. Sākuma melnajās virsotnēs ierakstīto skaitļu summa ir 2, bet baltajās virsotnēs ierakstīto skaitļu summa ir 0. Tātad tās nekad nekļūs vienādas, bet, ja visās virsotnēs ierakstītie skaitļi būtu vienādi, tad arī abām summām jābūt vienādām.



9. zīm.

94.11. Jā, var. Piemērs parādīts 10. zīm.



10. zīm.

94.12. a) Nē, jo skaitlis dalās ar 5.

b) Nē, jo skaitlis dalās ar 13.

c) Jā, 1993 ir pirmskaitlis.

d) Nē, jo skaitlis dalās ar 11.

94.13. Nē, nevar būt. No dotā seko, ka

$$ad+bc=(ad+bc+ac+bd)-(ac+bd)=$$
$$(a+b)(c+d)-(ac+bd)=10\cdot 10-99=1.$$

Bet, tā kā doti naturāli skaitļi, tad $ad+bc\geq 2$. Iegūta pretruna.

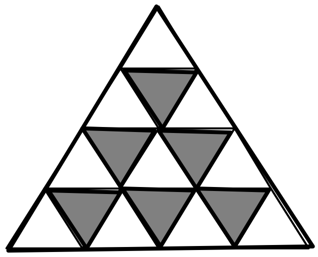
94.14. To var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 11. zīm.

1	2	1	2	1	2
4	1	4	1	4	1
1	2	1	2	1	2
4	1	4	1	4	1
1	2	1	2	1	2

11. zīm.

94.15. Nē. Izkrāsojam trijstūrīšus, kā parādīts 12. zīm. Ar katru gājienu par 1 palielinās gan melnajos, gan baltajos trijstūrīšos ierakstīto skaitļu summas.

Sākuma melnajos trijstūrīšos ierakstīto skaitļu summa ir 2, bet baltajos trijstūrīšos ierakstīto skaitļu summa ir 0. Tātad baltajos trijstūrīšos ierakstīto skaitļu summa nekad nekļūs lielāka par melnajos trijstūrīšos ierakstīto skaitļu summu, bet, ja visās virsotnēs ierakstītie skaitļi būtu vienādi, tad otrajai summai jābūt lielākai (balto trijstūrīšu ir vairāk)



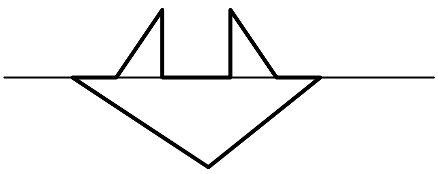
12. zīm.

94.16. Pārveidojot doto vienādību, iegūstam

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} \in \{-3,\ 3\}.$$

Noteikti jāparāda ar piemēriem, ka abas vērtības realizējas.

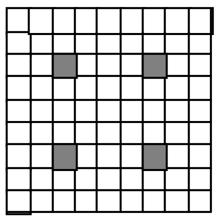
94.17. Skat., piemēram, 13. zīmējumu.



13. zīm.

94.18. Nē, nevar. Ja visi desmitstūra leņķi mazāki par 180°, tad desmitstūris ir izliekts, un tā ārējo leņķu summa ir 360°.
Katrā no četrām virsotnēm, kur iekšējais leņķis ir šaurs, ārējais ir lielāks par 90°; tātad kopējā ārējo leņķu summa iznāk lielāka par 360°. Pretruna.

94.19. Meklējamā kvadrāta stūra rūtiņas iekrāsotas (skat. 14. zīm.).



14. zīm.

Katrā gājienā tiek pieskaitīts 1 tieši vienai iekrāsotajai rūtiņai; tātad skaitļu summa iekrāsotajās rūtiņās pēc 96 gājieniem būs 4 + 96 = 100.

94.20. Katrs maršruts iet pa augstākais vienu horizontāli un vienu vertikāli. Ja maršrutu skaits nepārsniedz 8, tad atrastos vertikāle un horizontāle, pa kurām neiet neviens maršruts; uz šo ielu krustpunktu nevarētu aizbraukt.

Ar 9 maršrutiem pietiek. Piemēram, var ņemt visus maršrutus, katrs no kuriem satur pilnībā vienu vertikāli un visu augšējās horizontāles daļu pa labi no šīs vertikāles.

94.21. Ja ņemam vienādojumu $x^2+3x+2=0$, tad otrajam vienādojumam $2x^2+3x+1=0$ arī ir 2 saknes.

Ja ņemam vienādojumu $x^2+3x+0=0$, tad otrajam vienādojumam $3x+1=0$ ir 1 sakne.

