46. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1995./96. m.g.

ATRISINĀJUMI

96.1. Jā, to var izdarīt, piemēram, šādi:

$$19 \to 26 \to 33 \to 40 \to 47 \to 74 \to 81 \to 88 \to 95 .$$

96.2. a) Ar 5, jo $1+2+\cdots 9=45$.

b) Ar 0, jo dotā summa sadalās 10 summās:

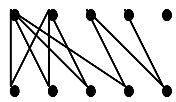
no 0 līdz 9, no 10 līdz 19, no 20 līdz 29, ... , no 90 līdz 99.

Visu šo 10 summu pēdējie cipari ir 5; tātad visas summas pēdējais cipars ir skaitļa

$$\underbrace{5+5+\cdots 5}_{10 \quad reizes}=50$$

pēdējais cipars; tātad nulle.

96.3. Jā, var būt. Skat, piemēram, 5. zīmējumu. Zēni un meitenes apzīmēti ar punktiem, draudzības – ar nogriežņiem.



5. zīm.

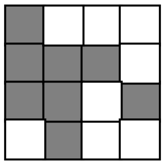
Pirmajā rindā atrodas meitenes, otrajā – zēni.

96.4. Iespējami divi gadījumi.

1) Pēc stundas velosipēdisti nebija viens otru sastapuši. Tā kā stundas laikā attālums samazinājās 2 reizes no 24 km līdz 12, tad nākošās pusstundas laikā tie pietuvosies viens otram attālumā 6 km.

2) Pēc stundas velosipēdisti pabraukuši viens otram garām; tātad kopā veikuši $24+12=36$ km. Nākošās pusstundas laikā tie attālināsies viens no otra vēl par 18 km, un attālums starp tiem būs $12+18=30$ km.

96.5. Jā, to var izdarīt; skat. 6. zīm.



6. zīm.

96.6. Saskaitāmie var būt šādi:

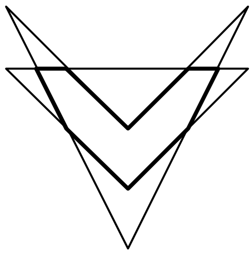
$$1+2+3+4+5+9=24,\quad 1+2+3+4+6+8=24,\quad 1+2+3+5+6+7=24.$$

Citu iespēju nav. Ja trešais pēc lieluma saskaitāmais ir lielāks par 3, tad summa ir ne mazāka par $1+2+4+5+6+7=25$. Tātad pirmie trīs saskaitāmie ir 1, 2 un 3.

Ja ceturtais saskaitāmais ir lielāks par 5, tad summa ir ne mazāka par $1+2+3+6+7+8=28$.

Aplūkojot divas iespējas (ceturtais saskaitāmais ir 4 vai 5), atrodam uzrādītos atrisinājumus.

96.7. Skat., piemēram, 7. zīmējumu.

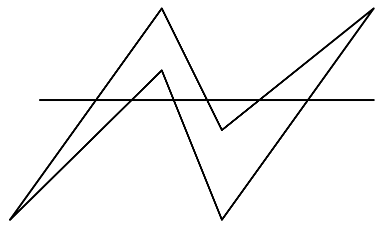


7. zīm.

96.8. Tā kā uzrakstītā skaitļa ciparu summa ir 15, tad, lai atlikušais skaitlis dalītos ar 9 ir jāizsvītro cipari, kuru summa ir 6. Protams, lai iegūtu lielāko skaitli ir jāizsvītro pēc iespējas mazāk cipari; tātad jāizsvītro divi trijnieki.

Tā kā vecākās šķiras ir nozīmīgākas, tad jānosvītro abi pēdējie trijnieki.

96.9. a) Jā, var. Skat., piemēram, 8. zīm.



