49. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1998./99. m.g.

UZDEVUMI

5. klase

99.1. Sprīdītis Pasaku mežā sastop 3 rūķīšus. Vienīgais, ko viņš par tiem zina – vai nu divi no tiem vienmēr runā patiesību un viens melo, vai arī divi no tiem vienmēr melo un viens runā patiesību.
Kā, uzdodot vienu jautājumu vienam rūķītim, Sprīdītis var uzzināt, vai vairāk ir melīgo vai patieso rūķīšu?

99.2. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām rūtiņām. Cik ir taisnstūru, kuru visas malas iet pa rūtiņu malām?

99.3. Aizstājiet vienādībā

$$** + *** = ****$$

zvaigznītes ar cipariem tā, lai iegūtu pareizu vienādību, pie tam gan katrs saskaitāmais, gan summa nemainītos, ja to izlasa no labās puses uz kreiso.

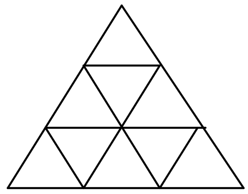
99.4. Klasē katrā solā sēž zēns un meitene. Katram zēnam ir vai nu divreiz vairāk, vai divreiz mazāk naudas nekā viņa sola biedrenei. Vai var būt, ka visiem bērniem kopā ir tieši 10 latu ?

99.5. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām rūtiņām. Vai var nokrāsot 8 no tām baltas un 8 – melnas tā, lai gan katrā rindā, gan katrā kolonnā būtu trīs vienas krāsas rūtiņas un viena otras krāsas rūtiņa?

6. klase

99.6. Uzzīmēt divus četrstūrus, kuru kontūrām ir tieši 15 kopīgi punkti.

99.7. Katrā mazajā trijstūrītī (skat. 1. zīm.) ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 9 (visi skaitļi dažādi).



1. zīm.

Katriem diviem trijstūrīšiem ar kopīgu malu aprēķina tajos ierakstīto skaitļu summu. Kāds lielākais daudzums no šīm summām var būt pirmskaitļi?

99.8. Cilindriskā burkā ieliets kompots un tajā ielikti āboli (šķidrums pilnīgi pārklāj ābolus). Sprīdītis apēda pusi ābolu, un kompota līmenis burkā pazeminājās par vienu trešo daļu.

Par kādu daļu pazemināsies kompota līmenis burkā, ja Sprīdītis apēdīs pusi atlikušo ābolu?

99.9. Naturāla skaitļa pierakstā nav nuļļu, un tas sastāv no 28 cipariem.

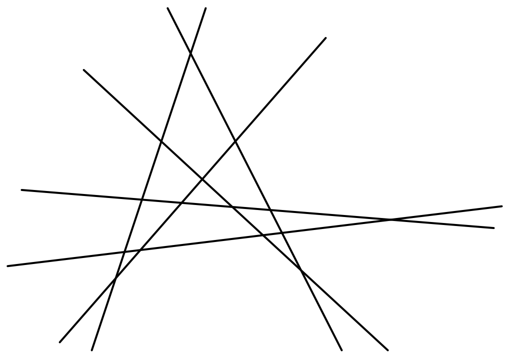
Pierādīt, ka dažus tā ciparus var izsvītrot tā, lai pāri palikušie veidotu skaitli, kas dalās ar 101.

99.10. Trīsciparu naturālu skaitli sauc par uzpūtīgu, ja tā vidējais cipars lielāks par katru no malējiem, un par kautrīgu, , ja tā vidējais cipars mazāks par katru no malējiem. Vai vairāk ir uzpūtīgu vai kautrīgu skaitļu?

7. klase

99.11. Uzrakstīt vienādību, kas satur *x* un ir pareiza, ja *x* vietā ievieto jebkuru viencipara naturālu skaitli, bet nav pareiza nekādām citām *x* vērtībām.

99.12. Sanumurēt 2. zīmējumā parādīto taišņu krustpunktus ar skaitļiem no 1 līdz 5 tā, lai uz katras taisnes atrastos visi pieci skaitļi. (Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt)



2. zīm.

