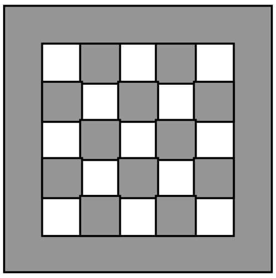
50. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1999./2000. m.g.

ATRISINĀJUMI

00.1. Trīsciparu skaitļi, kuru ciparu reizinājums vienāds ar 30, ir 156, 165, 516, 561, 615, 651, 235, 253, 325, 352, 523, 532.

00.2. Jā. Skat., piemēram, 3. zīm.



3.zīm.

00.3. a) Jā; piemēram, 5; 1; 4; 2; 6; 3.

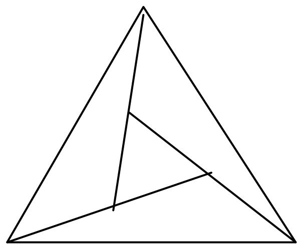
b) Nē, jo gan 7, gan 5 var atrasties blakus tikai ar 1. Tātad viens no šiem skaitļiem neatradīsies rindas galā, taču skaitļiem 7 un 5 blakus var stāvēt tikai vieninieks un nevar būt divu kaimiņu; iegūta pretruna.

00.4. Nē. Skaitlim 1 var būt blakus tikai 4 un 5, skaitlim 2 – tikai 5 un 6. Tātad 1 un 2 atrodas stūros, un tiem diviem blakus ir 5, bet tā nevar būt.

00.5. Ne noteikti (kaut arī 5 cilvēkiem iespējami tikai 4 dažādi vecumi). Piemēram, cilvēki var būt dzimuši 1965.g. decembrī, 1966.g. novembrī, 1967.g. oktobrī, 1968.g. septembrī un 1969.g. janvārī, un tad 2000. gada martā viņiem būs attiecīgi 24; 23; 22; 21; 21 gads.

00.6. Skaitlis dalās ar 3, ja tā ciparu summa dalās ar 3 tad un tikai tad, kad pats skaitlis dalās ar 3. Starp pirmajiem 200 skaitļiem tādu ir $\left[\frac{200}{3}\right] = 66$.

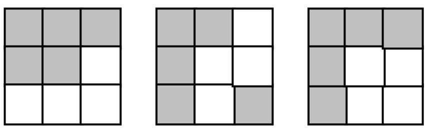
00.7. Jā. Skat., piemēram, 4.zīm.



4.zīm.

00.8. Uzrakstīto ciparu summa ir 21. Nevar izsvītrot 1 ciparu, lai iegūtu summu, kas dalās ar 9 (tad arī skaitlis dalīsies ar 9). Divus ciparus tā var izsvītrot. Tiem jābūt divniekam un vieniniekam. Vajag, lai rezultātā skaitļa pirmie cipari būtu iespējami lieli, tāpēc jāizsvītro pirmais divnieks un pirmais vieninieks. Rezultātā iegūstam skaitli 4421421.

00.9. Mums pavisam ir 5 nepāra skaitļi. Summa ir nepāra tad un tikai tad, jo tajā ir nepāra skaits nepāra saskaitāmo. 5. zīm. redzam, kā izvietot nepāra skaitļus (ievietosim tos iekrāsotajās rūtiņās), lai atbilstoši divas, četras un sešas summas būtu nepāra.

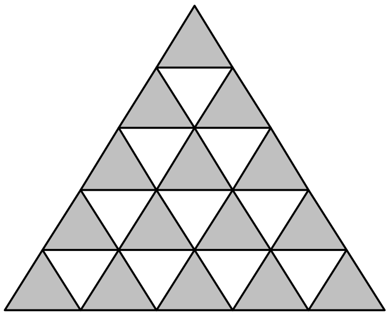


5.zīm.

Tā kā visu skaitļu summa $1+2+\cdots+9=45$ ir nepāra skaitlis, tad nepāra daudzumā rindu un nepāra daudzumā kolonnu ir nepāra summas. Tāpēc nepāra summu skaits būs pāra skaitlis. Nepāra summu skaits nevar būt nulle, jo pretējā gadījumā katrā rindiņā ierakstīto skaitļu summa būtu pāra skaitlis, arī visas tabulas skaitļu summa būtu pāra skaitlis, bet šī summa ir 49. Tāpēc citu iespēju bez minētajām nav.