8. zīm.

b) Nē, nevar. Pieņemsim, ka tāda taisne novilkta; tā sadala plakni divās pusplaknēs (kreisajā un labajā). Sanumurēsim 7-stūra virsotnes pēc kārtas. Pieņemsim, ka 7-stūra pirmā virsotne atrodas kreisajā pusplaknē; tad, lai mala, kas savieno pirmo un otro virsotni krustotu doto taisni, otrajai virsotnei jāatrodas labajā pusplaknē, līdzīgi pierāda, ka trešajai virsotnei jāatrodas kreisajā puslodē, ceturtajai – labajā, piektajai – kreisajā, sestajai – labajā, septītajai – kreisajā.

Bet tādā gadījumā mala, kas savieno septīto un pirmo virsotni nekrusto doto taisni.

96.10. Pārveidojot, iegūstām:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}=$$
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}\right)=$$
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=$$
$$\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}.$$

96.11. Ievedīsim apzīmējumus.

a – Jāņa soļa garums;

b – Pētera soļa garums;

Pēteris stundā noiet p soļus;

Jānis stundā noiet j soļus.

Dots, ka $a=0{,}9b$ un $j=1{,}11p$.

Pēteris stundā noiet attālumu bp.

Jānis stundā noiet attālumu $aj=0{,}9\cdot 1{,}11bp=0{,}999bp$.

Tātad Pēteris iet ātrāk.

96.12. Parādīsim, kā palielināt nomaksātās summas vērtību par vienu dilleru.

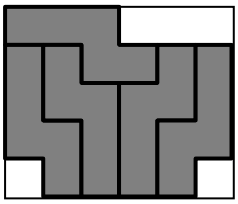
Ja summā ir 4-dilleru monētas, tad to aizvieto ar 5-dilleru monētu.

Ja 4-dilleru monētu nav, tad summā ir vismaz trīs 5-dilleru monētas; tad varam aizvietot trīs 5-dilleru monētas ar četrām 4-dilleru monētām.

Tādejādi, ja var samaksāt summu 1995 dilleri, tad var samaksāt arī jebkuru lielāku summu. Tā kā $1995 = 5 \cdot 399$, tad arī visas sekojošās summas ir samaksājamas.

$$1996 = 5 \cdot 396 + 4 \cdot 4, \quad 1997 = 5 \cdot 397 + 4 \cdot 3$$
$$1998 = 5 \cdot 398 + 4 \cdot 2, \quad 1999 = 5 \cdot 399 + 4 \cdot 1$$
$$2000 = 5 \cdot 400, \quad 2001 = 5 \cdot 397 + 4 \cdot 4$$
$$2002 = 5 \cdot 398 + 4 \cdot 3, \quad 2003 = 5 \cdot 399 + 4 \cdot 2$$
$$2004 = 5 \cdot 400 + 4 \cdot 1, \quad 2005 = 5 \cdot 401.$$

96.13. Tā kā taisnstūrī ar izmēriem 5×6 ir 30 rūtiņas, bet dotā figūra aizņem 5 rūtiņas, tad nevar izgriezt vairāk par 6 figūrām. Ja izgrieztas būtu 6 figūras, tad visām rūtiņām jābūt aizpildītām. Mēģinot aizpildīt no stūra visas rūtiņas, redzam, ka tas nav iespējams. Kā izgriezt 5 figūras, parādīts 9. zīmējumā.



9. zīm.

96.14. Apzīmēsim ar *d* doto skaitļu lielāko kopīgo dalītāju. Tad doto skaitļu starpība 8 dalās ar d; tas nozīmē, ka *d* ir 1, 2, 4 vai 8. Tā kā 19951995 ir nepāra skaitlis, tad *d* arī jābūt nepāra skaitlim. Tas nozīmē, ka $d = 1$.

96.15. Vispirms aplūkosim piemēru, kad ar 4 platformām nepietiek. Pieņemsim, ka mums ir 13 kastes un katra sver $\frac{10}{13}$ t. Ja šī krava sakrauta 4 platformās, tad vismaz vienā platformā ir vismaz 4 kastes (jo $4 \cdot 3 < 13$); bet tad šajā platformā sakrautās kravas svars ir ne mazāks par $4 \cdot \frac{10}{13} = \frac{40}{13} > 3$ t.