99.13. Kāds ir lielākais daudzums pēc kārtas ņemtu naturālu trīsciparu skaitļu, no kuriem nevienu nevar izsacīt kā divu (dažādu vai vienādu) divciparu skaitļu reizinājumu?

99.14. Rūtiņas malas garums ir 1. Kvadrāts, kas sastāv no 50×50 rūtiņām, sadalīts vairākās daļās, velkot līnijas, kas iet pa rūtiņu malām. Vai visu daļu apkārtmēru (perimetru) summa var būt 1999 ?

99.15. Uz tāfeles uzrakstīti astoņi divnieki. A vienu gājienu atļauts nodzēst divus uz tāfeles uzrakstītos skaitļus un to vietā vai nu nodzēsto skaitļu summu, vai to reizinājumu. Vai var panākt, lai pēc 7 gājieniem uz tāfeles būtu uzrakstīts skaitlis 150?

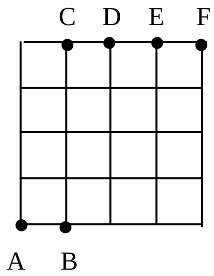
8. klase

99.16. Pierādīt identitāti

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}=\frac{3}{a(a+3)}.$$

ja $a > 0$.

99.17. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām (skat. 3. zīm.).



3. zīm.

99.18. Katrs lācis apēda pa spainim ogu; spainī bija gan avenes, gan lācenes (visi spaiņi bija ar vienādu ietilpību). Pekainītis apēda ceturto daļu visu aveņu un sesto daļu visu lāceņu. Cik bija lāču?
(Zināms, ka citu ogu bez avenēm un lācenēm spaiņos nav).

99.19. Turnīrā piedalījās 12 tenisisti; katrs spēlēja ar katru citu vienu reizi (neizšķirtu nav). Neviens tenisists neuzvarēja visās spēlēs.
Pierādīt, ka var atrast tādus tenisistus *A*, *B*, *C*, ka *A* uzvarējis pret *B*, *B* – pret *C* un *C* – pret *A*.

99.20. Piecstūra visas malas vienādas un visi leņķi arī vienādi. Vai to var sagriezt četros šaurleņķu trijstūros?

9. klase

99.21. Uz kvadrāta *ABCD* diagonāles *AC* ņemts punkts *M*. Pierādīt, ka

$$MA \cdot MC + MB \cdot MD = AB^2 .$$

99.22. Atrodiet

a) trīs,

b) divpadsmit

dažādus racionālus skaitļus tā, ka neviens no tiem nav vesels, bet katru divu skaitļu reizinājums ir vesels skaitlis.
(Abos gadījumos pietiek uzrādīt piemēru).

99.23. Pieņemsim, ka *a*, *b*, *c* ir dažādi skaitļi. Viegli pārbaudīt, ka vienādojumam

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = 1.$$

ir 3 saknes $x = a$, $x = b$, $x = c$ (pārbaudi izdara, ievietojot x vērtības vienādojuma kreisajā pusē).

99.24. Plkst. 12^{00} no Alfas uz Betu izbrauca Lutausis, bet no Betas uz Alfu – Sprīdītis (abi brauc pa vienu un to pašu ceļu). Plkst. 13^{00} Lutausis atrodas pusceļā starp Alfu un Sprīdīti.

Cikos Lutausis būs pusceļā starp Betu un Sprīdīti?

(Abu braucēju ātrumi ir nemainīgi un atšķiras ne vairāk kā divas reizes).

99.25. Kvadrāts sastāv no 8×8 kvadrātiskām rūtiņām. Tajās izvietotas 32 baltas un 32 melnas figūriņas; katrā rūtiņā pa vienai. Balta un melna figūriņa draudzējas, ja tās atrodas vai nu vienā rindā, vai vienā kolonnā.

Kāds ir lielākais iespējamais draudzību skaits?

