49. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1998./99. m.g.

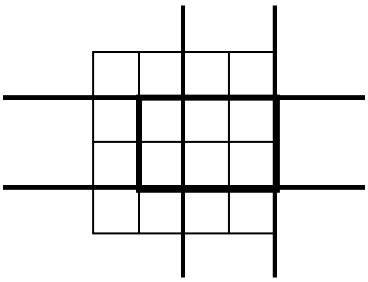
ATRISINĀJUMI

99.1. Var uzdot, piemēram, šādu jautājumu: "vai vairākums no Jums trim ir tāda paša tipa kā Tu ?".

Aplūkosim gadījumu, ja divi rūķīši ir patieši. Ja mums atbildēja patiesis, tad tas atbildēs "jā", jo starp rūķīšiem vairāk ir patiešu. Arī melis atbildēs "jā", jo viņš samelos (starp rūķīšiem vairākums ir patieši – cita tipa rūķīši nekā melis).

Līdzīgi pārliecināmies, ka situācijā, kad ir divi meļi, jebkurš rūķītis atbildēs "nē". Tātad,saņemot atbildi "jā", mēs zinām, ka patiešu ir vairāk, bet, saņemot atbildi "nē", ka meļu ir vairāk. Ievērojiet, ka mēs nenoskaidrojām, kāda tipa rūķītis mums atbildējis.

99.2. Katru taisnstūri viennozīmīgi nosaka divas vertikālās taisnes (taisnstūra malas) un divas horizontālās taisnes (taisnstūra malas), (skat. 5. zīm.).



5. zīm.

Divas vertikālās taisnes var izvēlēties 10 veidos: {(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)}. Arī divas horizontālās taisnes var izvēlēties 10 veidos. Tātad pavisam iespējams izveidot $10 \times 10 = 100$ taisnstūru, kuru visas malas iet pa rūtiņu līnijām.

99.3. Doto vienādību var pierakstīt šādā formā:

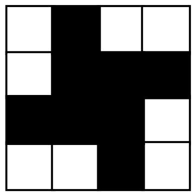
$$\overline{aa} + \overline{bcb} = \overline{deed}\,.$$

Pieskaitot trīsciparu skaitlim divciparu skaitli, iegūstam četrciparu skaitli; tas iespējams tikai, ja $d = 1$, $e = 0$ un $b = 9$. No pēdējiem cipariem secinām, ka $a = 2$. Tātad $\overline{deed} = 1001$, $\overline{aa} = 22$; no šejienes $\overline{bcb} = 979$.

Atbilde: $22 + 979 = 1001$.

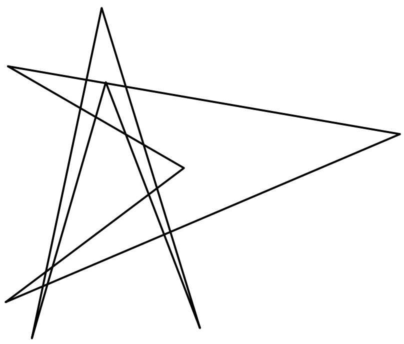
99.4. Katrā solā naudas daudzums (santīmos) dalās ar 3; tātad kopīgā summa nevar būt vienāda ar 1000 santīmiem, jo 1000 nedalās ar 3.

99.5. Jā, to var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 6. zīmējumā.



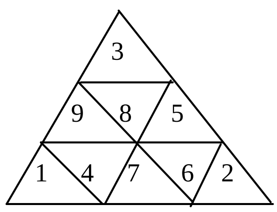
6. zīm.

99.6. Atrisinājums parādīts 7. zīmējumā.



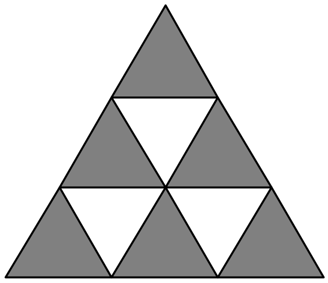
7. zīm.