Pierādīsim, ka ar 5 platformām pietiek. Krausim katrā no 5 platformām kravu, kamēr tajās vēl var ielikt kādu kasti. Ja platformā iekrautās kravas svars nepārsniedz 2 t, tad tajā var vēl ievietot jebkuru kasti. Tātad 5 platformās var iekraut vismaz $2 \cdot 5 = 10$ t kravas.

96.16. No vienādības

$$2^{1995}+2^{1996}+2^{1997}+2^{1998}=$$
$$2^{1995}\cdot(1+2+4+8)=2^{1995}\cdot 15$$

seko, ka dotais skaitlis dalās ar 15.

96.17. Jā, tā var gadīties; piemēram, ņemsim

vienu balto skaitli 1;

vienu sarkano skaitli 0;

vienu melno skaitli 11;

simts zaļos skaitļus 10.

Redzam, ka balto skaitļu vidējais aritmētiskais lielāks par sarkano skaitļu vidējo aritmētisko un melno skaitļu vidējais aritmētiskais lielāks par zaļo skaitļu vidējo aritmētisko.

Balto un melno skaitļu vidējais aritmētiskais ir $\frac{1+11}{2}=6$.

Sarkano un zaļo skaitļu vidējais aritmētiskais ir

$$\frac{0+\underbrace{10+10+\cdots+10}_{100}}{101}=\frac{1000}{101}.$$

Redzam, ka tas ir lielāks par 6.

96.18. Ievērosim, ka

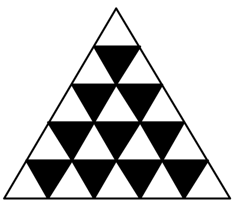
$$\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=$$
$$(100a+10b+c)+(100b+10b+a)+(100c+a+b)=$$
$$111\cdot(a+b+c)=3\cdot 37\cdot(a+b+c).$$

Tātad

$$\overline{bca}+\overline{cab}=3\cdot 37\cdot(a+b+c)-\overline{abc}$$

dalās ar 37.

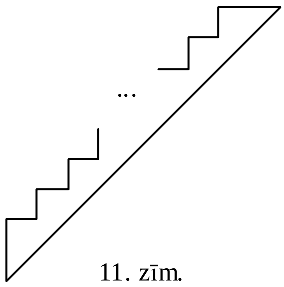
96.19. Izkrāsosim trijstūrīšus baltā un melnā krāsā, kā parādīts 10. zīmējumā.



10. zīm.

Mušu skaits, kas atrodas baltajos trijstūros ir par 5 lielāks nekā mušu skaits, kas atrodas melnajos trijstūros. Ja muša nolaižas blakus trijstūrī, tad tā nolaižas pretējas krāsas trijstūrī. Tātad vismaz 5 mušas no baltajiem trijstūriem nolaidīsies baltajos trijstūros (nepietiks vietu melnajos trijstūros); tas nozīmē, ka šīs mušas atgriezīsies iepriekšējos trijstūros.

96.20. Kā redzams 11. zīmējuma paralēlo malu skaits var būt 997.



11. zīm.

Parādīsim, ka tas nevar būt lielāks. Pieņemsim, ka kādam daudzstūrim ir 998 malas, kas visas paralēlas taisnei *t*. Izvēlēsimies vienu malu, kas nav paralēla *t*. Atlikušās 1994 malas sadalīsim 997 blakus esošu malu pāros. Tā kā $998 > 997$, tad atradīsies divas no 998 paralēlajām malām, kas pieder vienam pārim. Bet blakus malas nevar būt paralēlas – pretruna.