10. klase

99.26. Dots, ka *m* un *n* ir naturāli skaitļi un *m* dalās ar n^2.

Vai noteikti m^2 dalās ar n^3 ?

99.27. Vai var atzīmēt plaknē 10 punktus tā, lai katri trīs no tiem būtu platleņķa trijstūra virsotnes ?

99.28. Vairākiem rūķīšiem ir vienāds daudzums zelta monētu. Brīdi pa brīdim kāds no rūķīšiem izlemj daļu savu monētu paturēt sev, bet pārējās sadalīt vienādās daļās starp visiem pārējiem. Pēc vairākiem šādām pārdalēm vienam no rūķīšiem bija 64 monētas, bet otram – 81 monēta.

Cik pavisam bija rūķīšu?

99.29. Dots, ka *a*, *b*, *c* – reāli skaitļi un

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b} = x.$$

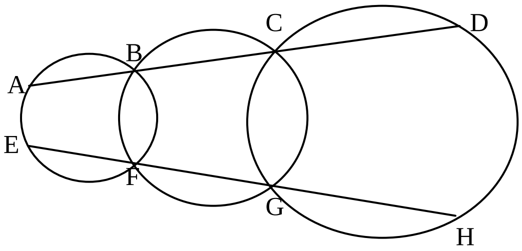
Kādas ir iespējamās *x* vērtības?

99.30. Atrast visus naturālos skaitļus, kas vienādi ar sava kvadrāta ciparu summu.

11. klase

99. 31. Hokeja mačs starp "Gigantiem" un "Milžiem" beidzās ar rezultātu 9 : 7 "Gigantu" labā. Pierādiet, ka mača gaitā bija brīdis, pēc kura "Milži" līdz spēles beigām iesita tikpat vārtus, cik "Giganti" šajā brīdī bija iesituši.

99.32. Dots, ka *A*, *B*, *C*, *D* atrodas uz vienas taisnes un *E*, *F*, *G*, *H* – tāpat (skat. 4. zīm.).



4. zīm.

Pierādīt, ka ap četrstūri *ADHE* var apvilkt riņķa līniju.

99.33. Pierādīt, ka vienādojumam

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 y^2$$

nav atrisinājumu naturālos skaitļos.

99.34. Dots, ka *a*, *b*, *c* ir pozitīvi skaitļi un $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \leq \frac{1}{abc}.$$

99.35. Apspriedē piedalās 9 dalībnieki. Neviens nepārvalda vairāk nekā trīs valodas. Starp katriem trim dalībniekiem var atrast divus, kas zina kopīgu valodu. Pierādīt, ka ir tāda valoda, kuru prot vismaz 3 apspriedes dalībnieki.

12. klase

99.36. Atrisināt pirmskaitļos vienādojumu

$$x^3 - y^3 = z.$$

99.37. Šaurleņķu trijstūrī *ABC* nogrieznis, kas savieno mediānu krustpunktu un augstumu krustpunktu, paralēls malai *AB*. Pierādīt, ka

$$\mathrm{tg}\angle BAC \cdot \mathrm{tg}\angle ABC = 3.$$

99.38. Pierādīt, ka katram reālam *x* pastāv nevienādība

$$|\cos x| + |\cos 2x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

99.39. Funkcijas $f(t)$ argumenti un vērtības ir naturāli skaitļi. Ir zināms, ka

a) visiem naturāliem x un y pastāv vienādība

$$f(xy) = f(x) + f(y) - 1 \ ,$$

b) ir tikai galīgs skaits tādu naturālu x, ka

$$f(x) = 1 \ ,$$

c) $f(30) = 4$.

99.40. Spēles sākumā dota kaudze, kas satur vismaz 2 akmeņus. Ar vienu gājienu izvēlas vienu no kaudzēm un sadala to divās vai trijās kaudzēs, katra no kurām satur vismaz vienu akmeni.

Spēlē piedalās divi spēlētāji, gājienus izdara pēc kārtas. Kas nevar izdarīt gājienu, zaudē. Vai pirmais spēlētājs noteikti var uzvarēt?