00.10. Var nokrāsot 30 nogriežņus, piemēram, visus tos, kas paralēli vienai no divām izvēlētām trijstūra malām.

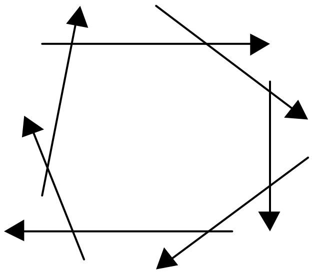
Ja nokrāso vairāk par 30 nogriežņiem, tad vismaz vienā no 6. zīm. attēlotajiem 15 trijstūrīšiem būs nokrāsotas vairāk nekā divas, t.i., vismaz 3 malas, bet tā ir pretruna ar uzdevuma nosacījumiem.



6. zīm.

00.11. Der skaitļi 237, 273, 327, 372, 723, 732 (tie visi dalās ar 3, tāpēc nav pirmskaitļi), kā arī 176, jo $176 = 11 \cdot 16$.

00.12. Jā. Skat., piemēram, 7. żīm.



7.zīm.

00.13. Vienādojuma kreisās puses izteiksme ir lineāra funkcija $f(x) = ax + b$. Viegli pārbaudīt, ka $f(1) = 1$; tātad 1 ir dotā vienādojuma sakne. Skaidrs, ka $f(2)$ ir pāra skaitlis; tātad $f(2) \neq 1$, un $f(x)$ nav konstanta funkcija.

Tas nozīmē, ka dotajam vienādojumam ir tieši viens atrisinājums $x = 1$.

00.14. To var izdarīt, piemēram, tā:

1, 11,10, 20, 21, 12, 2, 22, 23, 3, 13, 14, 4, 24, 25, 5, 15, 16, 6, 26, 27, 7, 17, 18, 8, 28, 29, 9, 19.

00.15. 1. metode.

Nē, nevar. Pēc jebkura gājiena uz tāfeles ir 2 pāra un 1 nepāra skaitlis.

2. metode. Pēc jebkura gājiena uz tāfeles ir uzrakstīts skaitļu trijnieks $a, b, a + b - 1$.

Acīmredzami skaitļi 1997, 1999, 2001 šādu trijnieku neveido.

00.16. Ir vairākas risināšanas iespējas:

a) ievieto izteiksmē $z = -(x+y)$ un savelk līdzīgos locekļus "uz vienas daļsvītras",

b) $\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} = \frac{(x+y+z)^2 - 2xy - 2xz - 2yz}{xyz} = -\frac{2}{z} - \frac{2}{y} - \frac{2}{x}$.

00.17. Jā, var. Piemēram, šādi:

1, 3, 5, 2, 4, 6, 8, 10, 7, 9, 11, 13, 15, 12, 14, 16, 18, 20, 17, 19, 21, 23, 25, 22, 24,

00.18. Skat., piemēram, 8. zīm.

8.zīm.

00.19. Var būt visi vienādi skaitļi, piemēram, $x = y = z = 1$.

Var būt divi vienādi skaitļi un trešais atšķirīgs no tiem: $x = y = 1, \quad z = 2$.

Visi skaitļi nevar būt atšķirīgi. Pieņemsim pretējo, ka $x < y < z$. Tad $\frac{2x}{y}$ un $\frac{2x}{z}$ ir veseli skaitļi mazāki par 2; tātad $\frac{2x}{y} = \frac{2x}{z} = 1$. No šejienes seko, ka $y = z$, bet tā ir pretruna.

00.20. Ievērosim, ka $9x = 10x - x = \overline{x0} - x$. Apzīmējot $x = \overline{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}$ un ievērojot, ka ciparu virkne ir augoša, iegūstam

$$\begin{array}{cccccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 \\ - & & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ \hline & a_1 & a_2 - a_1 & a_3 - a_2 & \cdots & a_{n-1} - a_{n-2} & a_n - a_{n-1} - 1 & 10 - a_n \end{array}$$

un rezultātā ciparu summa ir

$a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1} - 1) + 10 - a_n = 9.$

00.21.

$$\left((a-b)^3+(b-c)^3\right)+(c-a)^3=$$
$$(a-b+b-c)\left((a-b)^2-(a-b)(b-c)+(b-c)^2\right)-(c-a)^3=$$
$$(a-c)\left(a^2-2ab+b^2-ab+ac+b^2-bc+b^2-2bc+c^2-c^2+2ac-a^2\right)=$$
$$(a-c)\left(3b^2-3ab+3ac-3bc\right)=3(a-c)(b-c)(c-a).$$