96.21. Pārveidojot, iegūstam

$$\frac{c-b}{a}+\frac{a-c}{b}+\frac{b-a}{c}=$$

$$\frac{c-b}{a}+\frac{c\cdot(a-c)+b\cdot(b-a)}{bc}=$$

$$\frac{c-b}{a}+\frac{ca-c^2+b^2-ba}{bc}=$$

$$\frac{c-b}{a}+\frac{a\cdot(c-b)-(c+b)\cdot(c-b)}{bc}=$$

$$\frac{(c-b)\cdot(bc+a^2-ac-ab)}{abc}=$$

$$\frac{(a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a)}{abc}.$$

96.22. Vispirms uzliekam uz viena svaru kausa baltu lodīti, bet uz otra – sarkanu.

1) Ja svari ir līdzsvarā, tad vieglākā lodīte ir starp zaļajām; ar vienu svēršanu, salīdzinot zaļās lodītes, atrodam vieglāko.

2) Ja svari nav līdzsvarā, tad vieglākā lodīte ir vai nu tā, kas atrodas uz vieglākā svaru kausa (teiksim baltā), vai otra no sarkanajām; salīdzinot šīs lodītes, atrodam vieglāko.

96.23. Dots, ka

$$\overline{ab} + \overline{ba} = n^2 .$$

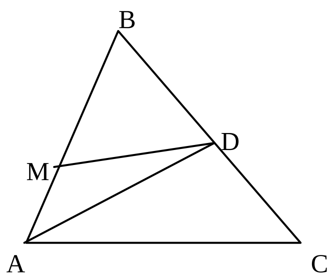
Tātad $n^2 = \overline{ab} + \overline{ba} = 11 \cdot (a+b)$. Tas nozīmē, ka n dalās ar 11; tā kā

$$11 \cdot (a+b) \le 11 \cdot 18 ,$$

tad $n = 11$. Tas nozīmē, ka $a + b = 11$; rezultātā iegūstam šādus skaitļus:

29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

96.24. Skat. 12. zīm.



12. zīm.

No dotā seko

$$\angle MDC + \angle MAC = \angle MDC + \angle MDB = 180° .$$

Tātad ap četrstūri *AMDC* var apvilkt riņķa līniju.

Tā kā ievilktie leņķi $\angle MAD$ un $\angle DAC$ ir vienādi, tad tie balstās uz vienādām hordām *DM* un *DC*.

96.25. Pārveidojot, iegūstam

$$\left(\frac{2a}{b}+1\right)\cdot\left(\frac{2b}{a}+1\right) =$$

$$4 + \frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} + 1 = 5 + 2 \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \ge$$

$$5 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 9.$$

Tika izmantota nevienādība starp divu skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

96.26. Dotās nevienādības var pārrakstīt šādā veidā

$$\begin{cases} f(-1) = a - b + c > -1 \\ f(0) = c < 0 \\ f(1) = a + b + c > 2. \end{cases}$$

Saskaitot pirmo un otro nevienādību, iegūstam

$$(a - b + c) + (a + b + c) = 2a + 2c > 1.$$

Tā kā $c < 0$, tad $2a > 1 - 2c > 1$; tātad $a > 0$.

96.27. Ja dotā vienādība izpildās, tad $a > x$, $a > y$ un $a > z$. Naturāliem skaitļiem no šejienes seko nevienādības $a \geq x + 1$, $a \geq y + 1$ un $a \geq z + 1$.

Tātad

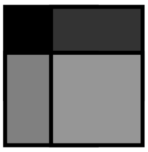
$$7^a = 7 \cdot 7^{a-1} = 4 \cdot 7^{a-1} + 7^{a-1} + 7^{a-1} + 7^{a-1} > 7^x + 7^y + 7^z.$$

Tas nozīmē, ka prasītā vienādība nav iespējama.

96.28. Prasītais seko no vienādības

$$\begin{aligned} &(a^2 + b^2) \cdot (x^2 + y^2) = \\ &a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 = \\ &(a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2) + (a^2y^2 + 2abxy + b^2x^2) = \\ &(ax - by)^2 + (ay + bx)^2 = (ay + bx)^2. \end{aligned}$$

96.29. Skaidrs, ka pietiek ar 4 šabloniem; skat. 13. zīm.



13. zīm.