Citu iespēju nav. Tā kā $a \neq 0$, tad mēs nevaram iegūt vienādojumu , kuram ir bezgalīgi daudz sakņu.

Tā kā abu vienādojumu diskriminanti ir vienādi ar b^2-4ac, tad, ja otrajam vienādojumam nebūtu sakņu, to nebūtu arī pirmajam.

Vēl atsevišķi jāaplūko gadījums $c=0$.

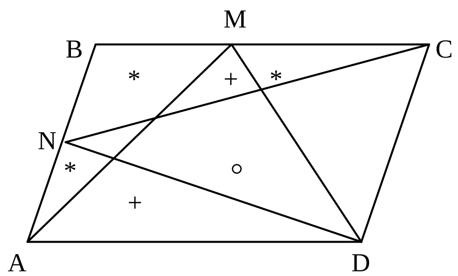
94.22. a) Jā, jo $16=2\cdot 8$ un 15! satur abus šos reizinātājus.

b) Nē, jo 41 ir pirmskaitlis, bet 40! nesatur pirmreizinātājus, lielākus par 40.

c) Jā, jo $1991=11\cdot 181$.

d) Nē, jo 1993 ir pirmskaitlis.

94.23. Skat. 15. zīmējumu.



15. zīm.

Ir spēkā vienādība

$$S_{AMD}=S_{BCN}+S_{NDA}\,.$$

(Abi laukumi ir puse no paralelograma laukuma).

Atņemot divus laukumus, kas atzīmēti ar +, iegūsim prasīto vienādību.

94.24. Pierādīsim mums nepieciešamu vienādību

$$\frac{1}{2^{-a}+1}+\frac{1}{2^a+1}=\frac{1}{\frac{1}{2^a}+1}+\frac{1}{2^a+1}=$$

$$\frac{2^a}{2^a+1}+\frac{1}{2^a+1}=1.$$

Grupējot locekļus pa divi no summas pretējiem galiem, iegūstam 1993 vieniniekus un vidējo locekli $\frac{1}{2^0+1}=\frac{1}{2}$.

Tātad meklējamā summa ir vienāda ar 1993,5.

94.25. Ja "Daugava" saņēma x punktus, tad visas citas komandas – ne vairāk kā $(x-1)$ punktus. Tā kā kopējais turnīrā izcīnīto punktu skaits ir 90, tad

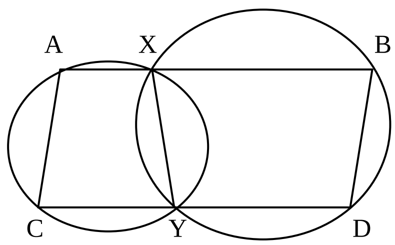
$$x+9(x-1)\geq 90.$$

No šejienes $x\geq 9{,}9$. Tā kā x ir vesels skaitlis, tad $x\geq 10$. Tātad "Daugava" varēja zaudēt ne vairāk kā 8 punktus, t.i. ne vairāk kā 4 spēlēs.

Ar piemēru jāparāda, ka tāda situācija ir iespējama.

94.26. Nē, jo $2^{123}+1=\left(2^{41}\right)^3+1^3$ dalās ar $2^{41}+1$.

94.27. Skat. 16. zīm.



16. zīm.

Apzīmējam riņķa līniju krustpunktus ar X un Y. Tad $AXYC$ un $YXBD$ ir riņķa līnijā ievilktas trapeces, tātad vienādsānu. No šejienes seko, ka

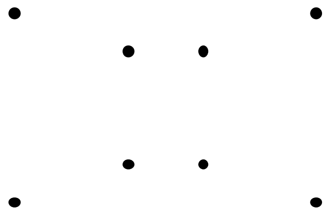
$$\angle CAX=\angle AXY=180°-\angle YXB=\angle BDY.$$

Tātad $BA\parallel CD$, un $ABDC$ ir paralelograms.

94.28. No nevienādības par vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko seko, ka

$$\begin{aligned}&(a+b+c)\cdot(x+y+z)\geq\\&3\cdot\sqrt[3]{abc}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{xyz}=\\&9\cdot\sqrt[3]{(ax)\cdot(by)\cdot cz}=\\&9\cdot\sqrt[3]{10\cdot 10\cdot 10}=90.\end{aligned}$$

94.29. Skat., piemēram, 17. zīm.



17. zīm.