00.22. Varam izsacīt $n=a+4$, kur a – nepāra skaitlis, $a\geq 3$. Tad

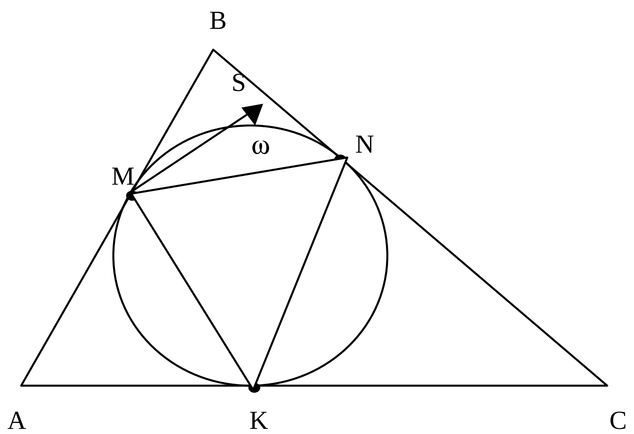
$$n^2=(a+4)^2=a^2+8a+16=a^2+3(a+2)+5(a+2).$$

00.23. Trīs vieglākās zivis svēra $\frac{5}{13}\cdot 65\%=25\%$ no loma. Tātad "vidējās" zivis svēra 40% no loma. Ja to ir trīs vai mazāk, rodas pretruna ar faktu, ka trīs smagākās zivis svēra 35% loma. Pieņemsim, ka "vidējo" zivju ir 5 vai vairāk. Apzīmēsim masas (procentos) piecām vieglākajām no tām ar $x\leq y\leq z\leq e\leq f$. Tad $x+y+z+e+f\leq 40$. Jābūt $x+y+z\geq 25$, tāpēc $3z\geq 25$, $z\geq 8\frac{1}{3}$; tad arī $e\geq 8\frac{1}{3}$ un $f\geq 8\frac{1}{3}$. Iznāk, ka

$$x+y+z+e+f=(x+y+z)=e+f\geq 25+2\cdot 8\frac{1}{3}>41.$$

Tā ir pretruna. Tātad "vidējo" zivju ir mazāk par 5. Tā kā to ir vairāk par 3, tad to ir 4, un zivju pavisam ir 10.

00.24. Hordas—pieskares leņķis $\angle BMN$ ietver loku $\overset{\cup}{M\omega N}$ (Skat. 9.zīm.), tāpēc tā lielums ir $\frac{1}{2}\overset{\cup}{M\omega N}$.



9. zīm.

Ja MS ir $\angle BMN$ bisektrise, tad ievilktais leņķis $\angle SMN$ ir puse no $\angle BMN$, tāpēc ka balstās uz puses no $\overset{\cup}{M\omega N}$; tāpēc šī bisektrise iet caur $\overset{\cup}{M\omega N}$ viduspunktu. Tāpat caur šo viduspunktu iet $\angle BMN$ bisektrise. Tātad ΔMBN bisektrišu krustpunkts – ievilktās riņķa līnijas centrs ir $\overset{\cup}{M\omega N}$ viduspunkts. Apgalvojumu par ΔAMK un ΔCNK pierāda līdzīgi.

00.25. Apvienosim vispirms cilvēkus pāros, kā pagadās. Sauksim pāri par sliktu, ja tajā ir ienaidnieki un par labu pretējā gadījumā. Pieņemsim, ka ir kāds slikts pāris (A, B). Pieņemsim, ka eksistē tāds paris (X, Y), ka A nav ienaidā ar X un B nav ienaidā ar Y. Tad, izveidojot pāri (A, B) un (X, Y) vietā pārus (A, X) un (B, Y), slikto pāru skaits samazinās. Atkārtojot šādu operāciju vēl un vēl, varam panākt, ka slikto pāru vairs nav, un mūsu mērķis sasniegts.
Atliek pierādīt tāda pāra (X, Y) eksistenci. JA tāda pāra nebūtu, tad:

- tajos pāros, kur A ir divi draugi, B nav neviena drauga,
- tajos pāros, kur A ir viens draugs, B ir augstākais viens draugs (tas pats, kas ir A draugs).

Tātad A un B kopā 4 citos pāros būtu ne vairāk kā 8 draugi, bet viņiem tur vismaz 10 draugi – pretruna. Tātad vajadzīgais pierādīts.