99.7. Pavisam ir 9 summas. Starp šīm summām var būt 8 pirmskaitļi (skat. 8. zīm.)



8. zīm.

Visas 9 summas nevar būt pirmskaitļi. Ja visas summas ir pirmskaitļi, tad šīs summas ir nepāra skaitļi; tāpēc blakus esošie skaitļi ir dažādas paritātes skaitļi. Aplūkosim 9. zīmējumu.



9. zīm.

Tāpēc vienas paritātes skaitļi atrodas baltajos lauciņos, bet otras paritātes skaitļi – tumšajos lauciņos; bet tas nav iespējams, jo ir 5 nepāra skaitļi un 4 pāra skaitļi.

99.8. Puse ābolu aizņēma trešdaļu sākotnējā tilpuma. Tātad ceturtdaļa ābolu aizņem sestdaļu sākotnējā tilpuma. Sestdaļa sākotnējā tilpuma ir ceturtdaļa no palikušajām divām trešdaļām sākotnējā tilpuma.
Tātad kompota līmenis pazeminās par ceturtdaļu.

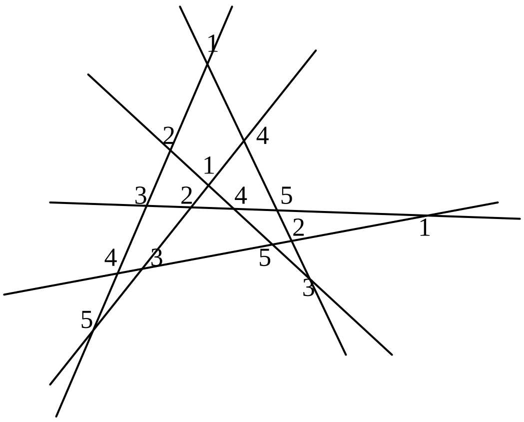
99.9. Tā kā $28 = 9 \cdot 3 + 1$, tad kāds no 9 nenulles cipariem skaitļa pierakstā sastopams vismaz 4 reizes. Atstājot šos 4 ciparus, iegūstam skaitli $\overline{aaaa}$, kas, acīmredzami, dalās ar 101.

99.10. Skaitļus no 100 līdz 899 apvienojam pāros: 100 un 899, 101 un 898, ... , $\overline{xyz}$ un $\overline{(9-x)(9-y)(9-z)}$. Viegli saprast, ka, ja pārī viens skaitlis ir uzpūtīgs, tad otrs ir kautrīgs, un otrādi. Tātad starp skaitļiem no 100 līdz 899 uzpūtīgo skaitļu skaits ir vienāds ar kautrīgo skaitļu skaitu.
Starp skaitļiem no 900 līdz 999 uzpūtīgu skaitļu nav, bet kautrīgi ir (piemēram, 909).
Tātad kautrīgo skaitļu ir vairāk.

99.11. Var uzrakstīt, piemēram, šādu vienādību:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)=0.$$

99.12. Atrisinājums parādīts 10. zīmējumā.



10. zīm.

99.13. Starp 10 pēc kārtas ņemtiem trīsciparu skaitļiem viens dalās ar 10; tātad šis skaitlis $\overline{ab0} = \overline{ab} \cdot 10$ ir divu divciparu skaitļu reizinājums.

No otras puses var uzrādīt 9 pēc kārtas ņemtus skaitļus 101, 102, ..., 109, kas nav divu divciparu skaitļu reizinājumi (tiešām, vienam no šiem reizinātājiem būtu jābūt ne lielākam par $\sqrt{109}$; vienīgais šāds divciparu skaitlis ir 10, bet dotie skaitļi ar 10 nedalās).

Tātad lielākais meklējamo skaitļu skaits ir 9.

99.14. Nē, nevar. Perimetru "ārējo" daļu summa ir 200, bet "iekšējo" perimetra daļu katrs posms ietilpst summā divas reizes; tātad perimetru summai ir jābūt pāra skaitlim, bet 1999 nav pāra skaitlis.