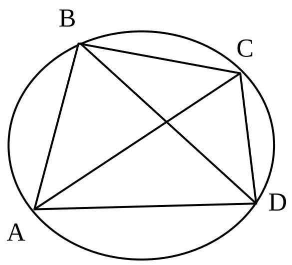
24.30. Ir iespējams, ka ir $(n-1)$ draudzība. Piemēram, ja viens skolēns draudzējas ar visiem pārējiem, tad uzdevuma nosacījumi izpildās.

Pierādīsim, ka tas ir mazākais iespējamais draudzību skaits. Ņemsim vienu skolēnu *A*. Pieņemsim, ka tas draudzējas ar $B_1, B_2, \ldots, B_k$.

Ja $k = n-1$, tad draudzību skaits ir ne mazāks par $(n-1)$.

Ja $k < n-1$, tad katram skolēnam *X* no pārējiem $n-(k+1)$ skolēniem , kas nedraudzējas ar *A*, jādraudzējas ar kādu no B_i (tikai šie skolēni var būt tie, kas draudzējas gan ar *A*, gan ar *X*). Tātad pavisam kopā ir ne mazāk par $k+n-(k+1) = n+1$ draudzībām.

24.31. Skat. 18. zīm.



18. zīm.

No dotā seko, ka ap *ABCD* var apvilkt riņķa līniju. Tātad $\angle BCA = \angle BDA$, kā ievilktie leņķi, kas balstās uz viena loka.

24.32. Dots, ka $n = 5k+3$. Tātad

a) $n-198 = 5k-195$ dalās ar 5;

b) $n^2 - 1 = 5k^2 + 30n + 8$ nedalās ar 5,

c) $n^2 + 1 = 5k^2 + 30n + 10$ dalās ar 5.

24.33. Uzrakstīsim nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko skaitļiem 1, 2,$\ldots$, $n-1$:

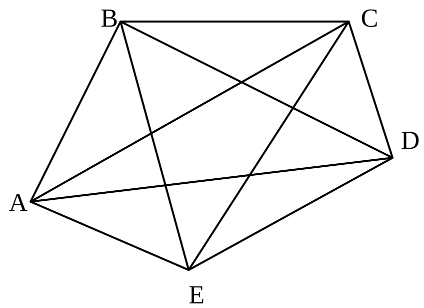
$$\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)} \Rightarrow$$

$$\frac{(n-1)\cdot n}{2\cdot(n-1)} \geq \sqrt[n-1]{(n-1)!} \quad\Rightarrow\quad \frac{n^{n-1}}{2^{n-1}} \geq (n-1)! \Rightarrow$$

$$n^{n-1}\cdot n \geq 2^{n-1}(n-1)!\cdot n \quad\Rightarrow\quad n^n \geq 2^{n-1}n!$$

Prasītā nevienādība pierādīta.

24.34. Skat. 19. zīm.



19. zīm.

Dotas paralelitātes

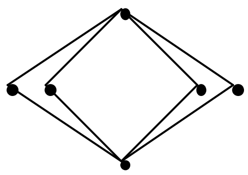
$$AB \parallel CE, \quad BC \parallel AD, \quad CD \parallel BE, \quad DE \parallel AC.$$

No tām seko atbilstošas trijstūru laukumu vienādības:

$$S_{AEB} = S_{ABC}, \quad S_{ABC} = S_{BCD}, \quad S_{BCD} = S_{CDE}, \quad S_{CDE} = S_{DEA}.$$

Tātad $S_{AEB} = S_{AED}$. No šīs trijstūru vienādības seko, ka trijstūriem ir vienādi augstumi; tātad $AE \parallel BD$.

24.35. Attēlosim skolēnus ar punktiem, bet draudzēšanos ar līnijām. Kā redzams 20. zīm., meklējamais skaits var būt $2n-4$.


20. zīm.

Viegli saprast, ka katrs skolēns draudzējas vismaz ar 2 citiem. Ja katrs draudzētos vismaz ar 4 citiem, tad draudzību skaits būtu ne mazāks par $\frac{4n}{2} = 2n$.

Ja ir skolēns *X*, kas draudzējas tikai ar diviem citiem (teiksim, ar *A* un *B*). tad *A* un *B* ir vienīgie, kas var sasaistīt *X* ar katru no $(n-3)$ atlikušajiem skolēniem; tāpēc draudzību nav mazāk par $2+2(n-3) = 2n-4$.