Katru no iekrāsotajām figūrām var pārklāt ar šablonu.

Tā kā attālums starp jebkuriem diviem viena šablona punktiem nepārsniedz $2\sqrt{2}$ un $2\sqrt{2} < 3$, tad katru kvadrāta virsotni jāpārklāj ar savu šablonu; tātad vajadzīgi ir vismaz 4 šabloni.

96.30. Apzīmēsim skolēnu skaitu pulciņos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 atbilstoši ar a_1 a_2, a_3, a_4, a_5, bet skolēnu skaitu klasē ar n.

Tad $a_k > \frac{n}{2}$; tāpēc

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 > 5 \cdot \frac{n}{2} > 2n.$$

Tātad eksistē skolēns *A*, kas apmeklē vismaz 3 pulciņus (citādi "apmeklētību" skaits nepārsniegtu $2 \cdot n$).

Pieņemsim, ka *A* apmeklē pulciņus P_1, P_2, P_3. Tā kā

$$a_4 + a_5 > 2 \cdot \frac{n}{2} = n,$$

tad eksistē skolēns, kas apmeklē pulciņus P_4 un P_5.

Kopā ar skolēnu *A* tie veido prasīto pāri.

96.31. Ievērosim, ka

$$xy = \frac{(x+y)^2 - (x^2 + y^2)}{2} = \frac{a^2 - b}{2}.$$

Tātad

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) =$$
$$a^3 - 3\left(\frac{a^2 - b}{2}\right) \cdot a = \frac{3}{2}ab - \frac{1}{2}a^3.$$

96.32. Nē, neeksistē. Šādam reizinājumam jādalās ar 3, bet dotais skaitlis ar 3 nedalās.

96.33. Ja dotā vienādība izpildās, tad $\cos x \geq 0$ un $\sin x \geq 0$.

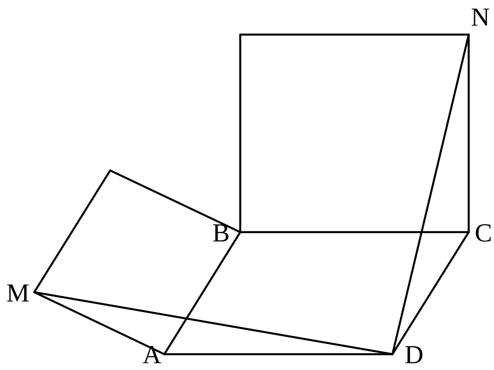
Tā kā $|\sin x| \leq 1$, tad $\sin x \leq \sqrt{\sin x} \leq \sqrt{\sin x + \cos x}$; taču no dotā seko, ka

$$\sin x \geq \sqrt{\sin x + \cos x}.$$

Atrisinājums varētu būt vienīgi, ja $\cos x = 0$, $\sin x = 1$.

Pārbaude parāda, ka šīs vērtības der; tātad $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

96.34. Skat. 14. zīm.



14.zīm.

No dotā seko, ka $NC = BC = AD$ un $MA = AB = CD$;

$\angle MAD = \angle DCN$, kā leņķi ar savstarpēji perpendikulārām malām.

Tātad trijstūri *MAD* un *NCD* ir vienādi.

Apzīmēsim paralelograma šauro leņķi ar α. Tad

$$\angle MDN = \angle ADC - (\angle ADM + \angle CDN) =$$
$$180° - \alpha - (\angle ADM + \angle CDN) = 180° - \alpha - (180° - \angle DCN) =$$
$$180° - \alpha - (180° - 90° - \alpha) = 90°.$$

Prasītais pierādīts.

96.35. Izvēlēsimies pilsētu *A*, no kuras var aizbraukt uz maksimālo daudzumu citu pilsētu. Ņemam patvaļīgu pilsētu *B*. Ja no *A* nevar aizbraukt uz *B*, tad ir vienvirziena ceļš no *B* uz *A* .