00.26. $xy = \frac{1}{4}\left((x+y)^2 - (x-y)^2\right) < \frac{1}{4}\left((a+b)^2 - (a-b)^2\right) = ab.$

Ievērojiet, ka no šī uzdevuma izriet ļoti noderīgs secinājums: ja divu skaitļu summa ir konstanta, tad to reizinājums ir jo mazāks , jo vairāk šie skaitļi atšķiras viens no otra.

00.27. Saskaņā ar doto
$a^2 + b^2 - c^2 = xy + xz - x^2 + yx + yz - y^2 - xz - yz + z^2 = 2xy - x^2 - y^2 + z^2 =$
$z^2 - (x-y)^2 > 0$,

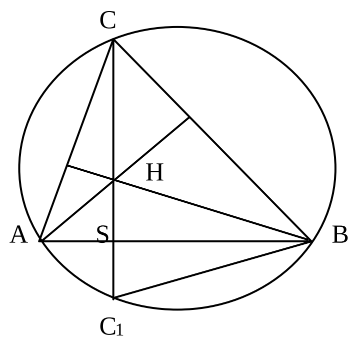
No kosinusu teorēmas seko, ka $\cos\gamma > 0$.
Līdzīgi pierāda, ka $\cos\alpha > 0$ un $\cos\beta > 0$, tātad trijstūrim ar malu garumiem a, b, c visi leņķi ir šauri

00.28. Apzīmēsim šos skaitļus ar $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$, bet to summu ar S. No dotajiem skaitļiem pavisam var sastādīt 10 summas pa deviņiem skaitļiem. Tā kā šīs summas pieņem tikai 9 dažādas vērtības, tad divas no tām ir vienādas.
Apzīmēsim to summu, kas atkārtojas divreiz, ar M. Tad $(S - x_1) + (S - x_2) + \cdots + (S - x_{10}) = 10 \cdot S - (x_1 + \cdots + x_{10}) = 9S$, tātad dalās ar 9. No otras puses, $(S - x_1) + \cdots + (S - x_{10}) = 82 + 83 + \cdots + 91 + 92 + M = 783 + M$. Tā kā 783

dalās ar 9, tad arī M jādalās ar 9; vienīgā iespēja ir, ka M = 90. Tas nozīmē, ka $9S = 783 + 90 = 873$ un S = 97.

Tātad uz lapiņām uzrakstītie skaitļi ir 15; 14; 13; 12; 10; 8; 7; 7; 6; 5.

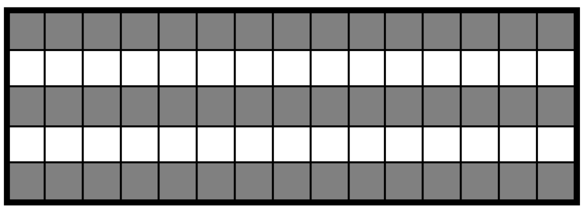
00.29. Apzīmēsim taisnes CH otru krustpunktu ar vienu riņķa līniju ar C_1. Ja mēs pierādīsim, ka $SH = SC_1$, tad $\Delta AHB = \Delta AC_1B$ (simetriski pret AB) un tad to apvilkto riņķa līniju rādiusi arī būs vienādi. (Atzīmēsim, ka ap trijstūri ABC apvilktā r.l. sakrīt ar ap trijstūri ABC apvilkto r.l.). Skat. 10. zīm.



10. zīm.

Ievērojam, ka $\angle ACS = \angle HBS$ (abi vienādi ar $90° - \alpha$) un $\angle ACS = \angle SBC_1$ (ievilkti leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku). Tāpēc $\angle HBS = \angle SBC_1$, no kurienes seko, ka $SH = SC_1$.

00.30. Izkrāsosim taisnstūra 15 rūtiņas kā parādīts 11. zīmējumā.



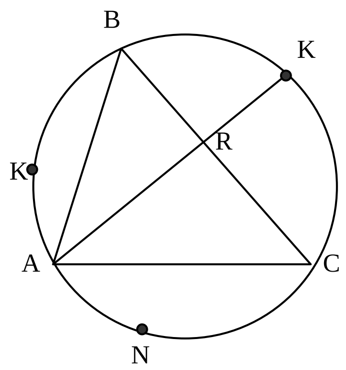
11. zīm.

