50. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1999./2000. m.g.

UZDEVUMI

5. klase

00.1. Kādiem trīsciparu skaitļiem visu ciparu reizinājums ir 30?

00.2. Kvadrātveida salas malas garums ir 5 km. Vai salā var izrakt vairākus kvadrātveida dīķus vai līčus (katras malas garumam jābūt 1 km) tā, lai kopējais krastmalu garums būtu 52 km?

00.3. Vai var izrakstīt rindā naturālos skaitļus no 1 līdz 6, katru vienu reizi, tā, lai no diviem blakus uzrakstītiem skaitļiem viens dalītos ar otru? Bet vai tā var izrakstīt skaitļus no 1 līdz 7?

00.4. Kvadrāts sastāv no 16 vienādiem kvadrātiskām rūtiņām. Vai rūtiņās var ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 16, katru vienu reizi, tā, lai rūtiņās ar kopēju malu ierakstītie skaitļi atšķirtos viens no otra vai nu par 3, vai par 4?

00.5. Pie galda sēž 5 cilvēki. Jaunākajam no tiem ir 21 gads, vecākajam – 24 gadi. Vai no šiem cilvēkiem noteikti var izvēlēties divus tādus, kuri dzimuši vienā un tai pašā gadā?

6. klase

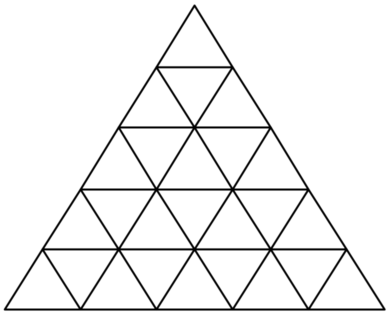
00.6. Cik no pirmajiem 200 naturālajiem skaitļiem ir tādu, kam ciparu summa dalās ar 3?

00.7. Katra no četrām zemnieku saimniecībām aizņem trijstūrveida zemes gabalu. Vai var gadīties, ka katrām divām no tām kopējā robeža ir tieši 1 km gara?

00.8. Kādu lielāko skaitli, kurš dalās ar 9, var iegūt, no skaitļiem 421421421 izsvītrojot dažus ciparus?

00.9. Kvadrāts sastāv no 9 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Rūtiņās ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 9, katrs tieši vienā rūtiņā. Katrai kolonnai un katrai rindiņai aprēķināta tajā ierakstīto skaitļu summa. Cik no šīm summām var būt nepāra skaitļi?

00.10. Katram no mazajiem trijstūrīšiem visu malu garumi ir 1 (skat. 1.zīm.). Kādu lielāko daudzumu no šiem nogriežņiem ar garumu 1 var nokrāsot sarkanu tā, lai nebūtu neviena mazā trijstūrīša, kam visas malas ir sarkanas?



1. zīm.

7. klase

00.11. Atrast 7 saliktus trīsciparu skaitļus, katram no kuriem ciparu reizinājums ir 42.

00.12. Vai var uzzīmēt plaknē 7 starus tā, lai katrs no tiem krustotu tieši divus citus?

00.13. Atrisināt vienādojumu

$$(((((2x-1)\cdot 2-x)\cdot 2-x)\cdot 2-x)\cdot 2-x)\cdot 2-x=1.$$

00.14. Pierādīt, ka naturālos skaitļus no 1 līdz 29 ieskaitot var tā uzrakstīt pa apli, katru vienu reizi, ka katriem diviem blakus uzrakstītiem skaitļiem atradīsies cipars, kurš izmantots to abu pierakstā.

00.15. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 2; 4; 6. Ar vienu gājienu atļauts nodzēst vienu no skaitļiem un tā vietā uzrakstīt abu pārējo skaitļu summu, no kuras atņemts vieninieks. Vai var gadīties, ka , izpildot vairākus šādus gājienus pēc kārtas, uz tāfeles atrodas skaitļi 1997; 1999; 2001?

8. klase

00.16. Dots, ka $x+y+z=0$ un neviens no skaitļiem x, y, z nav 0. Pierādīt, ka

$$\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=0.$$

00.17. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 25 ieskaitot var izrakstīt rindā katru vienu reizi, tā, lai katri divi blakus uzrakstīti skaitļi atšķirtos viens no otra vai nu par 2, vai par 3?

00.18. Uzzīmēt a) desmitstūri, b) piecpadsmitstūri ar īpašību: uz katras taisnes, uz kuras atrodas kāda uzzīmēta daudzstūra mala, atrodas vēl vismaz viena cita šī daudzstūra mala.

00.19. Ir iedomāti naturāli skaitļi *x*; *y*; *z*.
Ir zināms, ka $2x$ dalās gan ar *y*, gan ar *z*; $2y$ dalās gan ar *x*, gan ar *z*; $2z$ dalās gan ar *x*, gan ar *y*.
Cik no iedomātajiem skaitļiem var būt dažādi?

00.20. Naturālā skaitlī *x* katrs nākošais cipars ir lielāks par iepriekšējo. Pierādīt, ka skaitļa $9x$ ciparu summa ir 9.