Tad no *B* var aizbraukt uz vairāk pilsētām nekā no *A* (uz visām tām, uz kurām var aizbraukt no *A*, un arī uz pašu *A*); tā ir pretruna.

Tātad *A* var kalpot par meklējamo pilsētu.

96.36. Ievērosim, ka $a\alpha = b\beta = c\gamma = 2 \cdot S$. Tātad

$$(a-\beta)(b-\gamma)(c-\alpha) =$$
$$\left(a - \frac{2S}{b}\right)\left(b - \frac{2S}{c}\right)\left(c - \frac{2S}{a}\right) =$$
$$\frac{(ab-2S)(bc-2S)(ac-2S)}{abc} =$$
$$\left(b - \frac{2S}{a}\right)\left(c - \frac{2S}{b}\right)\left(a - \frac{2S}{c}\right) =$$
$$(a-\gamma)(b-\alpha)(c-\beta).$$

96.37. Jā, dalās.

$$19^{95} + 95^{19} \equiv 1^{95} + (-1)^{19} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{3}.$$

96.38. Tā kā $|\sin x| \le 1$, tad no dotā seko, ka

$$|\sin\alpha| + |\sin\beta| + |\sin\gamma| \le 2 .$$

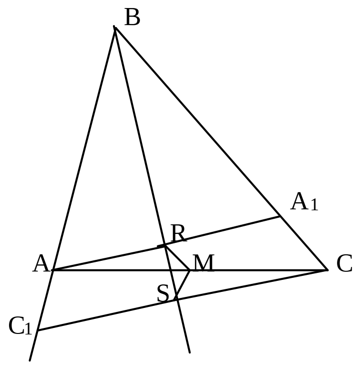
Tā kā $0 \le |\sin x|, |\cos x| \le 1$, tad $|\cos x| \ge \cos^2 x$ un $|\sin x| \ge \sin^2 x$. Tāpēc

$$|\sin x| + |\cos x| \ge \sin^2 x + \cos^2 x = 1 .$$

No šejienes

$$|\cos\alpha| + |\cos\beta| + |\cos\gamma| \ge$$
$$(1 - |\sin\alpha|) + (1 - |\sin\beta|) + (1 - |\sin\gamma|) =$$
$$3 - (|\sin\alpha| + |\sin\beta| + |\sin\lambda|) \ge 3 - 2 = 1.$$

96.39. Skat. 15. zīm.



15. zīm.

Tā kā BR ir trijstūra ABA_1 augstums un bisektrise, tad BR ir arī šī trijstūra mediāna; tātad R ir AA_1 viduspunkts. Tāpēc MR ir trijstūra AA_1C viduslīnija; un

$$MR = \frac{1}{2}CA_1 .$$

Līdzīgi pierāda, ka $MS = \frac{1}{2}AC_1$.

Tā kā C_1AA_1C ir vienādsānu trapece, tad prasītais pierādīts.

96.40. Piešķirsim kartiņām numurus $1;2;\ldots;2^n$ tādā kārtībā, kādā tām jāparādās beigās (no apakšas uz augšu). Apskatīsim sākotnējo sakārtojumu no apakšas uz augšu. Kartiņas numuri izvietojušies kaut kādā secībā. Sadalīsim tos monotoni augošos fragmentos; šādu fragmentu sākumā nav vairāk par 2^n. Pieņemsim, ka fragmentu skaits ir k. Sadalīsim kaudzīti divās daļās tā, lai augšējā daļā būtu $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ monotoni fragmenti. Pēc tam daļas apvienojam tā, ka abu daļu apakšējie monotonie fragmenti tagad veido vienu monotonu fragmentu, nākošie abu daļu monotonie fragmenti arī veido vienu monotono fragmentu nav vairāk par 2^{n-1}. Atkārtojot šādas operācijas, pēc n gājieniem būs 1 monotons fragments, t.i., kartiņas būs novietotas vajadzīgajā kārtībā.