Līdzīgi gadījumā, ja *X* draudzējas ar 3 citiem skolēniem *A*, *B*, *C*, draudzību nav mazāk par $3+2(n-4)=2n-5$. Tomēr draudzību skaits varētu nepārsniegt $2n-5$ tikai tad, ja $n-4$ pārējie skolēni savā starpā nedraudzējas un ar katru no viņiem draudzējas tieši 2 no skolēniem *A*, *B*, *C*. Pieņemsim, ka ir skolēns *R*, ar kuru draudzējas *A* un *B*, un skolēns *S*, ar kuru draudzējas *B* un *C*. Tad priekš *R* un *S* nav uzdevumā minēto divu kopīgo draugu. Tāpēc visi $n-4$ "pārējie" skolēni draudzējas ar vieniem un tiem pašiem diviem no *A*, *B*, *C*. Bet tādā gadījumā atlikušajam no šiem trim skolēniem ir tikai viens draugs; tā ir pretruna.

24.36. Ja $\sin x = \sin y = 0$, tad $\sin nx = \sin ny = 0$, un prasītais pierādīts.
Ja $\sin x = \sin y \neq 0$, tad no vienādības

$$\sin 2x = \sin 2y \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin x \cos x = 2\sin x \cos x$$

seko, ka $\cos x = \cos y$. Tātad $y = x + 2\pi k$; bet tādā gadījumā

$$\sin 1993y = \sin(1993x + 2\pi k \cdot 1993) = \sin 1993x\,.$$

24.37. Šī summa ir vienāda ar

$$10 \cdot (1+2+\cdots+9) \cdot 1001 + 9 \cdot (1+2+\cdots 9) \cdot 110 = 495000\,.$$

24.38. Dotā punkta attālumus līdz trijstūra malām apzīmēsim ar d_1, d_2, d_3 un atbilstošās trijstūra malas ar a_1, a_2, a_3. Tad trijstūra laukumu var aprēķināt pēc šādām formulām:

$$S = \frac{1}{2} a_{\min} h_{\max} = \frac{1}{2} a_{\max} h_{\min} = \frac{1}{2}(a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3).$$

Tātad

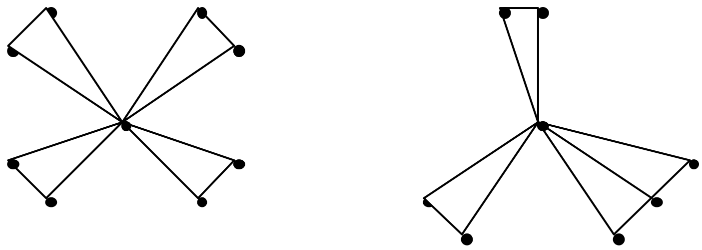
$$a_{\max} h_{\min} = a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 \leq (d_1 + d_2 + d_3) \cdot a_{\max} \Rightarrow$$
$$h_{\min} \leq (d_1 + d_2 + d_3).$$

Līdzīgi

$$a_{\min} h_{\max} = a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 \geq (d_1 + d_2 + d_3) \cdot a_{\min} \Rightarrow$$
$$h_{\max} \geq (d_1 + d_2 + d_3).$$

24.39. Jā eksistē. Piemēram, saliekam ar pamatiem kopā divas vienādas regulāras 10-stūra piramīdas un izveidojam mazus četrstūrveida šķēlumus pie katras otrās "pamatu gredzena" virsotnes.

24.40. Kā redzams 21. zīm., draudzību skaits var būt $n-1+\left[\frac{n}{2}\right]$.



$n = 2k$ $\qquad$ $n = 2k + 1$

21. zīm.

Šķirojam divas iespējas.

1) Ja katrs skolēns draudzējas ar vismaz 3 citiem, tad draudzību skaits nav mazāks par

$$\frac{3n}{2} > n - 1 + \left[\frac{n}{2}\right].$$

2) Eksistē tāds skolēns *A*, kas draudzējas tikai ar diviem citiem *B* un *C*. Tad *B* draudzējas ar *C* (lai apkalpotu pārus *AB* un *AC*). Katram no pārējiem skolēniem jādraudzējas vai nu ar *B*, vai *C* (lai būtu apkalpots pāris *AX*). Atzīmēsim katram no pārējiem skolēniem vienu minēto draudzību ar *B* vai *C*. Lai apkalpotu pārus *BX* un *CX*, katram no pārējiem (bez *A*, *B*, *C*) jābūt vēl vienai draudzībai; to skaits nav mazāks par $\frac{n-3}{2}$, t.i., nav mazāks par $\left[\frac{n-2}{2}\right]$. Kopā draudzību nav mazāk par $3 + (n-3) + \left[\frac{n-2}{2}\right] = n - 1 + \left[\frac{n}{2}\right]$.