99.15. Nē, nevar. Ievērosim divas īpašības:

a) visi iegūtie skaitļi ir pāra skaitļi,

b) ja pēdējā gājienā izmantota reizināšana, tad iegūtais skaitlis dalās ar 4,

c) pāra skaitļu reizinājums ir ne mazāks par to summu; ja $x \le y$, tad

$$x + y \le 2y \le xy .$$

Tā kā 150 nedalās ar 4, tad pēdējā operācija bija saskaitīšana. Tātad iegūtais skaitlis nav lielāks par $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n} + \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{8-n} \le 2^7 + 2 < 150$.

Tiešām, ja reizinātāji satur ne vairāk par 6 reizinātājiem, tad summa nepārsniedz $2^6 + 2^6 = 128$; ja viens reizinājums satur 7 divniekus, tad summa ir vienāda ar $2^7 + |\, 2 = 130 < 150$.

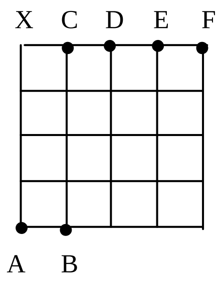
99.16. Vienādojot saucējus, pierādīsim identitāti:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1) - x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)} .$$

No šejienes iegūstam:

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}=$$
$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}\right)+\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}\right)+\left(\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+3}\right)=$$
$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+3}=\frac{3}{a(a+3)}.$$

99.17. Skat. 11. zīm.



11. zīm.

No paralelogramu īpašībām seko

$$\angle ACB+\angle ADB+\angle AEB+\angle AFB=$$
$$\angle XAC+\angle CAD+\angle DAE+\angle EAF=$$
$$\angle XAF=45°.$$

99.18. Apzīmēsim lāču skaitu ar n, bet kopējo apēsto aveņu daudzumu (spaiņos) ar m. Tad apēsto lāceņu daudzums (spaiņos) ir $n-m$. Pekainīša apēstais spainis satur $\frac{m}{4}$ spaiņus aveņu un $\frac{n-m}{6}$ spaiņus lāceņu. Tātad

$$\frac{m}{4}+\frac{n-m}{6}=1.$$

No šejienes seko, ka $m+2n=12$.

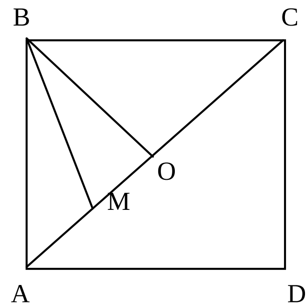
No uzdevuma nosacījumiem seko, ka n un m ir naturāli skaitļi; turklāt $m\le n$.. Pārbaude parada, ka der tikai vērtības $m=2$, $n=5$.

Tātad pavisam bija 5 lāči.

99.19. Uzvaru daudzums vienam tenisistam var būt 0, 1, 2, ..., 10. Tā kā ir 12 tenisisti, bet uzvaru skaits pieņem tikai 11 vērtības, tad var atrast divus tenisistus, kam ir vienāds uzvaru skaits. To no viņiem, kas uzvarējis savstarpējā spēlē apzīmēsim ar *A*, otru ar *B*. Ir jābūt tādam tenisistam, kas uzvarējis pret *A*, bet zaudējis pret *B*. Ja *A* būtu uzvarējis visus tos, ko uzvarējis *B*, tad *A* būtu vismaz par vienu uzvaru vairāk nekā *B*. Šo tenisistu varam izvēlēties kā *C*.

99.20. Piecstūrim ir piecas malas, bet trijstūri ir tikai četri. Tāpēc vienam trijstūrim malas atrodas uz divām piecstūra malām (skaidrs, ka uz blakus malām); bet šīs malas veido platu leņķi. Tāpēc prasītā sagriešana nav iespējama.

99.21. Skat. 12. zīm.



12. zīm.