9. klase

00.21. Sadalīt reizinātājos izteiksmi

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3.$$

00.22. Pierādīt: ja $n \geq 7$ un n – nepāra skaitlis, tad skaitli n^2 var izsacīt kā triju saliktu nepāra skaitļu summu.

00.23. Trīs smagākās loma zivis kopā svēra 35% no visa loma. Pēc to pārdošanas trīs vieglākās zivis kopā svēra $\frac{5}{13}$ no atlikušā loma. Cik zivju bija lomā sākumā?

00.24. Trijstūrī *ABC* ievilktā riņķa līnija pieskaras malām *AB*, *BC*, *CA* attiecīgi punktos *M*, *N*, *K*.
Pierādīt, ka trijstūros *AMK*, *BNM*, *CKN* ievilkto riņķa līniju centri atrodas uz *ABC* ievilktās riņķa līnijas.

00.25. No 10 cilvēkiem katrs ir ienaidā ar augstākais 4 citiem. Pierādīt, ka cilvēkus var sadalīt pa pāriem tā, ka nevienā pārī nav ienaidnieki.

10. klase

00.26. Dots, ka $x+y=a+b$ un $|x-y|>|a-b|$.
Pierādīt, ka $x \cdot y < a \cdot b$.

00.27. Viena trijstūra malu garumi ir *x*; *y*; *z*, bet otra trijstūra malu garumi ir *a*; *b*; *c*. Ir zināms, ka

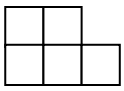
$$a^2 = x(y+z-x), \quad b^2 = y(x+z-y), \quad c^2 = z(x+y-z).$$

Pierādīt, ka otrais trijstūris ir šaurleņķu.

00.28. Uz desmit papīra lapiņām uzrakstīts pa naturālam skaitlim (starp tiem var būt arī vienādi). Ņemot visos iespējamos veidos pa 9 lapiņām un saskaitot uz tām uzrakstītos skaitļus, iegūstam deviņas dažādas summas 82; 83; 84; 85; 87; 89; 90; 91; 92.
Kādi skaitļi bija uzrakstīti uz lapiņām?

00.29. Šaurleņķu trijstūra ABC augstumu krustpunkts ir H.
Pierādīt, ka ap trijstūriem ABC un ABH apvilkto riņķa līniju rādiusi ir vienādi savā starpā.

00.30. Taisnstūris sastāv no 5×15 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Pierādīt, ka to nevar sagriezt tādos gabalos, kādi attēloti 2.zīm.



2. zīm.

11. klase

00.31. No 8 policistiem jāizveido 4 pāri nakts dežūrai. Cik dažādu sadalījumu iespējami?

00.32. Ap šaurleņķu trijstūri ABC apvilkta riņķa līnija. Uz tās lokiem AB, BC, CA atbilstoši ņemti punkti K, M, N tā, ka B ir loka KM viduspunkts, C ir loka MN viduspunkts un A ir loka NK viduspunkts.
Pierādīt, ka taisnes AM, BN un CK krustojas vienā punktā.

00.33. Kādiem naturāliem skaitļiem n piemīt īpašība: jebkuriem divu n dalītāju reizinājums ir lielāks par $\frac{n}{6}$?

00.34. Pierādiet, ka visiem reāliem x un y pastāv nevienādība

$$x^2y^2\left(x^2+y^2-3\right)\geq-1.$$

00.35. Divi spēlētāji pamīšus ieraksta vai nu burtu E, vai burtu H vienā no regulāra 100-stūra virsotnēm (katrā virsotnē drīkst ierakstīt tikai vienu burtu). Tas spēlētājs, pēc kura gājiena trijās pēc kārtas virsotnēs parādās burtu virknīte *EHE*, ir uzvarējis.
Pierādiet, ka otrais spēlētājs var panākt, lai pirmais neuzvarētu.

12. klase

00.36. a) Dots, ka $\cos x = \cos y$. Pierādīt, ka $\cos 4x = \cos 4y$.

b) Dots, ka $\sin x = \sin y$. Vai noteikti $\sin 4x = \sin 4y$?

00.37. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$x^5 - y^5 = x^3 - y^3 = x - y.$$

00.38. Kādiem naturāliem *n* skaitlis

$26^n + 10^n - 9^n - 7^n$ dalās ar 323?

00.39. Dots vienādsānu trijstūris *ABC*, kur $AB = AC$. Tā iekšpusē ņemts punkts *P*, kura attālumi līdz taisnēm *CB*, *AC*, un *AB* ir atbilstoši *x*, *y*, un *z*. Ir zināms, ka $x^2 = y \cdot z$. Pierādīt, ka $\angle CBA + \angle CPB = 180°$.

00.40. Regulāra 2*n*-stūra virsotnēs ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 2*n* (katrā virsotnē – cits skaitlis). Ja divas malas ir paralēlas, tad to galos ierakstīto skaitļu summas ir vienādas. Vai tas ir iespējams, ja a) $n = 5$, b) $n = 6$?