Pavisam ir 45 melnas rūtiņas. Katra no 15 figūriņām satur augstākais 3 melnās rūtiņas (pierāda pārbaudot figūras izvietojuma variantus). Tā kā figūru pavisam ir 15, tad tām visām jāsatur tieši 3 melnas un 2 baltas rūtiņas. Pārbaudot visus principiāli dažādos figūras novietojumus, redzam, ka abas baltās rūtiņas atrodas vienā rindā. Tātad baltā rinda sastāv no balto rūtiņu pāriem, bet tā ir pretruna, jo tā satur 15 rūtiņas.

00.31. Ņemam vienu policistu *A*; tam var piekomandēt jebkuru no atlikušajiem policistiem (t.i. izdarīt to 7 veidos). Kad tas izdarīts, ņemam jebkuru no atlikušajiem policistiem *B*; tam var piekārtot pārinieku 5 veidos. Tālāk ņemam jebkuru no atlikušajiem policistiem *C*; tam var piekārtot pārinieku 3 veidos. Atlikušie divi policisti veido ceturto pāri.

No reizināšanas likuma kombinatorikā seko ka dažādo iespēju skaits kā izvēlēties 4 policistu pārus ir $7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 105$.

00.32 . Skat. 12. zīm.



12. zīm.

Apzīmēsim $\overset{\cup}{BK} = \overset{\cup}{BM} = \beta$, $\overset{\cup}{AK} = \overset{\cup}{AN} = \alpha$, $\overset{\cup}{CM} = \overset{\cup}{CN} = \gamma$.

Tad $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, un

$$\angle ARC = \frac{1}{2}\left(\overset{\cup}{BM} + \overset{\cup}{ANC}\right) = \frac{1}{2}(\beta + \alpha + \gamma) = 90°.$$

Tātad *AR* ir trijstūra *ABC* augstums, un taisne *AM* satur šo augstumu. Līdzīgi spriežam par taisnēm *BN* un *CK*.

Uzdevuma apgalvojums tagad seko no fakta, ka trijstūra augstumi krustojas vienā punktā.

00.33. Der visi pirmskaitļi *n*, jo tiem ir tikai 2 dalītāji 1 un *n*, un $1 \cdot n > \frac{n}{6}$.

Der arī skaitlis 1, jo šajā gadījumā nevar sastādīt reizinājumu no diviem dažādiem skaitļa 1 dalītājiem; bet tas nozīmē, ka jebkuram reizinājumam (faktiski tādu nav) izpildās prasītā nevienādība (uzmanīgi izanalizējiet šo spriedumu).

Ja *n* ir salikts skaitlis, tad tam eksistē dalītājs *d*, kurš nepārsniedz $\sqrt{n}$. Tātad

$$\sqrt{n} \geq 1 \cdot d > \frac{n}{6} \quad \Rightarrow \quad n < 36.$$

Pārbaudot saliktos skaitļus, kas mazāki par 36, atrodam, ka vēl der arī šādi salikti skaitļi: 4, 6, 8, 9, 10, 15, 25.

00.34. Ja $x=0$ vai $y=0$, nevienādība ir acīmredzama.
Ja $x \neq 0$ un $y \neq 0$, dotā ne vienādība ir ekvivalenta ar šādu nevienādību:

$$x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2} \geq 3.$$

To pierāda, izmantojot nevienādību starp trīs skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko:

$$\frac{x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2}}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot y^2 \cdot \frac{1}{x^2y^2}} = 1 \ .$$

Pareizinot šo nevienādību ar 3, iegūstam prasīto.

00.35. Aprakstīsim otrā spēlētāja stratēģiju, kas garantē, ka viņš nezaudēs.
Uz pirmā spēlētāja kārtējo gājienu otrais spēlētājs atbild šādi:
Ja iespējams izveidot trijnieku *EHE*, veido to un uzvar.
Ja tādas iespējas nav, tad atbild ar burta ierakstīšanu simetriskajā (pret riņķa centru) virsotnē), rakstot to pašu burtu, ko pirmais spēlētājs ierakstīja pēdējā gājienā (to var izdarīt, jo pirms pēdējā pirmā spēlētāja gājiena burtu izvietojums bija centrāli simetrisks).
No pretējā viegli pierādīt: ja pieņemam, ka kādā gājienā pirmais spēlētājs var uzvarēt, tad jau savā iepriekšējā gājienā to varēja izdarīt otrais..