Apzīmēsim kvadrāta diagonāles garumu ar *d* un nogriežņa OM garumu ar *x*. Tad

$$MA\cdot MC + MB\cdot MD =$$
$$\left(\frac{d}{2}-x\right)\left(\frac{d}{2}+x\right)+MB^2 =$$
$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2 = \frac{d^2}{2} = AB^2.$$

99.22. a) Piemēram, var ņemt skaitļus $\frac{2^2\cdot 3^2}{5}$, $\frac{2^2\cdot 5^2}{3}$, $\frac{3^2\cdot 5^2}{2}$.

b) *n* skaitļu gadījumā var izvēlēties šādus skaitļus:

$$\frac{p_1^2 p_2^2 \dots p_n^2}{p_i^3},\ \ i=1,2,\dots,n,\ \ p_1, p_2, \dots, p_n \text{ -- dažādi pirmskaitļi.}$$

99.23. Vienādojuma kreisā puse ir identiski vienāda ar 1; tātad uzrakstītā vienādība nav kvadrātvienādojums, bet vienādība $1=1$.

99.24. Ja Lutausis brauktu divreiz ātrāk, tad plkst. 13^{00} viņš satiktu Sprīdīti (kura ātrums ir sākotnējais). Tātad, ja Lutausis brauc ar sākotnējo ātrumu, bet Sprīdītis divreiz lēnāk nekā patiesībā, tad viņi satiktos 14^{00}. Tātad, braucot ar patiesajiem ātrumiem, plkst. 14^{00} Lutausis būs pusceļā starp Betu un Sprīdīti.

99.25. Ja rindā (kolonnā) ir n baltas un $8-n$ melnas figūriņas, tad šajā rindā (kolonnā) ir $n(8-n)$ draudzības. Tā kā $n(8-n)=16-(n-4)^2 \le 16$, tad katrā rindā (kolonnā) ir augstākais 16 draudzības, un kopējais draudzību skaits nepārsniedz $16\cdot 16=256$. Tas tiek sasniegts, ja figūriņas izvietotas, piemēram, šaha galdiņa krāsojuma kārtībā.

99.26. Ja m dalās ar n^2, tad m^2 dalās ar n^4; tātad dalās arī ar n^3.

99.27. Šos 10 punktus var izvietot, piemēram, uz tāda riņķa līnijas loka, kura leņķiskais lielums mazāks par $180°$.

99.28. Apzīmēsim rūķīšu skaitu ar *n*. Sākumā katru divu rūķīšu monētu skaitu starpība dalījās ar *n*. Viegli saprast, ka šī īpašība saglabājas, izdarot vienu pārdali, tātad saglabājas vienmēr. Tāpēc $81-64=17$ dalās ar *n*, un $n=1$ vai $n=17$. Tā kā ir vismaz divi rūķīši, tad $n=17$.

99.29. Ja kāds no skaitļiem *a*, *b*, *c* būtu 0, tad no vienādības seko, ka tie visi ir 0, bet tā nevar būt. Tāpēc doto vienādību var pārrakstīt kā

$$\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}.$$

Pieskaitīt visām izteiksmēm 1, iegūstam

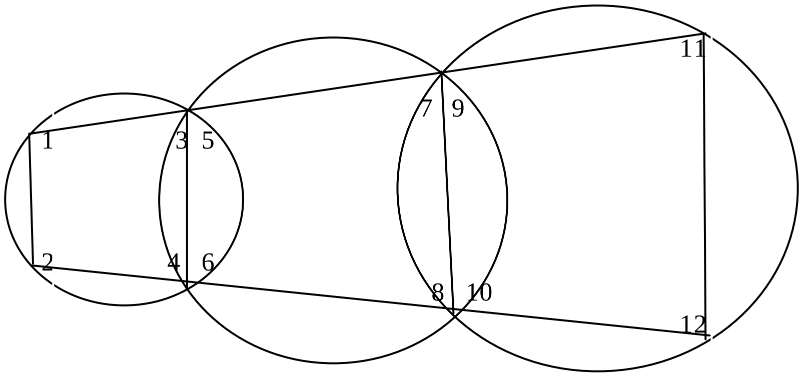
$$\frac{a+b+c}{a}=\frac{a+b+c}{b}=\frac{a+b+c}{c}.$$

No šejienes vai nu $a+b+c=0$, un tad acīmredzami $x=-1$, vai arī $a=b=c$, un tad $x=\frac{1}{2}$.

99.30. Ja meklējamais skaitlis *x* ir *n*-ciparu, tad x^2 nav vairāk par *2n* cipariem, un x^2 ciparu summa nepārsniedz $9\cdot 2n=18n$. No otras puses, *n*-ciparu skaitlis ir vismaz 10^{n-1}. Pie $n\geq 3$ pastāv nevienādība $18n<10^{n-1}$, tāpēc $n=1$ vai $n=2$, un $x\leq 18\cdot 2=36$. Tieša pārbaude parāda, ka der tikai $x=1$ un $x=9$.

99.31. Aplūkojam starpību $x-y$, kur *x* ir to vārtu skaits, kas "Milžiem" vēl jāiesit, bet y ir to vārtu skaits, ko "Giganti" jau iesituši. Spēles sākumā šī starpība ir 7, bet beigās tā ir (-9). Tā kā starpība mainās tikai par 1, tad kādā brīdi tā bija 0.

99.32. Skat. 13. zīmējumu.



13. zīm.

No ievilkta četrstūra īpašības un no tā, ka blakus leņķu summa ir $180°$, seko vienādības.

$$\angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3$$
$$\angle 3 + \angle 5 = \angle 4 + \angle 6$$
$$\angle 6 + \angle 7 = \angle 5 + \angle 8$$
$$\angle 8 + \angle 10 = \angle 7 + \angle 9$$
$$\angle 9 + \angle 12 = \angle 10 + \angle 11.$$

Saskaitot šīs vienādības un savelkot līdzīgos locekļus, iegūstam

$$\angle 1 + \angle 12 = \angle 2 + \angle 11.$$

Tātad ap četrstūri *ADHE* var apvilkt riņķa līniju.

99.33. Pāra skaitļa kvadrāts, dalot ar 4, dod atlikumu 0, bet nepāra skaitļa kvadrāts, dalot ar 4, dod atlikumu 1.

Starp skaitļiem x, y, z nevar būt tieši viens nepāra skaitlis, jo tad vienādības kreisā puse ir nepāra skaitlis, bet labā puse pāra skaitlis.

Ja visi skaitļi ir nepāra, tad vienādības kreisā puse, dalot ar 4, dod atlikumu 3, bet labā puse – atlikumu 1.

Ja starp šiem skaitļiem ir divi nepāra skaitļi, tad kreisās puse izteiksme, dalot ar 4, dod atlikumu 2, bet labās puses izteiksme vai nu dalās ar 4, vai dod atlikumu 1; jebkurā gadījumā vienādība nav iespējama.

Tātad visi skaitļi x, y, z ir pāra skaitļi.

$$x = 2x_1,\ y = 2y_1,\ z = 2z_1$$
$$x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2} = 4x_1^{\ 2} y_1^{\ 2}.$$

Tā kā vienādības labā puse dalās ar 4, tad visiem skaitļiem x_1, y_1, z_1 jābūt pāra skaitļiem.

$$x_1 = 2x_2,\ y_1 = 2y_2,\ z = 2z_2$$
$$x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2 = 16x_2{}^2 y_2{}^2.$$

Līdzīgi iegūstam, ka visi skaitļi x_2, y_2, z_2 arī ir pāra skaitļi, utt. Bet naturāli skaitļi nevar bezgalīgi ilgi dalīties ar 2; tātad vienādojumam nav atrisinājumu naturālos skaitļos.

99.34. Pieņemsim pretējo, ka
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} > \frac{1}{abc}.$$

Pareizinot ar *abc* iegūstam
$$ac + bc - ab > 1.$$

No šejienes seko
$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - ac - bc) =$$
$$2 - 2(ac + bc - ab) < 0.$$

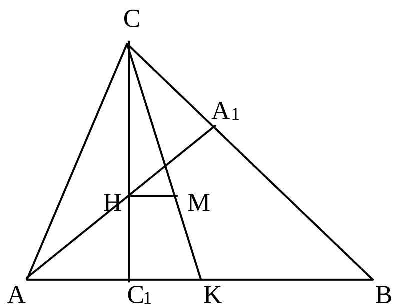
Iegūta pretruna.