00.36. a) Pakāpeniski iegūstam:

$$\cos x = \cos y \quad \Rightarrow \quad x = \pm y + 2\pi n \quad \Rightarrow$$
$$4x = \pm 4y + 8\pi n \quad \Rightarrow \quad \cos 4x = \cos 4x.$$

b) Nē, ne noteikti. Piemēram, ņemot $x = 30°,\ y = 150°$, iegūstam

$$\sin x = \sin y = \frac{1}{2}, \text{ bet } \sin 4x = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 4y = \sin 600° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

00.37. Skaidrs, ka der visi vienādu skaitļu pāri: (r, r), kur $r \in R$.
Pieņemsim, ka $x \neq y$, un izdalīsim dotās vienādojumu sistēmas visas izteiksmes ar $(x-y)$; iegūstam:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2 = 1 \\ x^4+xy^3+x^2y^2+xy^3+y^4 = 1. \end{cases}$$

Otro vienādojumu pārveidojam formā

$$\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+xy+y^2\right)-x^2y^2=1,$$

no kurienes, ņemot vērā, ka $x^2+xy+y^2=1$, iegūstam

$$x^2+y^2-x^2y^2=1 \quad \Rightarrow \quad \left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)=0.$$

No šejienes atrodam vēl 6 atrisinājumus: $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(-1, 1)$, $(1,-1)$.

00.38. Ievērosim, ka $323=18^2-1=17\cdot 19$. Mums jānoskaidro kādiem naturāliem n dotās izteiksmes vērtība dalās ar 17 un 19 vienlaicīgi.

Ja $n=2k$, tad

$$26^n+10^n-9^n-7^n \equiv 9^n+10^n-9^n-7^n \equiv$$
$$10^{2k}-(-10)^{2k} \equiv 0 \pmod{17},$$
$$26^n+10^n-9^n-7^n \equiv 7^n+10^n-9^n-7^n \equiv$$
$$10^{2k}-(-10)^{2k} \equiv 0 \pmod{19}.$$

Tātad, ja n ir pāra skaitlis, dotās izteiksmes vērtība dalās ar 323.

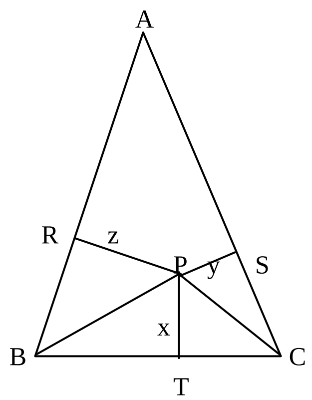
Ja $n=2k+1$, tad

$$26^n+10^n-9^n-7^n \equiv 9^n+10^n-9^n-7^n \equiv$$
$$10^{2k+1}-(-10)^{2k+1} \equiv 2\cdot 10^{2k+1} \not\equiv 0 \pmod{17}.$$

Tātad, ja n ir nepāra skaitlis, tad dotās izteiksmes vērtība nedalās ar 17 un, protams, arī ar 323.

Atbilde: n – pāra skaitlis.

00.39. Skat. 13. zīm.

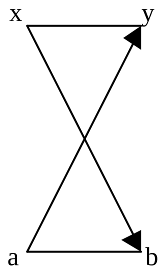


13. zīm.

No dotā seko, ka $\dfrac{PS}{PT}=\dfrac{PT}{PR}$. Tā kā četrstūru $BRPT$ un $CTPS$ atbilstošie leņķi ir vienādi, ievērojot iepriekšējo proporciju, secinām, ka šie četrstūri ir līdzīgi. Tāpēc

$$\angle PBA = \angle PBR = \angle TCP = \angle BCP \quad \Rightarrow$$
$$\angle CBA + \angle CPB = (\angle CBP + \angle PBA) + \angle CPB =$$
$$\angle CBP + \angle PCB + \angle CPB = 180^\circ .$$

00.40. a) Jā, var. Skaitļus var pa riņķi ierakstīt šādā secībā: 1, 9, 2, 10, 3, 6, 4, 7, 5, 8.
b) Nē, nevar. Aplūkosim divas pretējās daudzstūra malas (skat. 14. zīm.).



14. zīm.

Iegūstam $x + y = a + b \quad \Rightarrow \quad x - b = a - y$, t.i., bultiņu uzrādītās starpības starp skaitļiem, kas ierakstīti diametrāli pretējos punktos, ir vienādas. Izsekojot pēc kārtas bultiņu virzienus uz visiem 6 "diametriem", iegūstam pretrunu.