99.35. Pieņemsim pretējo, ka nevienu valodu nezina vairāk par 2 dalībniekiem. Tad dalībniekam *A* ir kopīga valoda ar augstākais 3 citiem dalībniekiem; tātad var atrast 5 dalībniekus *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, kam nav kopīgas valodas ar *A*. Apskatot trijnieku (A, B, C) redzam, ka *B* un *C* ir kopīga valoda. Līdzīgi iegūstam, ka *B* ir kopīga valoda arī ar *D*, *E*, *F*. Tātad *B* ir kopīga valoda ar četriem citiem dalībniekiem. Tā kā *B* zina ne vairāk kā 3 valodas, tad ar kādiem diviem no šiem četriem viņš zina vienu un to pašu valodu, un šo valodu zina vismaz 3 dalībnieki. Iegūta pretruna.

99.36. No vienādības
$$(x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2) = z$$

seko, ka $x - y = 1$, jo *z* ir pirmskaitlis. Tā kā *x* un *y* arī ir pirmskaitļi un ir tikai viens pāra pirmskaitlis 2, tad $x = 3$ un $y = 2$. Atliek pārbaudīt, ka $3^3 - 2^3 = 19$ arī ir pirmskaitlis.

99.37. Skat. 14. zīmējumu.



14. zīm.

No trijstūru CHM un CC_1K līdzības un no vienādības $CM : MK = 2:1$ seko, ka $CH : HC_1 = 2:1$. Tāpēc

$$\mathrm{tg}A \cdot \mathrm{tg}B = \mathrm{tg}A \cdot \mathrm{ctg}\angle HAC_1 =$$
$$\frac{CC_1}{AC_1} \cdot \frac{AC_1}{HC_1} = \frac{CC_1}{HC_1} = 3.$$

Prasītā vienādība pierādīta.

99.38. Ievērosim, ka

$$|\cos x| + |\cos 2x| =$$
$$|\cos x| + |2\cos^2 x - 1| = y + |2y^2 - 1|,$$

kur $0 \le y \le 1$.

Ja $y \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$, tad nevienādība izpildās; ja $0 \le y < \frac{\sqrt{2}}{2}$, tad

$$y + |2y^2 - 1| = 1 + y - 2y^2 = \frac{9}{8} - 2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2,$$

kas sasniedz minimumu pie $y = 0$ vai $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Abas vērtības nav mazākas par $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

99.39. No a) seko, ka $f(x^2) = 2f(x) - 1$. Ja $f(x) = 1$, tad $f(x^2) = 1$, $f(x^4) = 1$, utt., tāpēc saskaņā ar b) jābūt $x = 1$. Tātad, ja $x \ne 1$, tad $f(x) \ge 2$.
Ievērosim, ka $f(30) = f(5) + f(6) - 1 = f(5) + f(3) + f(2) - 2$.
Tātad $f(5) + f(3) + f(2) = 6$; tā kā $f(x) \ge 2$, ja $x \ne 1$, tad $f(2) = f(3) = f(5) = 2$.

Tāpēc

$$f(3600) = f(60^2) = 2f(60) - 1 =$$
$$2(f(2) + f(30) - 1) - 1 = 2 \cdot (2 + 4 - 1) - 1 = 9.$$

99.40. Uzvar pirmais spēlētājs:

a) ja sākumā kaudzē ir $2n$ akmeņi, $n \in N$, viņš ar pirmo gājienu sadala to divās kaudzēs pa n akmeņiem un tālāk "kopē" otrā spēlētāja gājienus,

b) ja sākumā kaudzē ir $2n+1$ akmeņi, $n \in N$, viņš ar pirmo gājienu sadala to trīs kaudzēs ar 1, *n*, *n* akmeņiem un tālāk "kopē" otrā spēlētāja gājienus.